Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 5, с. 340 – 343 © 2025 г. 10 марта

Общее выражение для трехпетлевых $\boldsymbol{\beta}$-функций для многозарядных $\boldsymbol{\mathcal{N}=1}$ суперсимметричных теорий, регуляризованных высшими ковариантными производными

О. В. Ханейчук[1)]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 января 2025 г.
После переработки 16 января 2025 г.
Принята к публикации 26 января 2025 г.

Для $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных теорий с несколькими калибровочными константами связи, регуляризованных высшими ковариантными производными, получено общее выражение для трехпетлевых калибровочных β-функций. Для этого с использованием общих утверждений о справедливости соотношений Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова (NSVZ) строится результат для β-функций, определенных в терминах голых констант связи. Показано, что в частном случае Минимальной Суперсимметричной Стандартной Модели (МССМ) из него в точности воспроизводятся известные выражения, найденные ранее другим способом. Для случая, когда юкавские константы связи отсутствуют, аналогичные выражения для трехпетлевых β-функций также получены в терминах перенормированных констант связи в произвольной схеме вычитаний, и в частности в $\overline{\text{DR}}$–схеме.

DOI: 10.31857/S0370274X25030022, EDN: PSDBKS

В физике элементарных частиц достаточно давно исследуется предположение о том, что Стандартная Модель является низкоэнергетическим пределом некой теории Великого объединения с более широкой группой симметрии, включающей группу Стандартной Модели как подгруппу. В соответствии с этим предположением, на масштабе объединения все три калибровочные константы связи Стандартной модели должны принимать одинаковое значение. В Стандартной модели такой масштаб отсутствует, однако в ее $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных расширениях, благодаря присутствию суперпартнеров, объединение констант связи реально происходит [1–3]. При этом интересной особенностью $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных калибровочных теорий является наличие связи между эволюцией калибровочных констант связи, определяемой соответствующими β-функциями, и перенормировкой суперполей материи. В случае, когда калибровочная группа является прямым произведением n подгрупп G_K, каждая из которых либо простая, либо $U(1)$,

$$G=\prod_K G_K = G_1\times G_2\times\ldots\times G_n, \qquad (1)$$

имеется n калибровочных констант связи α_K и, стало быть, n калибровочных β-функций. В наших обозначениях большие латинские буквы нумеруют подгруппы калибровочной группы.

Константы перенормировки суперполей материи Z определяются формулой $\phi=\sqrt{Z}\phi_R$, где ϕ_R обозначает перенормированное суперполе. На основе констант перенормировки строятся соответствующие аномальные размерности. Их можно определять как в терминах голых калибровочных и юкавских констант связи α_0 и λ_0, так и в терминах перенормированных констант связи α и λ. В терминах голых констант связи калибровочные β-функции и аномальные размерности определяются сооответственно следующим образом:

$$\beta_K(\alpha_0,\lambda_0)\equiv \frac{d\alpha_{0K}}{d\ln\Lambda}\bigg|_{\alpha,\lambda=\text{const}}, \qquad (2)$$

$$\gamma(\alpha_0,\lambda_0)\equiv -\frac{d\ln Z}{d\ln\Lambda}\bigg|_{\alpha,\lambda=\text{const}}, \qquad (3)$$

где параметр регуляризации Λ фактически является масштабом ультрафиолетового обрезания. Ренормгрупповые функции (РГФ) (2) и (3) зависят от параметров регуляризации, но не зависят от схемы вычитаний. Однако чаще используются β-функции и аномальные размерности, определенные в терминах перенормированных констант связи:

$$\widetilde{\beta}_K(\alpha,\lambda)\equiv \frac{d\alpha_K}{d\ln\mu}\bigg|_{\alpha_0,\lambda_0=\text{const}}, \qquad (4)$$

1)e-mail: oleshan91@gmail.com

$$\widetilde{\gamma}(\alpha,\lambda) \equiv \frac{d\ln Z}{d\ln\mu}\bigg|_{\alpha_0,\lambda_0=\text{const}}, \qquad (5)$$

