Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 2, с. 166 – 170 

# Особенности кинетики радиационного нагрева металлических пластин при флуктуационно-электромагнитном трении[1)]

*Г. В. Дедков*[2)]

*Кабардино-Балкарский государственный университет, 360004 Нальчик, Россия*

Поступила в редакцию 25 ноября 2024 г.
После переработки 4 декабря 2024 г.
Принята к публикации 5 декабря 2024 г.

Рассматривается радиационный теплообмен толстых однородных и изотропных пластин при относительном нерелятивистском латеральном движении.Особое внимание уделяется свойствам симметрии системы с одинаковыми или различными параметрами.Показано,что в квазистационарном режиме движущаяся или покоящаяся пластины золота могут иметь значительный перегрев одна относительно другой.Эти особенности могут быть использованы для экспериментального исследования диссипативных сил Казимира- Лифшица.

DOI: 10.31857/S0370274X25010248, EDN: RLUQDC

Пионерская идея о том,что электромагнитный вакуум обладает квантовыми свойствами, была выдвинута Х. Казимиром в 1948 г. [1]. С тех пор много усилий было затрачено на разработку квантовой теории света и явлений, вызванных квантово-оптическими флуктуациями, включая силы Казимира, Казимира–Полдера [2] и Лифшица [3], которые действуют между атомами, молекулами и материальными поверхностями, а также между макроскопическими телами. Широко известные монографии [4–7] дают представление лишь о сравнительно малой части результатов, накопленных в этой области. Некоторые последние достижения физики Казимира и флуктуационно-электромагнитного взаимодействия отражены в тематической коллекции, посвященной 75-летию эффекта Казимира (см. [8] и цитируемые там статьи). Ряд новых интригующих физических идей и экспериментальных предложений недавно обсуждался в [9–19].

Радиационно-фрикционный нагрев Казимира–Лифшица обусловлен флуктуационно-электромагнитным взаимодействием между движущимися незаряженными телами, разделенными вакуумным зазором. Примером является классическая конфигурация из двух толстых пластин [20] или параллельных зеркал [21], находящихся в относительном тангенциальном движении. В наших работах [22–26] обращалось внимание на низкотемпературное возрастание силы трения Казимира–Лифшица для металлических тел и возможность их "аномального" нагрева: частицы в конфигурации частица-пластина и пластины в конфигурации двух пластин. Эти особенности возникают в результате теплового и динамического неравновесия, усугубляемого температурной зависимостью удельного сопротивления металлов при температурах значительно ниже температуры Дебая. Они могут сыграть решающую роль в сценарии измерения силы трения Казимира–Лифшица через тепловой нагрев взаимодействующих тел, обсуждавшемся в [24, 25]. Прямое экспериментальное измерение этой силы до сих пор является нерешенной приоритетной задачей. Однако несколько важных моментов остались недостаточно ясными. К ним относятся свойства симметрии системы пластин при одинаковых и разных параметрах материалов, соотношения между силой трения и скоростью нагрева каждой пластины, возможные сценарии нагрева. Возможно ли достичь квазистационарного состояния, когда движущаяся пластина горячее неподвижной и наоборот, и насколько велика может быть разность температур между ними в зависимости от скорости, свойств материалов и начальных условий?

В стандартной формулировке задачи (см. рис. 1) пластины рассматриваются как однородные и изотропные немагнитные металлы с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ и магнитными проницаемостями $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Диэлектрические проницаемости зависят от частоты $\omega$ и локальных температур $T_1$ (неподвижная пластина) и $T_2$ (подвижная пластина). Пластина 1 соответствует лабораторной системе

[1)]См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

[1)]e-mail: gv_dedkov@mail.ru

отсчета, а пластина 2 движется с постоянной нерелятивистской скоростью $V \ll c$ ($c$ – скорость света).

