Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 4, с. 273 – 278

Светло-темный параметрический пространственно-временной солитон

С. В. Сазонов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 декабря 2024 г.
После переработки 16 декабря 2024 г.
Принята к публикации 17 декабря 2024 г.

Теоретически продемонстрирована возможность формирования светло-темного пространственно-временного солитона в режиме генерации второй гармоники при нормальной дисперсии групповой скорости на основной частоте и отсутствии таковой на частоте второй гармоники. Относительно времени и координаты в направлении распространения данный объект имеет вид темного двухчастотного солитона. По отношению же к поперечным (пространственным) координатам рассмотренный солитон является светлым.

DOI: 10.31857/S0370274X25020185, EDN: CQKZVB

Введение. Пространственные параметрические солитоны были предсказаны в работе [1]. Такие солитоны формируются в квадратично-нелинейных средах и представляют собой связанные состояния локализованных в поперечных направлениях лазерных пучков на основной частоте ω и на частоте 2ω второй гармоники. Механизм формирования здесь связан с компенсацией процесса поперечной самофокусировки дифракционным уширением пучка.

Временные параметрические (двухчастотные) солитоны рассматривались во многих работах (см. [2] и цитируемую там литературу). Такие солитоны представляют собой лазерные импульсы короткой временной длительности в направлении распространения. Здесь нелинейное самосжатие импульса компенсируется его продольным расплыванием за счет дисперсии групповой скорости (ДГС).

Аналитические решения для временных солитонов удается получить только в некоторых частных случаях. Например, это можно сделать при отсутствии ДГС на частоте второй гармоники [2]. Также аналитическому анализу поддается случай, когда абсолютное значение коэффициента ДГС на частоте второй гармоники в два раза превосходит соответствующее значение на основной частоте [3].

Возможность формирования параметрических пространственно-временных солитонов (ПВС), называемых иначе двухчастотными световыми пулями, была ранее исследована в работах [3–11]. Такие солитоны являются локализованными во всех направлениях устойчивыми сгустками световой энергии, способными распространяться на большие расстояния. Для их формирования необходимо наличие фокусирующей нелинейности наряду с существенным влиянием дифракции и аномальной ДГС. В случае одночастотных ПВС [12] фокусирующая керровская нелинейность должна быть дополнена нелинейностью, ослабляющей режим самофокусировки [13–16]. Условия для возможности формирования ПВС при керровской нелинейности могут быть созданы в фокусирующих градиентных волноводах [17–21].

Для формирования параметрических ПВС достаточно только квадратичной оптической нелинейности при условии, что соответствующие нелинейные восприимчивости должны быть одного знака на обеих частотах [22].

Возвращаясь к временным солитонам, отметим, что они бывают светлыми и темными [13]. В первом случае яркий локализованный импульс света распространяется на темном фоне нелинейного диэлектрика. Во втором же случае имеем аналогичное распространение локализованного провала световой интенсивности. В центре темного временного солитона интенсивность равна нулю и стремится к определенному постоянному значению у периферийных областей.

Возможность формирования ПВС в режиме генерации второй гармоники при условии его темной структуры на обеих частотах вдоль направления распространения, по-видимому, ранее не рассматрива-

[1)]e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

лась. Аналитическому исследованию данного вопроса посвящена настоящая работа.

Исходные уравнения и темные временные солитоны. Пусть импульсы на обеих несущих частотах распространяются вдоль оси z, перпендикулярно к оптической оси одноосного кристалла. Тогда уравнения для комплексных огибающих ψ_1 и ψ_2 электрического поля импульса на основной частоте и на частоте второй гармоники соответственно имеют вид

$$i\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = -\frac{\beta}{2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau^2} + \alpha_1\psi_1^*\psi_2 + \frac{c}{2n\omega}\Delta_\perp\psi_1, \tag{1}$$

$$i\frac{\partial\psi_2}{\partial z} = \alpha_2\psi_1^2 + \frac{c}{4n\omega}\Delta_\perp\psi_2. \tag{2}$$

Здесь $\beta = \partial v_g^{-1}/\partial\omega$ – параметр ДГС на основной частоте, c – скорость света в вакууме, $\alpha_1 = 2\pi\omega\chi_1^{(2)}/cn$, $\alpha_2 = 4\pi\omega\chi_2^{(2)}/cn$, $\chi_1^{(2)}$ и $\chi_2^{(2)}$ – нелинейные восприимчивости второго порядка на основной частоте и на частоте второй гармоники соответственно; $\Delta_\perp$ – поперечный лапласиан, $\tau = t - z/v_g$, t – время, v_g и n – линейная групповая скорость и линейный показатель преломления соответственно, одинаковые для обеих частот (для простоты принято, что выполнены условия фазового и группового синхронизмов).

