

Особенности кинетики радиационного нагрева металлических пластин при флуктуационно-электромагнитном трении¹⁾

Г. В. Дедков²⁾

Кабардино-Балкарский государственный университет, 360004 Нальчик, Россия

Поступила в редакцию 25 ноября 2024 г.

После переработки 4 декабря 2024 г.

Принята к публикации 5 декабря 2024 г.

Рассматривается радиационный теплообмен толстых однородных и изотропных пластин при относительном нерелятивистском латеральном движении. Особое внимание уделяется свойствам симметрии системы с одинаковыми или различными параметрами. Показано, что в квазистационарном режиме движущаяся или покоящаяся пластины золота могут иметь значительный перегрев одна относительно другой. Эти особенности могут быть использованы для экспериментального исследования диссипативных сил Казимира-Лифшица.

DOI: 10.31857/S0370274X25010248, EDN: RLUQDC

Пионерская идея о том, что электромагнитный вакуум обладает квантовыми свойствами, была выдвинута Х. Казимиром в 1948 г. [1]. С тех пор много усилий было затрачено на разработку квантовой теории света и явлений, вызванных квантово-оптическими флуктуациями, включая силы Казимира, Казимира-Полдера [2] и Лифшица [3], которые действуют между атомами, молекулами и материальными поверхностями, а также между макроскопическими телами. Широко известные монографии [4–7] дают представление лишь о сравнительно малой части результатов, накопленных в этой области. Некоторые последние достижения физики Казимира и флуктуационно-электромагнитного взаимодействия отражены в тематической коллекции, посвященной 75-летию эффекта Казимира (см. [8] и цитируемые там статьи). Ряд новых интригующих физических идей и экспериментальных предложений недавно обсуждался в [9–19].

Радиационно-фрикционный нагрев Казимира-Лифшица обусловлен флуктуационно-электромагнитным взаимодействием между движущимися незаряженными телами, разделенными вакуумным зазором. Примером является классическая конфигурация из двух толстых пластин [20] или параллельных зеркал [21], находящихся в относительном тангенциальном движении. В наших работах [22–26] обращалось внимание на низкотемпературное возрастание силы трения Казимира-

Лифшица для металлических тел и возможность их “аномального” нагрева: частицы в конфигурации частица-пластина и пластины в конфигурации двух пластин. Эти особенности возникают в результате теплового и динамического неравновесия, усугубляемого температурной зависимостью удельного сопротивления металлов при температурах значительно ниже температуры Дебая. Они могут сыграть решающую роль в сценарии измерения силы трения Казимира-Лифшица через тепловой нагрев взаимодействующих тел, обсуждавшемся в [24, 25]. Прямое экспериментальное измерение этой силы до сих пор является нерешенной приоритетной задачей. Однако несколько важных моментов остались недостаточно ясными. К ним относятся свойства симметрии системы пластин при одинаковых и разных параметрах материалов, соотношения между силой трения и скоростью нагрева каждой пластины, возможные сценарии нагрева. Возможно ли достичь квазистационарного состояния, когда движущаяся пластина горячее неподвижной и наоборот, и насколько велика может быть разность температур между ними в зависимости от скорости, свойств материалов и начальных условий?

В стандартной формулировке задачи (см. рис. 1) пластины рассматриваются как однородные и изотропные немагнитные металлы с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 , ϵ_2 и магнитными проницаемостями $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Диэлектрические проницаемости зависят от частоты ω и локальных температур T_1 (неподвижная пластина) и T_2 (подвижная пластина). Пластина 1 соответствует лабораторной системе

¹⁾См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

²⁾e-mail: gv_dedkov@mail.ru

отсчета, а пластина 2 движется с постоянной нерелятивистской скоростью $V \ll c$ (c – скорость света).