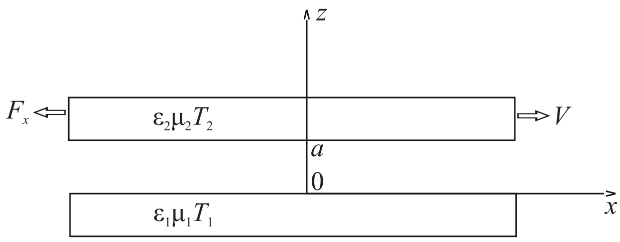


Рис. 1. Конфигурация системы

Следуя [26] в рамках теории Полевого [20] (независимо от условия $\mu_1 = \mu_2 = 1$), векторы Пойнтинга $P_1$ и $P_2$, описывающие радиационные потоки тепла от пластины 1 и пластины 2, и мощность $F_xV$ диссипативной тангенциальной силы определяются выражениями (все величины отнесены к единице площади поверхности пластин)

$$P_1 = -\frac{\hbar}{2\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\omega \int d^2k \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2}\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\mu_2}\right)\times$$
$$\times\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega^-}{2T_2}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T_1}\right)\right] + (\mu\to\varepsilon), \qquad (1)$$

$$P_2 = \frac{\hbar}{2\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\omega^- \int d^2k \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2}\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\mu_2}\right)\times$$
$$\times\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega^-}{2T_2}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T_1}\right)\right] + (\mu\to\varepsilon), \qquad (2)$$

$$F_xV = -\frac{\hbar}{2\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega(k_xV) \int d^2k \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2}\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\times$$
$$\times\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\mu_2}\right)\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega^-}{2T_2}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T_1}\right)\right] + (\mu\to\varepsilon), \qquad (3)$$

$$Q_\mu = (q + q_1/\mu_1)(q + \tilde{q}_2/\tilde{\mu}_1)\times$$
$$\times\exp(qa) - (q - q_1/\mu_1)(q - \tilde{q}_2/\tilde{\mu}_2)(-qa). \qquad (4)$$

Здесь $\omega^- = \omega - k_xV$, $q = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$, $q_{1,2} = \sqrt{k^2 - \varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}\omega^2/c^2}$, тильда над $q_2$ и $\mu_2$ означает, что эти величины берутся при $\omega = \omega^-$, слагаемые $(\mu\to\varepsilon)$ имеют такой же вид, как и первые члены в (1)–(3) с соответствующими заменами, температуры $T_1$ и $T_2$ выражены в энергетических единицах, $\hbar$ – постоянная Планка.

Переход от исходных выражений Полевого для $P_1$ и $P_2$ (см. формулы (3)–(5) в [20] или (2)–(4) в [26]) выполняется с учетом тождеств $\mathrm{sign}(\omega)\left(1 + \frac{2}{\exp(\hbar|\omega|/T_1)-1}\right) = \coth(\hbar\omega/(2T_1)$ и $\mathrm{sign}(\omega^-)\left(1 + \frac{2}{\exp(\hbar|\omega^-|/T_2)-1}\right) = \coth(\hbar\omega^-/(2T_2)$.

Из (2)–(4) легко видеть, что

$$P_1 + P_2 = F_xV. \qquad (5)$$

Знак силы $F_x$ определяет направление ее действия на пластину 2, причем условие $F_x < 0$ означает,что тангенциальная сила является тормозящей. В свою очередь, отрицательный знак $P_1$ или $P_2$ соответствует нагреву. Выражения (1) и (3) полностью согласуются с известными результатами [7, 11, 26–30] (см. также ссылки) для скорости лучистого теплообмена пластин в состоянии покоя и силы трения Казимира–Лифшица при относительном нерелятивистском движении.

Однако до сих пор зависимости $P_1$ и $P_2$ от скорости $V$ практически не обсуждались. При $V \sim 1$ м/с и менее динамические вклады в $P_1$ и $P_2$ пропорциональны $V^2$, будучи существенно меньше, чем не зависящие от $V$ составляющие, если между пластинами имеется разница температур (предполагая близкие к нормальным тепловые условия). В этом случае $P_1$ и $P_2$ в (5) почти полностью уничтожаются, имея разные знаки, а мощность и величина силы трения малы. Однако для металлических пластин ситуация кардинально изменяется при низких температурах, значительно меньших температуры Дебая $\theta_D$, и/или с ростом $V$ (см. дополнительные материалы). Тогда модуль $F_xV$ в (5) становится сравним с модулями $P_1$ и $P_2$ или превышает их по величине. Кроме того, изза уменьшения теплоемкости металлов при низких температурах увеличивается скорость нагрева пластин, что благоприятствует экспериментальным измерениям эффекта нагрева. В связи с этим весьма важными для численных расчетов и контроля результатов являются свойства симметрии выражений (1)–(3), не сразу заметные на первый взгляд. Чтобы привести выражения (1), (2) к симметричному виду, сделаем в (2) замену переменных $\omega^- = \omega - k_xV \to \omega'$, $\omega \to \omega' + k_xV$, и $\omega' \to \omega$. В результате получим

$$P_2 = \frac{\hbar}{2\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\omega \int d^2k \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2}\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_1}{\tilde{\mu}_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{q_2}{\mu_2}\right)\times$$
$$\times\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T_2}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2T_1}\right)\right] + (\mu\to\varepsilon), \qquad (6)$$