Следуя [2, 22], мы приняли, что параметр ДГС на частоте второй гармоники равен нулю.

В работах [2, 22] рассматривались светлые временные солитоны системы (1), (2). Однако нетрудно видеть, что данная система при $\Delta_\perp\psi_1 = \Delta_\perp\psi_2 = 0$ обладает также решениями в виде темных солитонов вида

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sqrt{\frac{2}{\alpha_1\alpha_2}}\frac{|\beta|}{\tau_p^2}e^{-i\beta z/\tau_p^2}\tanh\frac{\tau}{\tau_p},\\ \psi_2 &= \frac{\beta}{\alpha_1\tau_p^2}e^{-2i\beta z/\tau_p^2}\tanh^2\frac{\tau}{\tau_p},\end{aligned} \tag{3}$$

где τ_p – свободный параметр, имеющий смысл временной длительности провала интенсивности темного солитона.

Решение (3) представляет собой двухчастотный временной солитон, распространяющийся в связанном режиме вдоль оси z с линейной групповой скоростью v_g.

Пространственно-временной солитон. Теперь рассмотрим случай $\Delta_\perp\psi_1,\ \Delta_\perp\psi_2 \neq 0$. Для этого используем метод усредненного лагранжиана Ритца–Уизема [23–26].

Системе (1), (2) соответствует плотность лагранжиана

$$L = L_1 + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}L_2 + L_{\text{int}}, \tag{4}$$

где

$$L_1 = \frac{i}{2}\left(\psi_1^*\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \psi_1\frac{\partial\psi_1^*}{\partial z}\right) - \frac{\beta}{2}\left|\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau}\right|^2 + \frac{c}{2n\omega}|\nabla_\perp\psi_1|^2, \tag{5}$$

$$L_2 = \frac{i}{2}\left(\psi_2^*\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - \psi_2\frac{\partial\psi_2^*}{\partial z}\right), \tag{6}$$

$$L_{\text{int}} = -\frac{\alpha_1}{2}(\psi_1^{*2}\psi_2 + \psi_1^2\psi_2^*), \tag{7}$$

$\nabla_\perp$ – поперечный градиент.

Отталкиваясь от выражений (3), выберем пробные решения системы (1), (2) в виде

$$\begin{aligned}\psi_1 &= |\beta|\sqrt{\frac{2}{\alpha_1\alpha_2}}\rho^{2/3}e^{-in\omega\varphi/c}\tanh(\rho^{1/3}\tau),\\ \psi_2 &= \frac{\beta}{\alpha_1}\rho^{2/3}e^{-2in\omega\varphi/c}\tanh^2(\rho^{1/3}\tau),\end{aligned} \tag{8}$$

где переменные ρ и φ являются функциями координат.

Теперь в соответствии с методом усредненного лагранжиана пробные решения (8) следует подставить в (4)–(7) и проинтегрировать в неограниченных пределах по бегущему времени τ. Однако мы столкнемся с расходящимися интегралами $\int_{-\infty}^{+\infty}\tanh^2\zeta d\zeta$ и $\int_{-\infty}^{+\infty}\tanh^4\zeta d\zeta$. В этих случаях правомерны замены [26] $\tanh^2\zeta = 1 - \text{sech}^2\zeta \to -\text{sech}^2\zeta$, $\tanh^4\zeta \to -2\text{sech}^2\zeta + \text{sech}^4\zeta$. Обоснование данного приема содержится в [26]. С помощью данной замены мы отбрасываем светлый фон и учитываем динамику в направлении распространения провала интенсивности в темном солитоне.

Учитывая сказанное выше, придем к усредненному лагранжиану вида

$$\begin{aligned}\Lambda = \rho\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \rho\frac{(\nabla_\perp\varphi)^2}{2} - \frac{3c}{5n\omega}\beta\rho^{5/3} +\\ + \left(8 - \frac{11\pi^2}{60}\right)\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2\frac{(\nabla_\perp\rho)^2}{10\rho},\end{aligned} \tag{9}$$

определенному как $\Lambda \equiv -\frac{3c}{20n\omega}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Ld\tau$.

Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа имеют формальный вид уравнений двумерного течения квантовой бозе-жидкости, в которых роль времени играет координата z [27]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial z} + \nabla_\perp(\rho\nabla_\perp\varphi) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{(\nabla_\perp\varphi)^2}{2} - \frac{c}{n\omega}\beta\rho^{2/3} = g\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2\frac{\Delta_\perp\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}, \tag{11}$$

где $g = (32 - 11\pi^2/15)/10 \approx 2.4762$.

В одномерном случае, когда искомые переменные ρ и φ зависят только от координаты z, система (10), (11) обладает решением $\rho = 1/\tau_p^3 = \text{const}$, $\varphi = c\beta z/(n\omega\tau_p^2)$. Подставляя данные выражения в (8), приходим к точному совпадению пробных решений с временными солитонами (3). Это обстоятельство является важным аргументом в пользу применяемого здесь подхода.

Нетрудно видеть [3, 19], что система (10), (11) эквивалентна модифицированному нелинейному уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\sqrt{2g}\frac{c}{2n\omega}\Delta_\perp\Phi - \frac{\beta}{\sqrt{2g}}|\Phi|^{4/3}\Phi, \tag{12}$$

где комплексная функция Φ связана с ρ и φ преобразованием Маделунга

$$\Phi = \sqrt{\rho}\exp\left(i\frac{n\omega}{\sqrt{2g}c}\varphi\right). \tag{13}$$

В планарном случае ($\Delta_\perp\Phi = \partial^2\Phi/\partial x^2$, где x – координата, поперечная к оси z) уравнение (12) имеет точное локализованное решение вида

$$\Phi = \left(\frac{15gc}{16n\omega\beta R_0^2}\right)^{3/4} e^{i\kappa z}\text{sech}^{3/2}\left(\frac{x}{2R_0}\right), \quad \kappa = \frac{9\sqrt{2g}}{32}\frac{c}{n\omega R_0^2}, \tag{14}$$

где R_0 – свободный параметр, смысл которого станет ясным чуть ниже.

Отсюда, а также из (8) и (13) находим приближенные решения системы (10), (11) в виде планарных ПВС

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{\alpha_1\alpha_2}\frac{|\beta|}{\tau_0^2}}e^{iqz}F_\perp^2\tanh\left(\frac{\tau}{\tau_0}F_\perp\right), \tag{15}$$

$$\psi_2 = \frac{\beta}{\alpha_1\tau_0^2}e^{-2iqz}F_\perp^2\tanh\left(\frac{\tau}{\tau_0}F_\perp\right), \tag{16}$$

где

$$F_\perp = \text{sech}\left(\frac{x}{2R_0}\right), \tag{17}$$

τ_0 – длительность импульса в центре поперечного сечения планарного ПВС, связанная с его поперечным размером R_0 и постоянной q фазового набега соотношениями

$$R_0 = \mu\sqrt{\frac{\lambda}{n\beta}}\tau_0, \quad q = \frac{3\beta}{5\tau_0^2}, \tag{18}$$

$\lambda = 2\pi c/\omega$ – длина волны, соответствующая частоте первой гармоники, $\mu = 0.61$.

В реальных ситуациях лазерные импульсы являются трехмерными. Для этого случая будем искать решения системы (10), (11), соответствующие аксиально-симметричному относительно оси z распределению интенсивности локализованных импульсов. Данной ситуации соответствует следующее точное решение уравнения непрерывности (10) [28]:

$$\rho = \frac{1}{\tau_0^3}\frac{R_0^2}{R^2}e^{-3r^2/2R^2}, \quad \varphi = f(z) + \frac{r^2}{2R}\frac{dR}{dz}. \tag{19}$$

Здесь r – расстояние от оси симметрии лазерного импульса до точки наблюдения, R – зависящий от дистанции распространения z поперечный радиус (апертура) импульса, $f(z)$ – подлежащая определению функция, смысл параметров τ_0 и R_0 такой же, как и в случае планарного ПВС.