где μ – точка нормировки. β-функции (4) и аномальные размерности (5) зависят и от регуляризации, и от перенормировочного предписания. Об этом свойстве важно помнить, поскольку оно отражается на выполнении важных соотношений, присущих $\mathcal{N}=1$ суперсимметричным теориям и известных как соотношения Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова (Novikov–Shifman–Vainshtein–Zakharov – NSVZ) [4–7]. Эти соотношения выражают β-функции через аномальные размерности суперполей материи, найденные во всех предыдущих петлях. Таким образом возможно производить вычисление β-функций на основе вычисления аномальных размерностей суперполей материи в более низких порядках теории возмущений. Для этого важно использовать такое перенормировочное предписание, при котором соотношения NSVZ справедливы. Например, они выполняются во всех порядках, если теория регуляризована высшими ковариантными производными [8, 9] и РГФ определены в терминах голых констант связи [10, 11]. Существуют перенормировочные предписания, при которых соотношения NSVZ остаются верными и для РГФ, определенных в терминах перенормированных констант связи. К ним относится, например, схема $\mathrm{HD}+\mathrm{MSL}$, в которой теория регуляризуется высшими ковариантными производными, а перенормировка констант связи и суперполей материи включает только степени $\ln\Lambda/\mu$. Наиболее широко в суперсимметричных теориях, однако, применяется $\overline{\mathrm{DR}}$–схема [12], для которой формулы NSVZ не справедливы в тех порядках теории возмущений, где проявляется схемная зависимость, но могут быть восстановлены с помощью специально подобранной конечной перенормировки [13, 14]. Здесь мы будем использовать регуляризацию высшими ковариантными производными, позволяющую избежать указанных сложностей. При этом следует отметить, что простое добавление слагаемого с высшими ковариантныи производными не устраняет расходимости в однопетлевом приближении. Поэтому рассматриваемая регуляризация также включает в себя добавление детерминантов Паули–Вилларса [15], которые сокращают расходимости, возникающие от однопетлевых диаграмм. Однопетлевые расходимости от калибровочных полей и духов устраняются путем введения суперполей Паули–Вилларса $\varphi_{1,K}$, $\varphi_{2,K}$, $\varphi_{3,K}$ с массами $M_{\varphi,K} = a_{\varphi,K}\Lambda$, а расходимости, появляющиеся от однопетлевых диаграмм суперполей материи – путем введения суперполей Паули–Вилларса с массами $M_K = a_K\Lambda$.

Соотношения NSVZ справедливы и для теорий с несколькими калибровочными константами связи [16]. В этом случае соотношения NSVZ можно записать в виде [17]

$$\frac{\beta_K(\alpha_0,\lambda_0)}{\alpha_{0K}{}^2} = -\frac{1}{2\pi(1-C_2(G_K)\alpha_{0K}/2\pi)}\times \\ \times\Big[3C_2(G_K) - \sum_a T_{aK}(1-\gamma_a{}^a(\alpha_0,\lambda_0))\Big], \qquad (6)$$

где индекс a нумерует суперполя материи ϕ_a, лежащие в неприводимых представлениях R_{aK} простых подгрупп G_K и имеющие заряды q_{aK} по отношению к подгруппам $U(1)$. Полный набор индексов у суперполей материи можно представить в виде $(a; i_1, i_2, \ldots, i_n) \equiv (a; i_a)$. Аномальные размерности суперполей ϕ_a мы обозначаем через $\gamma_a{}^b$, а групповые множители определяем равенствами

$$C_2(G_K)\delta^{A_K B_K} = f^{A_K C_K D_K} f^{B_K C_K D_K};$$
$$T_K(R_{aK})\delta^{A_K B_K} = (T_a^{A_K} T_a^{B_K})_{i_K}{}^{i_K}; \qquad (7)$$

$$T_{aK} = \\ = \begin{cases} \delta_{i_1}{}^{i_1}\ldots\delta_{i_{K-1}}{}^{i_{K-1}} T_K(R_{ak})\delta_{i_{K+1}}{}^{i_{K+1}}\ldots\delta_{i_n}{}^{i_n}, \\ \qquad\qquad \text{если } G_K \text{ — простая;} \\ \delta_{i_1}{}^{i_1}\ldots\delta_{i_{K-1}}{}^{i_{K-1}} q_{aK}^2 \delta_{i_{K+1}}{}^{i_{K+1}}\ldots\delta_{i_n}{}^{i_n}, \\ \qquad\qquad \text{если } G_K = U(1), \end{cases}$$

где $T_a^{A_K}$ для простых подгрупп G_K являются генераторами в том представлении, в котором лежат суперполя ϕ_a, а для подгрупп $U(1)$ являются соответствующими зарядами q_a.