где $\tilde{q}_1$, $\tilde{\mu}_1$ и другие величины с тильдой теперь берутся при $\omega^+ = \omega + k_xV$. Следует отметить, что при этом преобразовании величина $q$ не изменяется. Легко также убедиться в том, что функция $M(\omega,\mathbf{k},\mathbf{V}) = \frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2}\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\mu}_2}\right)$ в (2), (3) удовлетворяет соотношениям $M(\omega,\mathbf{k},\mathbf{V}) = M(-\omega,-\mathbf{k},\mathbf{V}) = M(\omega,-\mathbf{k},-\mathbf{V})$. В силу этого и аналитических свойств полных подынтегральных выражений в (1) и (6) формулы для $P_1$ и $P_2$ принимают вид

$$P_1 = -\frac{\hbar}{\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega\omega\int d^2k\frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2}\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\mu}_2}\right)\times \\ \times\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega^-}{2T_2}\right)-\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T_1}\right)\right]+(\mu\to\varepsilon), \quad (7)$$

$$P_2 = \frac{\hbar}{\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega\omega\int d^2k\frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2}\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_1}{\tilde{\mu}_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{q_2}{\mu_2}\right)\times \\ \times\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T_2}\right)-\coth\left(\frac{\hbar\omega^-}{2T_1}\right)\right]+(\mu\to\varepsilon), \quad (8)$$

Как непосредственно видно из (7), (8), если пластины изготовлены из одного и того же материала, а $\varepsilon_i$, $\mu_i$ зависят только от локальных температур $T_i$ $(i=1,2)$, то $P_2(T_1,T_2,V) = P_1(T_2,T_1,V)$. Этот результат получается простой перестановкой индексов $1\leftrightarrow 2$ в (8). С другой стороны, при $T_1=T_2=T$ из (7), (8) следует $P_1=P_2$ в полном соответствии с принципом относительности и неразличимостью пластин. Если же параметры $\varepsilon_i$, $\mu_i$ индивидуальны для каждой пластины, то соотношение симметрии имеет вид $P_1(a,1,2,V) = P_2(a,2,1,V)$, где перестановка индексов $1\leftrightarrow 2$ относится ко всем величинам, характеризующим пластины 1 и 2, но при этом $P_1\neq P_2$ при $T_1=T_2=T$. Следует также отметить, что в (7), (8) все частоты $\omega^-$ можно эквивалентно заменить на $\omega^+$. Это отражает независимость $P_1$ и $P_2$ от направления движения. Платой за симметрию выражений (7), (8) является тот факт, что формула (5) теперь менее очевидна, чем при суммировании выражений (2) и (3). Учитывая аналитические свойства подынтегрального выражения (3), получим

$$F_x = -\frac{\hbar}{\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega\int d^2kk_x\frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2}\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\mu}_2}\right)\times \\ \times\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega^-}{2T_2}\right)-\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T_1}\right)\right]+(\mu\to\varepsilon), \quad (9)$$

Выражения (7)–(9) имеют общий характер и дают исчерпывающее описание нагрева и трения, обусловленных флуктуационно-электромагнитным взаимодействием в системе двух пластин.

Следует специально отметить,что аналогичные выражения для скоростей нагрева пластин, приведенные в наших недавних работах [24, 25], а также выражения Полевого (16) и (17) в [20] являются недостаточно корректными из-за нарушенной симметрии при записи тепловых потоков $P_1$ и $P_2$, произошедшей в результате модификации пределов интегрирования по частотам. И хотя на необходимость такой симметрии обращалось внимание в [24, 25], детальный анализ всех выражений, упомянутых выше, не проводился. Между тем, и (16), (17) в [20], и аналогичные им формулы (2), (3) в [24, 25] удовлетворяют базовому соотношению (5) для силы трения. Более того, взятые по отдельности, остаются в силе и формулы для силы трения и скорости нагрева неподвижной пластины. Отсутствие симметрии формул (16) и (17) в [20] и (2), (3) в [24, 25] легко увидеть, полагая $T_1=T_1=T$ в соответствующих выражениях. В этом случае $P_1\neq P_2$. В итоге, при нерелятивистских скоростях $V\ll c$ пластины 2 условиям симметрии и соотношению (5) удовлетворяют, кроме (3) и (4) в [20], только формулы (7)–(9) настоящей статьи.