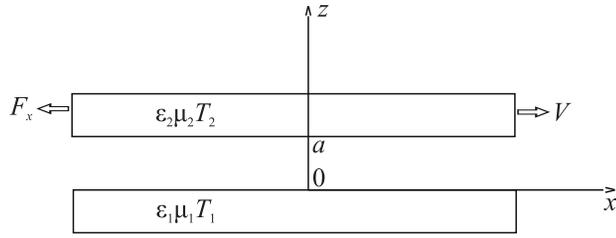


Рис. 1. Конфигурация системы

Следуя [26] в рамках теории Полевого [20] (независимо от условия $\mu_1 = \mu_2 = 1$), векторы Пойнтинга P_1 и P_2 , описывающие радиационные потоки тепла от пластины 1 и пластины 2, и мощность $F_x V$ диссипативной тангенциальной силы определяются выражениями (все величины отнесены к единице площади поверхности пластин)

$$P_1 = -\frac{\hbar}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \int d^2k \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2} \text{Im} \left(\frac{q_1}{\mu_1} \right) \text{Im} \left(\frac{\tilde{q}_2}{\mu_2} \right) \times \left[\coth \left(\frac{\hbar\omega^-}{2T_2} \right) - \coth \left(\frac{\hbar\omega}{2T_1} \right) \right] + (\mu \rightarrow \varepsilon), \quad (1)$$

$$P_2 = \frac{\hbar}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^- \int d^2k \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2} \text{Im} \left(\frac{q_1}{\mu_1} \right) \text{Im} \left(\frac{\tilde{q}_2}{\mu_2} \right) \times \left[\coth \left(\frac{\hbar\omega^-}{2T_2} \right) - \coth \left(\frac{\hbar\omega}{2T_1} \right) \right] + (\mu \rightarrow \varepsilon), \quad (2)$$

$$F_x V = -\frac{\hbar}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (k_x V) \int d^2k \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2} \text{Im} \left(\frac{q_1}{\mu_1} \right) \times \text{Im} \left(\frac{\tilde{q}_2}{\mu_2} \right) \left[\coth \left(\frac{\hbar\omega^-}{2T_2} \right) - \coth \left(\frac{\hbar\omega}{2T_1} \right) \right] + (\mu \rightarrow \varepsilon), \quad (3)$$

$$Q_\mu = (q + q_1/\mu_1)(q + \tilde{q}_2/\tilde{\mu}_1) \times \exp(qa) - (q - q_1/\mu_1)(q - \tilde{q}_2/\tilde{\mu}_2)(-qa). \quad (4)$$

Здесь $\omega^- = \omega - k_x V$, $q = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$, $q_{1,2} = \sqrt{k^2 - \varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}\omega^2/c^2}$, тильда над q_2 и μ_2 означает, что эти величины берутся при $\omega = \omega^-$, слагаемые $(\mu \rightarrow \varepsilon)$ имеют такой же вид, как и первые члены в (1)–(3) с соответствующими заменами, температуры T_1 и T_2 выражены в энергетических единицах, \hbar – постоянная Планка.

Переход от исходных выражений Полевого для P_1 и P_2 (см. формулы (3)–(5) в [20] или

(2)–(4) в [26]) выполняется с учетом тождеств $\text{sign}(\omega) \left(1 + \frac{2}{\exp(\hbar|\omega|/T_1) - 1} \right) = \coth(\hbar\omega/(2T_1))$ и $\text{sign}(\omega^-) \left(1 + \frac{2}{\exp(\hbar|\omega^-|/T_2) - 1} \right) = \coth(\hbar\omega^-(2T_2))$.

Из (2)–(4) легко видеть, что

$$P_1 + P_2 = F_x V. \quad (5)$$

Знак силы F_x определяет направление ее действия на пластину 2, причем условие $F_x < 0$ означает, что тангенциальная сила является тормозящей. В свою очередь, отрицательный знак P_1 или P_2 соответствует нагреву. Выражения (1) и (3) полностью согласуются с известными результатами [7, 11, 26–30] (см. также ссылки) для скорости лучистого теплообмена пластин в состоянии покоя и силы трения Казимира–Лифшица при относительном нерелятивистском движении.