При подстановке (19) в (11) в левой части используем приосевое приближение [29], согласно которому $e^{-r^2/R^2} \approx 1 - r^2/R^2$. После этого, приравнивая друг другу в левой и правой частях коэффициенты при r^0 и r^2, будем иметь

$$\frac{df}{dz} = \frac{c}{n\omega}\frac{\beta}{\tau_0^2}\frac{R_0^{4/3}}{R^{4/3}} - \frac{3g}{2}\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2\frac{1}{R^2}, \tag{20}$$

$$\frac{d^2R}{dz^2} = -\frac{2c}{n\omega}\frac{\beta}{\tau_0^2}\frac{R_0^{4/3}}{R^{7/3}} + \frac{9g}{2}\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2\frac{1}{R^3} = -\frac{\partial U}{\partial R}. \tag{21}$$

Уравнение (21) формально совпадает с уравнением движения ньютоновской частицы единичной массы в поле с потенциальной энергией $U(R)$. Положению устойчивого равновесия при $R = R_0$ соответствует минимум потенциальной энергии:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{R=R_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)_{R=R_0} > 0.$$

Отсюда, а также из (8), (19), (20) и (21) приходим к решениям вида (15), (16) и соотношениям (18), где теперь $\mu = 0.94$ и

$$F_\perp = \exp\left(-\frac{r^2}{2R_0^2}\right). \tag{22}$$

Из (15)–(17) и (22) видно, что обе частотные компоненты ПВС обладают свойством темного солитона по отношению к бегущему времени τ. В то же время, по отношению к поперечным координатам обсуждаемые компоненты представляют собой светлый солитон (рис. 1). По этой причине данное двухчастотное локализованное образование можно назвать светло-темным параметрическим ПВС.

Из первого соотношения (18) приходим к выводу, что светло-темный ПВС формируется при нормальной ДГС: $\beta > 0$. Из (21) легко видеть, что именно при

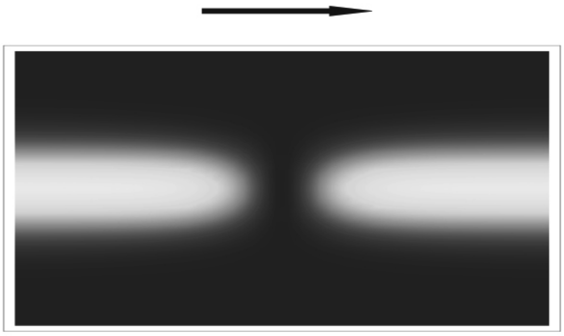

Рис. 1. Схематическое изображение профиля интенсивности компоненты светло-темного ПВС на основной частоте. Профиль интенсивности компоненты светло-темного ПВС на частоте второй гармоники имеет качественно аналогичный вид. Центры темных провалов на обеих частотах, совпадая друг с другом, распространяются в связанном режиме вдоль светлого двухчастотного лазерного луча с линейной групповой скоростью. Направление распространения указано стрелкой вверху

этом условии функция $U(R)$ имеет локальный минимум, что обеспечивает устойчивость данного ПВС по отношению к малым возмущениям его параметров.

Физический механизм формирования светло-темного двухчастотного ПВС вполне ясен. Темные временные солитоны при фокусирующей нелинейности формируются в случае нормальной (положительной) ДГС [13, 30]. В то же время фокусирующая квадратичная нелинейность компенсируется поперечной дифракционной расходимостью лазерного пучка [1].

Временная длительность τ_0 движущегося со скоростью v_g провала интенсивности выступает здесь в качестве свободного параметра. Как видно из (15)–(18) и (22), поперечный размер R_0 солитона, амплитуды обеих компонент и нелинейный фазовый набег qz выражаются через эту длительность.

Выражения (15)–(17) и (22) показывают также, что временная длительность провала интенсивности на обеих частотах увеличивается с удалением от центральной оси ПВС по закону $\sim F_\perp^{-1}$. В то же время амплитуды ПВС при удалении от этой оси уменьшаются как $\sim F_\perp^2$. Данное обстоятельство представляется вполне естественным. Оно соответствует тому, что временная длительность солитона в его продольных сечениях, параллельных оси распространения, растет с уменьшением амплитуды в этих сечениях. Мы предполагаем, что это правило, справедливое для временных солитонов, остается в силе и в случае пространственно-временных локализованных объектов. Данное предположение отражено в пробных решениях (8), которые выбирались, в частности, исходя из замены $1/\tau_p \to \rho^{1/3}$ в выражениях (3).