Для полноты картины укажем также на неточности в значениях численных коэффициентов общих интегральных выражений (2), (3) и (5) в работах [24, 25] и формул (20), (21) в [26]. Все они должны быть исправлены в соответствии с выражениями (7)–(9). Эти поправки, однако, не изменяют качественных выводов работ [24–26].

Следующий важный вопрос касается сценариев тепловой эволюции. Как отмечалось в [24, 25], процесс радиационного нагрева пластин гораздо медленнее процесса диффузии тепла. Если предположить, что толщина пластин равна $b$, то характерное время диффузии тепла $\tau_d$ в нормальном направлении будет $\tau_d = c\rho b^2/\lambda$, где $\lambda$ – коэффициент теплопроводности, $c$ – удельная теплоемкость, $\rho$ – плотность. При $b = 500$ мкм и типичных параметрах золота [31]: $\lambda = 3200$ Вт/м·К, $T = 10$ К, $c = 2.2$ Дж/кг·К и $\rho = 19.8\cdot 10^3$ кг/м$^3$, получим оценку $\tau_d = 3$ мкс. В то же время радиационный теплообмен пластин при их тепловой изоляции от окружающей среды осуществляется через узкий вакуумный зазор. Тогда, предполагая, что пластины идентичны и имеют одинаковую температуру, кинетика нагрева каждой описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\eta(V,T)V^2}{2bc(T)\rho}, \quad (10)$$

где $\eta(V,T) = |F_x|/V$ – параметр трения. В соответствии с (10), характерное время повышения температуры на величину $\Delta T$ составит $\tau_r = \frac{2bc\rho}{\eta V^2}\Delta T$ и,

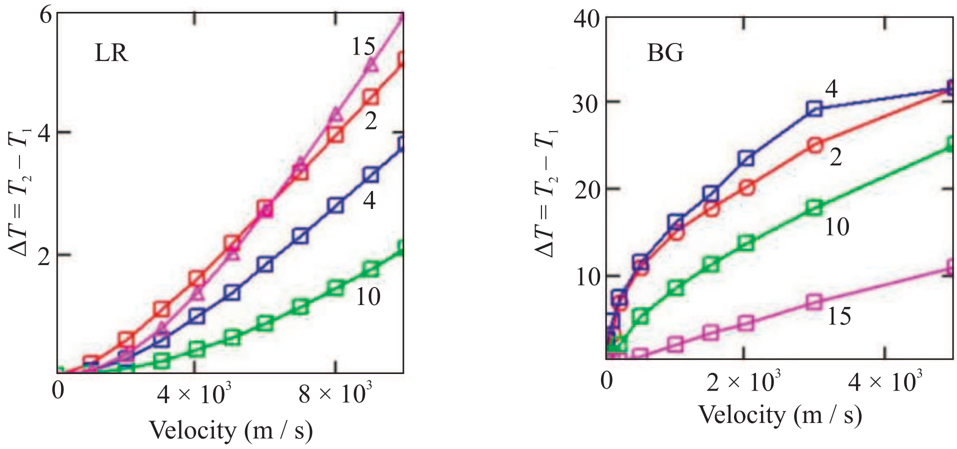


Рис. 2. (Цветной онлайн) Максимальное увеличение температуры (в K) движущейся пластины при квазистационарном перегреве в зависимости от скорости. Слева: расчет с линейной зависимостью удельного сопротивления золота от температуры (см. дополнительные материалы, рис. S1, кривая $\rho \sim T$); справа: с зависимостью Блоха–Грюнайзена с ограничением остаточного сопротивления на уровне $\rho(7\,\text{K}) \approx 10^{-11}$ Ом · м. Числа на кривых показывают температуры покоящейся пластины

соответственно, $\tau_r/\tau_d = \frac{2\lambda}{b\eta V^2}\Delta T$. В [24, 25], используя различные температурные зависимости удельного сопротивления золота в рамках модели Друде (см. дополнительные материалы) для коэффициента $\eta(V,T)$, были получены значения $\eta = 10^{-3} \div 10^{-7}$ кг/м$^2\cdot$с при $T \sim 10$ K. Отсюда следует, что $\tau_r/\tau_d \gg 1$ при $\Delta T \sim 1$ K и $V < 10^5$ м/с. Это означает, что процесс радиационного теплообмена может рассматриваться независимо от процесса тепловой диффузии, оправдывая возможность использования уравнения (10) и сценария синхронного нагрева пластин. Возможная схема измерений кинетики нагрева с использованием контролируемого вращения одной из пластин, рассматривалась в [24, 25].