Однако до сих пор зависимости P_1 и P_2 от скорости V практически не обсуждались. При $V \sim 1$ м/с и менее динамические вклады в P_1 и P_2 пропорциональны V^2 , будучи существенно меньше, чем не зависящие от V составляющие, если между пластинами имеется разница температур (предполагая близкие к нормальным тепловые условия). В этом случае P_1 и P_2 в (5) почти полностью уничтожаются, имея разные знаки, а мощность и величина силы трения малы. Однако для металлических пластин ситуация кардинально изменяется при низких температурах, значительно меньших температуры Дебая θ_D , и/или с ростом V (см. дополнительные материалы). Тогда модуль $F_x V$ в (5) становится сравним с модулями P_1 и P_2 или превышает их по величине. Кроме того, из-за уменьшения теплоемкости металлов при низких температурах увеличивается скорость нагрева пластин, что благоприятствует экспериментальным измерениям эффекта нагрева. В связи с этим весьма важными для численных расчетов и контроля результатов являются свойства симметрии выражений (1)–(3), не сразу заметные на первый взгляд. Чтобы привести выражения (1), (2) к симметричному виду, сделаем в (2) замену переменных $\omega^- = \omega - k_x V \rightarrow \omega'$, $\omega \rightarrow \omega' + k_x V$, и $\omega' \rightarrow \omega$. В результате получим

$$P_2 = \frac{\hbar}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \int d^2k \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2} \text{Im} \left(\frac{\tilde{q}_1}{\tilde{\mu}_1} \right) \text{Im} \left(\frac{q_2}{\mu_2} \right) \times \left[\coth \left(\frac{\hbar\omega}{2T_2} \right) - \coth \left(\frac{\hbar\omega^+}{2T_1} \right) \right] + (\mu \rightarrow \varepsilon), \quad (6)$$

где \tilde{q}_1 , $\tilde{\mu}_1$ и другие величины с тильдой теперь берутся при $\omega^+ = \omega + k_x V$. Следует отметить, что при этом преобразовании величина q не изменяется. Легко также убедиться в том, что

функция $M(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{V}) = \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2} \text{Im} \left(\frac{q_1}{\mu_1} \right) \text{Im} \left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\mu}_2} \right)$ в (2), (3) удовлетворяет соотношениям $M(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{V}) = M(-\omega, -\mathbf{k}, \mathbf{V}) = M(\omega, -\mathbf{k}, -\mathbf{V})$. В силу этого и аналитических свойств полных подынтегральных выражений в (1) и (6) формулы для P_1 и P_2 принимают вид

$$P_1 = -\frac{\hbar}{\pi^3} \int_0^\infty d\omega \omega \int d^2k \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2} \text{Im} \left(\frac{q_1}{\mu_1} \right) \text{Im} \left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\mu}_2} \right) \times \\ \times \left[\coth \left(\frac{\hbar\omega^-}{2T_2} \right) - \coth \left(\frac{\hbar\omega}{2T_1} \right) \right] + (\mu \rightarrow \varepsilon), \quad (7)$$

$$P_2 = \frac{\hbar}{\pi^3} \int_0^\infty d\omega \omega \int d^2k \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2} \text{Im} \left(\frac{\tilde{q}_1}{\tilde{\mu}_1} \right) \text{Im} \left(\frac{q_2}{\mu_2} \right) \times \\ \times \left[\coth \left(\frac{\hbar\omega}{2T_2} \right) - \coth \left(\frac{\hbar\omega^-}{2T_1} \right) \right] + (\mu \rightarrow \varepsilon), \quad (8)$$