Кратко обсудим возможность экспериментального наблюдения светло-темного параметрического ПВС. Условие отсутствия ДГС второго порядка может быть реализовано в ближнем инфракрасном диапазоне. В наших условиях это должно выполняться на частоте второй гармоники. Если при этом взять, например, кристалл KDP, характеризуемый значительной квадратичной восприимчивостью, то тогда на основной частоте ДГС должна быть аномальной [31]. Это не удовлетворяет основному условию $\beta > 0$ формирования светло-темного параметрического ПВС. В случае нормальной ДГС на основной частоте в этих же кристаллах на частоте второй гармоники имеем значительно большее положительное значение ДГС. Таким образом, в ближнем инфракрасном диапазоне ДГС, как правило, монотонно возрастает с увеличением частоты. Данная ситуация типична для многих природных кристаллов. По всей видимости, для экспериментального наблюдения светло-темного параметрического ПВС следует использовать метаматериалы с соответствующими параметрами дисперсии. Взяв для предполагаемого метаматериала в ближнем инфракрасном диапазоне $\lambda \sim 1$ мкм, $|\beta| \sim 10^{-28}\,\text{с}^2/\text{см}$, $\chi_{1,2}^{(2)} \sim 10^{-9}$ СГСЭ и полагая, что длительность временного провала $\tau_0 \sim 10^{-13}$ с, из (18) будем иметь $R_0 \sim 1$ мм. Для интенсивностей $I_{1,2}$ обеих компонент вдали от темного временного провала найдем

$$I_{1,2} \approx \frac{c}{2\pi}|\psi_{1,2}|^2 \sim \frac{c\beta^2\lambda^2}{(2\pi)^5\chi_{1,2}^{(2)2}\tau_0^4} \sim 10^6\,\text{Вт/см}^2.$$

Приведенные здесь численные оценки вполне достижимы в экспериментальных условиях.

Заключительные замечания. Рассмотренный здесь ПВС можно рассматривать как непрерывный двухчастотный лазерный луч, вдоль которого распространяется темное пятно провала интенсивности на обеих компонентах. Именно наличие этого движущегося темного пятна принципиальным образом отличает данный солитон от пространственного параметрического солитона, предсказанного в работе [1]. Важно отметить также, что для формирования ПВС (15), (17), (18) существенное значение имеет знак ДГС: $\beta > 0$ (см. (15)). Данное обстоятельство лишний раз подчеркивает нестационарный характер рассмотренного здесь светло-темного ПВС. В этом же состоит принципиальное отличие рассмотренного здесь светло-темного солитона от сугубо светлого параметрического ПВС, который формируется при $\beta < 0$. Для формирования сугубо пространственного параметрического солитона, предсказанного в работе [1], знак ДГС не имеет значения.

Здесь мы рассмотрели ситуацию, при которой ДГС на частоте второй гармоники отсутствует. В этой связи представляет интерес отдельное исследование возможности формирования светло-темного ПВС при наличии нормальной или аномальной ДГС на частоте второй гармоники.

В настоящей работе мы исследовали случай, когда выполнены условия фазового и группового синхронизмов, что в экспериментальных условиях осуществить крайне проблематично. Принципиальных трудностей для учета фазовой отстройки здесь нет. В этом случае с помощью известного фазового преобразования система (1), (2), дополненная явно зависящими от координаты z множителями при нелинейных слагаемых, может быть преобразована в другую автономную систему [32], допускающую аналитическое исследование. Правда, здесь с неизбежностью математические выкладки окажутся значительно более громоздкими. В частности, связь между временной длительностью провала интенсивности и амплитудами компонент солитона окажется боле сложной, чем в случае рассмотренной здесь нулевой фазовой отстройки. Это с технической точки зрения существенно усложнит аналитическое исследование при учете поперечной (пространственной) динамики. Возможно, здесь естественным образом возникнут некоторые ограничения на такие параметры солитона, как временная длительность, поперечный размер и амплитуда. В дальнейшем мы планируем провести соответствующие аналитические исследования, дополнив их учетом влияния изгибных возмущений на основе численных экспериментов.

Использованное здесь предположение об отсутствии фазового и группового рассогласований позволило нам выявить принципиальную возможность формирования светло-темного ПВС. В дальнейшем представляет интерес исследовать такую возможность при наличии данных рассогласований, что приблизит теоретическое исследование к условиям реального эксперимента.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств государственного задания Национального исследовательского центра “Курчатовский институт”.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