Если пластины различаются по величине локальной температуры и/или по другим параметрам, то уравнение для нагрева каждой из них надо записывать по отдельности. Тогда получим систему уравнений (в первом приближении считаем, что параметры $h_{1,2}$, $\rho_{1,2}$ не зависят от температуры)

$$\begin{cases} \dfrac{dT_1}{dt} = -\dfrac{P_1(V,T_1,T_2)}{2h_1c_1(T_1)\rho_1}, \\ \dfrac{dT_2}{dt} = -\dfrac{P_2(V,T_1,T_2)}{2h_2c_2(T_2)\rho_2}, \end{cases} \tag{11}$$

где $P_1$ и $P_2$ определяются формулами (7), (8). Исследование всех возможных вариантов решения системы (11) выходит за рамки данной статьи ввиду весьма сложной интегральной зависимости правых частей от температур и других параметров. С точки зрения возможных экспериментальных измерений тепловых эффектов и, тем самым, силы трения, представляет большой интерес сценарий, при котором пластина 1 имеет постоянную температуру, поддерживаемую тепловым резервуаром, а пластина 2 нагревается, испытывая фрикционный нагрев. При $P_2(V,T_1,T_2) = 0$ будет наблюдаться стационарный режим,когда $T_1 = \text{const}$, $dT_2/dt = 0$, но $T_2$ достигает максимальных значений. Начальные значения температур $T_1$ и $T_2$ можно выбрать одинаковыми. В силу симметрии, величину максимального перегрева такой же величины можно получить и для пластины 1, если тепловой резервуар находится в тепловом контакте с подвижной пластиной. Максимальная величина разности температур $\Delta T = T_2 - T_1$ зависит от скорости $V$ и удельных сопротивлений материалов пластин. Результаты численных расчетов $\Delta T(V)$ с использованием приближения Друде для диэлектрической проницаемости и разных зависимостей $\rho(T)$ [32, 33] показаны на рис. 2, 3. В этом случае $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu(T))}$, где $\omega_p$ – плазменная частота, $\nu(T) = \omega_p^2\rho(T)/4\pi$ – частота релаксации электронов. Во всех случаях расстояние между пластинами принималось равным $a = 10$ нм, а $\omega_p = 9.03$ эВ. Как показано в [25], при $a = 10 \div 20$ нм зависимость силы трения от расстояния a (а также $P_1$ и $P_2$ вследствие (5)) близка к $1/a$. Вид функций $\Delta T(V)$ на рис. 2, 3 подтверждает выводы [23–25] о том, что движущееся тело может нагреваться, имея более высокую температуру по сравнению с покоящимся (см. также дополнительные материалы и рис. S2). Возможна и обратная ситуация с перегревом покоящегося тела.

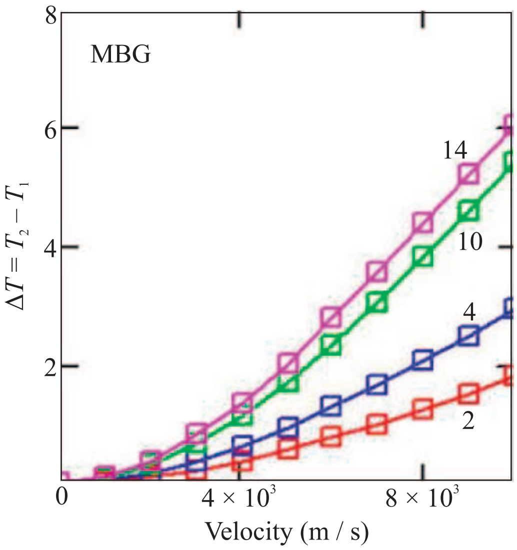


Рис. 3. (Цветной онлайн) То же, что на рис. 2 с использованием зависимости удельного сопротивления золота по модифицированной модели Блоха–Грюнайзена [33] (см. рис. S1, кружки)

Исследование одновременного обращения в нуль величин $P_1$ и $P_2$ или их суммы (т.е. возможность бездиссипативного движения) при надлежащем выборе параметров представляет отдельную важную задачу, и пока не ясно, имеет ли она вообще решение.