Как непосредственно видно из (7), (8), если пластины изготовлены из одного и того же материала, а ε_i , μ_i зависят только от локальных температур T_i ($i = 1, 2$), то $P_2(T_1, T_2, V) = P_1(T_2, T_1, V)$. Этот результат получается простой перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в (8). С другой стороны, при $T_1 = T_2 = T$ из (7), (8) следует $P_1 = P_2$ в полном соответствии с принципом относительности и неразличимостью пластин. Если же параметры ε_i , μ_i индивидуальны для каждой пластины, то соотношение симметрии имеет вид $P_1(a, 1, 2, V) = P_2(a, 2, 1, V)$, где перестановка индексов $1 \leftrightarrow 2$ относится ко всем величинам, характеризующим пластины 1 и 2, но при этом $P_1 \neq P_2$ при $T_1 = T_2 = T$. Следует также отметить, что в (7), (8) все частоты ω^- можно эквивалентно заменить на ω^+ . Это отражает независимость P_1 и P_2 от направления движения. Платой за симметрию выражений (7), (8) является тот факт, что формула (5) теперь менее очевидна, чем при суммировании выражений (2) и (3). Учитывая аналитические свойства подынтегрального выражения (3), получим

$$F_x = -\frac{\hbar}{\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int d^2k k_x \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2} \text{Im} \left(\frac{q_1}{\mu_1} \right) \text{Im} \left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\mu}_2} \right) \times \\ \times \left[\coth \left(\frac{\hbar\omega^-}{2T_2} \right) - \coth \left(\frac{\hbar\omega}{2T_1} \right) \right] + (\mu \rightarrow \varepsilon), \quad (9)$$

Выражения (7)–(9) имеют общий характер и дают исчерпывающее описание нагрева и трения, обусловленных флуктуационно-электромагнитным взаимодействием в системе двух пластин.

Следует специально отметить, что аналогичные выражения для скоростей нагрева пластин, приведенные в наших недавних работах [24, 25], а также выражения Полевого (16) и (17) в [20] являются недостаточно корректными из-за нарушенной симметрии при записи тепловых потоков P_1 и P_2 , произошедшей в результате модификации пределов интегрирования по частотам. И хотя на необходимость такой симметрии обращалось внимание в [24, 25], детальный анализ всех выражений, упомянутых выше, не проводился. Между тем, и (16), (17) в [20], и аналогичные им формулы (2), (3) в [24, 25] удовлетворяют базовому соотношению (5) для силы трения. Более того, взятые по отдельности, остаются в силе и формулы для силы трения и скорости нагрева неподвижной пластины. Отсутствие симметрии формул (16) и (17) в [20] и (2), (3) в [24, 25] легко увидеть, полагая $T_1 = T_2 = T$ в соответствующих выражениях. В этом случае $P_1 \neq P_2$. В итоге, при нерелятивистских скоростях $V \ll c$ пластины 2 условиям симметрии и соотношению (5) удовлетворяют, кроме (3) и (4) в [20], только формулы (7)–(9) настоящей статьи.

Для полноты картины укажем также на неточности в значениях численных коэффициентов общих интегральных выражений (2), (3) и (5) в работах [24, 25] и формул (20), (21) в [26]. Все они должны быть исправлены в соответствии с выражениями (7)–(9). Эти поправки, однако, не изменяют качественных выводов работ [24–26].

Следующий важный вопрос касается сценариев тепловой эволюции. Как отмечалось в [24, 25], процесс радиационного нагрева пластин гораздо медленнее процесса диффузии тепла. Если предположить, что толщина пластин равна b , то характерное время диффузии тепла τ_d в нормальном направлении будет $\tau_d = c\rho b^2/\lambda$, где λ – коэффициент теплопроводности, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность. При $b = 500$ мкм и типичных параметрах золота [31]: $\lambda = 3200$ Вт/м·К, $T = 10$ К, $c = 2.2$ Дж/кг·К и $\rho = 19.8 \cdot 10^3$ кг/м³, получим оценку $\tau_d = 3$ мкс. В то же время радиационный теплообмен пластин при их тепловой изоляции от окружающей среды осуществляется через узкий вакуумный зазор. Тогда, предполагая, что пластины идентичны и имеют одинаковую температуру, кинетика нагрева каждой описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\eta(V, T)V^2}{2bc(T)\rho}, \quad (10)$$