---

1. Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, Письма в ЖЭТФ **20**, 734 (1974) [Yu. N. Karamzin and A. P. Sukhorukov, JETP Lett. **20**, 339 (1974)].
2. А. П. Сухоруков, *Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике*, Наука, М. (1988), 231 с.
3. S. V. Sazonov, M. S. Mamaikin, M. V. Komissarova, and I. G. Zakharova, Phys. Rev. E **96**, 022208 (2017).
4. A. A. Kanashov and A. M. Rubenchik, Physica D **4**, 122 (1981).
5. X. Liu, L. J. Qian, and F. W. Wise, Phys. Rev. Lett. **82**, 4631 (1999).
6. X. Liu, K. Beckwitt, and F. Wise, Phys. Rev. E **62**, 1328 (2000).
7. R. Šuminas, G. Tamosauskas, G. Valiulis, and A. Dubietis, Opt. Lett. **41**, 2097 (2016).
8. H. Leblond, D. Kremer, and D. Mihalache, Phys. Rev. A **80**, 053812 (2009).
9. D. Mihalache, D. Mazilu, L.-C. Crasovan, L. Torner, B. A. Malomed, and F. Lederer, Phys. Rev. E **62**, 7340 (2000).
10. P. Y. P. Chen and B. A. Malomed, Opt. Commun. **282**, 3804 (2009).
11. B. A. Malomed, P. Drummond, H. He, A. Berntson, D. Anderson, and M. Lisak, Phys. Rev. E **56**, 4725 (1997).
12. Y. Silberberg, Opt. Lett. **15**, 1282 (1990).
13. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, М. (2005) [Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, N.Y. (2003)].
14. А. Е. Дормидонов, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, В. П. Кандидов, Письма в ЖЭТФ **104**, 173 (2016) [A. E. Dormidonov, V. O. Kompanets, S. V. Chekalin, and V. P. Kandidov, JETP Lett. **104**, 175 (2016)].
15. В. П. Кандидов, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, Письма в ЖЭТФ **108**, 307 (2018) [V. P. Kandidov, V. O. Kompanets, and S. V. Chekalin, JETP Lett. **108**, 287 (2018)].
16. С. В. Чекалин, В. О. Компанец, А. Е. Дормидонов, В. П. Кандидов, УФН **189**, 299 (2019) [S. V. Chekalin, V. O. Kompanets, A. E. Dormidonov, and V. P. Kandidov, Phys.-Uspekhi **62**, 282 (2019)].
17. S.-S. Yu, C.-H. Chien, Y. Lai, and J. Wang, Opt. Commun. **119**, 167 (1995).
18. O. V. Shtyrina, M. P. Fedoruk, Yu. S. Kivshar, and S. K. Turitsyn, Phys. Rev. A **97**, 013841 (2018).
19. S. V. Sazonov, Phys. Rev. A **100**, 043828 (2019).
20. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **117**, 292 (2023) [V. P. Ruban, JETP Lett. **117**, 292 (2023)].
21. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **119**, 579 (2024) [V. P. Ruban, JETP Lett. **119**, 585 (2024)].
22. С. В. Сазонов, М. В. Комисарова, Письма в ЖЭТФ **111**, 355 (2020) [S. V. Sazonov and M. V. Komissarova, JETP Lett. **111**, 320 (2020)].

23. D. Anderson, Phys. Rev. A **27**, 3135 (1983).
24. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, ЖЭТФ **92**, 1612 (1987) [S. K. Zhdanov and B. A. Trubnikov, Sov. Phys. JETP **65**, 904 (1987)].
25. D. Anderson, M. Desaix, M. Lisak, and M. L. Quorida-Teixeiro, J. Opt. Soc. Am. B **9**, 1358 (1992).
26. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **125**, 1409 (2004) [S. V. Sazonov, JETP **98**, 1237 (2004)].
27. Д. Р. Тилли, Дж. Тилли, *Сверхтекучесть и сверхпроводимость*, Мир, М. (1977) [D. R. Tilley and J. Tilley, *Superfluidity and Superconductivity*, Van Nostrand Reinhold, N.Y. (1974)].
28. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Физматлит, М. (2001), 496 с.
29. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН **93**, 19 (1967) [S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov, and R. V. Khokhlov, Sov. Phys.-Uspekhi **10**, 609 (1968)].
30. Г. Агравал, *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, М. (1996) [G. P. Agrawal, Nonlinear Fiber Optics, Academic Press, N.Y. (1989)].
31. F. Zernike, Jr, J. Opt. Soc. Am. **54**, 1215 (1964).
32. D. Mihalache, D. Mazilu, L.-C. Crasovan, I. Towers, B. A. Malomed, A. V. Buryak, and F. Lederer, L. Torner, and F. Lederer, Phys. Rev. E **66**, 016613 (2002).