**Заключение.** В рамках флуктуационно-электромагнитной теории рассмотрены особенности радиационного теплообмена и силы трения Казимира–Лифшица при нерелятивистском относительном движении толстых однородных и изотропных пластин с заданными диэлектрическими и магнитными характеристиками. Результаты расчетов для пластин золота создают основу для экспериментального измерения силы трения Казимира–Лифшица по избыточному нагреву движущейся или покоящейся пластины в диапазоне температур $T < 15$ К и скоростей $V \approx 1 \div 10^3$ м/с.

**Финансирование работы.** Данная работа финансировалась за счет бюджета Кабардино-Балкарского государственного университета. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

**Конфликт интересов.** Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B **51**, 793 (1948).
2. H. B. G. Casimir and D. Polder, Phys. Rev. **73**, 360 (1948).
3. Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ **29**, 94 (1955).
4. С. М. Рытов, *Теория электрических флуктуаций и теплового излучения*, Изд. АН СССР, М.(1953).
5. М. Л. Левин, С. М. Рытов, *Теория неравновесных электромагнитных флуктуаций в электродинамике*, Наука, М. (1967).
6. Ю. С. Бараш, *Силы Ван-дер-Ваальса*, Наука, М. (1988).
7. В. Г. Полевой, *Теплообмен флуктуационным электромагнитным полем*, Наука, М. (1990).
8. G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko, Physics **6**, 1072 (2024).
9. M. B. Farias, F. C. Lombardo, A. A. Soba, P. I. Villar, and R. S. Decca, npj Quantum Inf. **6**, 25 (2020).
10. F. C. Lombardo, R. S. Decca, L. Viotti, and P. I. Villar, Adv. Quant. Technol. **4**, 2000155 (2021).
11. D. Reiche, F.Intravaia, and K. Busch, APL Photonics **7**, 030902 (2022).
12. N. M. Myers, O. Abah, and S. Deffner, AVS Quantum Sci. **4**, 027101 (2022).
13. I. Brevik, B. Shapiro, and M. Silveirinha, Int. J. Mod. Phys. A **37**, 2241012 (2022).
14. D. Oue, K. Ding, and J. B. Pendry, Phys. Rev. A **107**, 063501 (2023).
15. Y.-Ch. Hao, Y. Zhang, and H.-L. Yi, Phys. Rev. B **108**, 125431 (2023).
16. K. A. Milton, X. Guo, G. Kennedy, N. Pourtolami, and D. M. DelCol, Phys. Rev. A **108**, 022809 (2023).
17. L. Ge, Phys. Rev. B **108**, 045406 (2023).
18. K. A. Milton, N. Pourtolami, and G. Kennedy, Phys. Rev. A **110**, 042814 (2024).
19. J. E. Vasquez-Lozano and I. Liberal, ACS Appl. Opt. Mater. **2**, 8908 (2024).
20. В. Г. Полевой, ЖЭТФ **98**, 1990 (1990).
21. G. Barton, Ann. Phys. **245**, 361 (1996).
22. Г. В. Дедков, Письма в ЖЭТФ **114**, 713 (2021).
23. G. V. Dedkov, Appl. Phys. Lett. **121**, 231603 (2022).
24. Г. В. Дедков, Письма в ЖЭТФ **117**, 950 (2023).
25. G. V. Dedkov, Physics **6**, 13(2024).
26. G. V. Dedkov and A. A. Kyasov, Chin. Phys. **56**, 3002 (2018).
27. М. Л. Левин, В. Г. Полевой, С. М. Рытов, ЖЭТФ **52**(6), 1054 (1980).
28. J. B. Pendry, J. Phys. C: Condens. Matter **9**, 10301 (1997).
29. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, Rev. Mod. Phys. **79**, 1291 (2007).
30. J. S. Høye, I. Brevik, and K. A. Milton, Symmetry **8**, 29 (2016).
31. *Физические величины*, Справочник под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова, Энергоатомиздат, М. (1991).
32. *Handbook of Physics*, ed. by E. U. Condon and H. Odishaw, McGrow Hill, N.Y. (1967).
33. J. Baptiste, in: *The Physics Factbook*, ed. by G. Elert (2004); https://hypertextbook.com/facts/2004/JennelleBaptiste.shtml (accessed on 25 November 2023).