где $\eta(V, T) = |F_x|/V$ – параметр трения. В соответствии с (10), характерное время повышения температуры на величину ΔT составит $\tau_r = \frac{2bc\rho}{\eta V^2} \Delta T$ и,

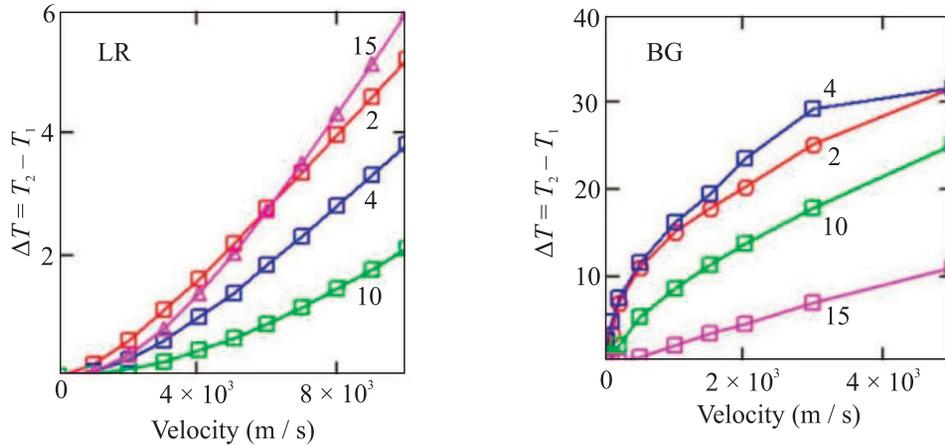


Рис. 2. (Цветной онлайн) Максимальное увеличение температуры (в К) движущейся пластины при квазистационарном перегреве в зависимости от скорости. Слева: расчет с линейной зависимостью удельного сопротивления золота от температуры (см. дополнительные материалы, рис. S1, кривая $\rho \sim T$); справа: с зависимостью Блоха–Грюнайзена с ограничением остаточного сопротивления на уровне $\rho(7\text{ K}) \approx 10^{-11}$ Ом·м. Числа на кривых показывают температуры покоящейся пластины

соответственно, $\tau_r/\tau_d = \frac{2\lambda}{b\eta V^2} \Delta T$. В [24, 25], используя различные температурные зависимости удельного сопротивления золота в рамках модели Друде (см. дополнительные материалы) для коэффициента $\eta(V, T)$, были получены значения $\eta = 10^{-3} \div 10^{-7}$ кг/м²·с при $T \sim 10$ К. Отсюда следует, что $\tau_r/\tau_d \gg 1$ при $\Delta T \sim 1$ К и $V < 10^5$ м/с. Это означает, что процесс радиационного теплообмена может рассматриваться независимо от процесса тепловой диффузии, оправдывая возможность использования уравнения (10) и сценария синхронного нагрева пластин. Возможная схема измерений кинетики нагрева с использованием контролируемого вращения одной из пластин, рассматривалась в [24, 25].

Если пластины различаются по величине локальной температуры и/или по другим параметрам, то уравнение для нагрева каждой из них надо записывать по отдельности. Тогда получим систему уравнений (в первом приближении считаем, что параметры $h_{1,2}, \rho_{1,2}$ не зависят от температуры)

$$\begin{cases} \frac{dT_1}{dt} = -\frac{P_1(V, T_1, T_2)}{2h_1c_1(T_1)\rho_1}, \\ \frac{dT_2}{dt} = -\frac{P_2(V, T_1, T_2)}{2h_2c_2(T_2)\rho_2}, \end{cases} \quad (11)$$

где P_1 и P_2 определяются формулами (7), (8). Исследование всех возможных вариантов решения системы (11) выходит за рамки данной статьи ввиду весьма сложной интегральной зависимости правых частей от температур и других параметров. С точки зрения возможных экспериментальных измере-

ний тепловых эффектов и, тем самым, силы трения, представляет большой интерес сценарий, при котором пластина 1 имеет постоянную температуру, поддерживаемую тепловым резервуаром, а пластина 2 нагревается, испытывая фрикционный нагрев. При $P_2(V, T_1, T_2) = 0$ будет наблюдаться стационарный режим, когда $T_1 = \text{const}$, $dT_2/dt = 0$, но T_2 достигает максимальных значений. Начальные значения температур T_1 и T_2 можно выбрать одинаковыми. В силу симметрии, величину максимального перегрева такой же величины можно получить и для пластины 1, если тепловой резервуар находится в тепловом контакте с подвижной пластиной. Максимальная величина разности температур $\Delta T = T_2 - T_1$ зависит от скорости V и удельных сопротивлений материалов пластин. Результаты численных расчетов $\Delta T(V)$ с использованием приближения Друде для диэлектрической проницаемости и разных зависимостей $\rho(T)$ [32, 33] показаны на рис. 2, 3. В этом случае $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu(T))}$, где ω_p – плазменная частота, $\nu(T) = \omega_p^2 \rho(T) / 4\pi$ – частота релаксации электронов. Во всех случаях расстояние между пластинами принималось равным $a = 10$ нм, а $\omega_p = 9.03$ эВ. Как показано в [25], при $a = 10 \div 20$ нм зависимость силы трения от расстояния a (а также P_1 и P_2 вследствие (5)) близка к $1/a$. Вид функций $\Delta T(V)$ на рис. 2, 3 подтверждает выводы [23–25] о том, что движущееся тело может нагреваться, имея более высокую температуру по сравнению с покоящимся (см. также дополнительные материалы и рис. S2). Возможна и обратная ситуация с перегревом покоящегося тела.

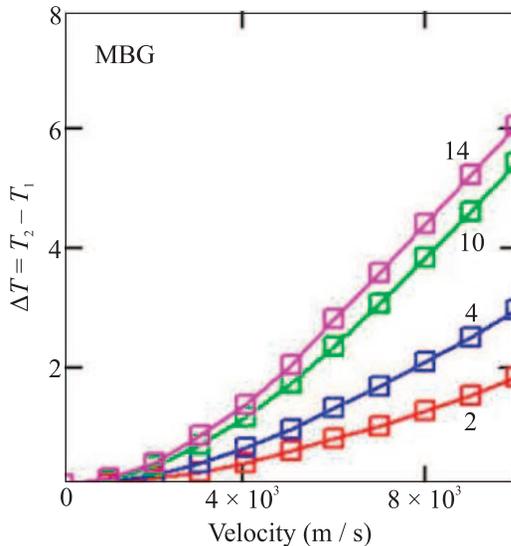


Рис. 3. (Цветной онлайн) То же, что на рис. 2 с использованием зависимости удельного сопротивления золота по модифицированной модели Блоха–Грюнайзена [33] (см. рис. S1, кружки)

Исследование одновременного обращения в нуль величин P_1 и P_2 или их суммы (т.е. возможность бездиссипативного движения) при надлежащем выборе параметров представляет отдельную важную задачу, и пока не ясно, имеет ли она вообще решение.

Заключение. В рамках флуктуационно-электромагнитной теории рассмотрены особенности радиационного теплообмена и силы трения Казимира–Лифшица при нерелятивистском относительном движении толстых однородных и изотропных пластин с заданными диэлектрическими и магнитными характеристиками. Результаты расчетов для пластин золота создают основу для экспериментального измерения силы трения Казимира–Лифшица по избыточному нагреву движущейся или покоящейся пластины в диапазоне температур $T < 15$ К и скоростей $V \approx 1 \div 10^3$ м/с.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет бюджета Кабардино-Балкарского государственного университета. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. Н. В. Г. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B **51**, 793 (1948).
2. Н. В. Г. Casimir and D. Polder, Phys. Rev. **73**, 360 (1948).
3. Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ **29**, 94 (1955).

4. С. М. Рытов, *Теория электрических флуктуаций и теплового излучения*, Изд. АН СССР, М. (1953).
5. М. Л. Левин, С. М. Рытов, *Теория неравновесных электромагнитных флуктуаций в электродинамике*, Наука, М. (1967).
6. Ю. С. Бараш, *Силы Ван-дер-Ваальса*, Наука, М. (1988).
7. В. Г. Полевой, *Теплообмен флуктуационным электромагнитным полем*, Наука, М. (1990).
8. G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko, Physics **6**, 1072 (2024).
9. M. B. Farias, F. C. Lombardo, A. A. Soba, P. I. Villar, and R. S. Decca, npj Quantum Inf. **6**, 25 (2020).
10. F. C. Lombardo, R. S. Decca, L. Viotti, and P. I. Villar, Adv. Quant. Technol. **4**, 2000155 (2021).
11. D. Reiche, F. Intravaia, and K. Busch, APL Photonics **7**, 030902 (2022).
12. N. M. Myers, O. Abah, and S. Deffner, AVS Quantum Sci. **4**, 027101 (2022).
13. I. Brevik, B. Shapiro, and M. Silveirinha, Int. J. Mod. Phys. A **37**, 2241012 (2022).
14. D. Oue, K. Ding, and J. B. Pendry, Phys. Rev. A **107**, 063501 (2023).
15. Y.-Ch. Hao, Y. Zhang, and H.-L. Yi, Phys. Rev. B **108**, 125431 (2023).
16. K. A. Milton, X. Guo, G. Kennedy, N. Pourtolami, and D. M. DelCol, Phys. Rev. A **108**, 022809 (2023).
17. L. Ge, Phys. Rev. B **108**, 045406 (2023).
18. K. A. Milton, N. Pourtolami, and G. Kennedy, Phys. Rev. A **110**, 042814 (2024).
19. J. E. Vasquez-Lozano and I. Liberal, ACS Appl. Opt. Mater. **2**, 8908 (2024).
20. В. Г. Полевой, ЖЭТФ **98**, 1990 (1990).
21. G. Barton, Ann. Phys. **245**, 361 (1996).
22. Г. В. Дедков, Письма в ЖЭТФ **114**, 713 (2021).
23. G. V. Dedkov, Appl. Phys. Lett. **121**, 231603 (2022).
24. Г. В. Дедков, Письма в ЖЭТФ **117**, 950 (2023).
25. G. V. Dedkov, Physics **6**, 13(2024).
26. G. V. Dedkov and A. A. Kyasov, Chin. Phys. **56**, 3002 (2018).
27. М. Л. Левин, В. Г. Полевой, С. М. Рытов, ЖЭТФ **52**(6), 1054 (1980).
28. J. B. Pendry, J. Phys. C: Condens. Matter **9**, 10301 (1997).
29. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, Rev. Mod. Phys. **79**, 1291 (2007).
30. J. S. Høye, I. Brevik, and K. A. Milton, Symmetry **8**, 29 (2016).
31. *Физические величины*, Справочник под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова, Энергоатомиздат, М. (1991).
32. *Handbook of Physics*, ed. by E. U. Condon and N. Odishaw, McGraw Hill, N.Y. (1967).
33. J. Baptiste, in: *The Physics Factbook*, ed. by G. Elert (2004); <https://hypertextbook.com/facts/2004/JennelleBaptiste.shtml> (accessed on 25 November 2023).