В случае использования регуляризации высшими ковариантными производными соотношения (6) могут быть использованы для нахождения L-петлевых калибровочных β-функций в $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных теориях с несколькими константами связи, выраженных в терминах голых констант связи. Для этого необходимо знать общее выражение для аномальных размерностей суперполей материи $\gamma_a{}^b(\alpha_0,\lambda_0)$ во всех предыдущих порядках. Для $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с простой калибровочной группой общее выражение для $\gamma_a{}^b$ в двухпетлевом приближении было найдено в работе [18]. В работе [19] эта формула была обобщена на случай теорий с несколькими константами связи, регуляризованных высшими ковариантными производными,

$$\gamma_a{}^b(\alpha_0,\lambda_0) \equiv -\frac{d\ln Z_a{}^b}{d\ln\Lambda}\Big|_{\alpha,\lambda=\text{const}} =$$
$$= -\sum_K \frac{\alpha_{0K}}{\pi} C(R_{aK})\delta_a{}^b + \frac{1}{4\pi^2}(\lambda_0^*\lambda_0)_a{}^b +$$
$$+ \sum_{KL} \frac{\alpha_{0K}\alpha_{0L}}{2\pi^2} C(R_{aK})C(R_{aL})\delta_a{}^b -$$
$$- \sum_K \frac{\alpha_{0K}^2}{2\pi^2} C(R_{aK})\Big[3C_2(G_K)\ln a_{\varphi,K} - \sum_c T_{cK}\ln a_K -$$
$$- Q_K\Big(1+\frac{A}{2}\Big)\Big]\delta_a{}^b - \sum_K \frac{\alpha_{0K}}{8\pi^3}(\lambda_0^*\lambda_0)_a{}^b C(R_{aK}) \times$$
$$\times \Big(1 - B + A\Big) + \sum_K \frac{\alpha_{0K}}{4\pi^3}(\lambda_0^* C_K\lambda_0)_a{}^b\Big(1 + B - A\Big) -$$
$$- \frac{1}{16\pi^4}(\lambda_0^*[\lambda_0^*\lambda_0]\lambda_0)_a{}^b + O\Big(\alpha_0^3,\alpha_0^2\lambda_0^2,\alpha_0\lambda_0^4,\lambda_0^6\Big), \qquad (8)$$

где $Q_K = \sum\limits_a T_{aK} - 3C_2(G_K)$. В этом выражении присутствуют параметры регуляризации $a_{\varphi,K}$ и a_K, являющиеся отношением масс полей Паули–Вилларса к параметру Λ, а также

$$A = \int\limits_0^\infty dx\, \ln x \frac{d}{dx}\frac{1}{R(x)};$$
$$B = \int\limits_0^\infty dx\, \ln x \frac{d}{dx}\frac{1}{F^2(x)}, \qquad (9)$$

где функции $R(x)$ и $F(x)$ определяют регуляризирующие слагаемые с высшими производными в калибровочной части действия и кинетическом слагаемом для киральных суперполей материи соответственно. Подробное описание этих вопросов можно найти в работе [17]. Также в формуле (8) используются обозначения

$$C(R_{aK}) \equiv T_a^{A_K} T_a^{A_K};$$
$$(T_a^{A_K} T_a^{A_K})_{i_K}{}^{j_K} = C(R_{aK})\delta_{i_K}{}^{j_K};$$
$$(\lambda_0^*\lambda_0)_a{}^b \delta_{i_a}{}^{j_b} = \sum_{cd} \lambda^*_{0 i_a m_c n_d}\lambda_0^{j_b m_c n_d};$$
$$(\lambda_0^* C_K\lambda_0)_a{}^b \delta_{i_a}{}^{j_b} = \sum_{cd} \lambda^*_{0 i_a m_c n_d} C(R_{dK})\lambda_0^{j_b m_c n_d};$$
$$(\lambda_0^*[\lambda_0^*\lambda_0]\lambda_0)_a{}^b \delta_{i_a}{}^{j_b} = \sum_{cdefg} \lambda^*_{0 i_a k_e l_f}\lambda_0^{j_b k_e p_g} \times$$
$$\times \lambda^*_{0 p_g m_c n_d}\lambda_0^{l_f m_c n_d}. \qquad (10)$$

При используемой регуляризации в результате подстановки аномальных размерностей (8) в соотношения (6) можно получить общее выражение для трехпетлевых β-функций в многозарядных $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных теориях:

$$\frac{\beta_K(\alpha_0,\lambda_0)}{\alpha_{0K}^2} = -\frac{1}{2\pi}\Big\{ - Q_K - \frac{\alpha_{0K}}{2\pi}C_2(G_K)Q_K -$$
$$- \sum_a\sum_L \frac{\alpha_{0L}}{\pi} T_{aK} C(R_{aL}) + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{abc} T_{aK}\lambda^*_{0 i_a m_b n_c} \times$$
$$\times \lambda_0^{i_a m_b n_c} - \sum_a\sum_L \frac{\alpha_{0K}\alpha_{0L}}{2\pi^2} T_{aK} C_2(G_K) C(R_{aL}) -$$
$$- \frac{\alpha_{0K}^2}{4\pi^2} C_2^2(G_K) Q_K - \sum_a\sum_L \frac{\alpha_{0L}^2}{2\pi^2} T_{aK} C(R_{aL}) \times$$
$$\times \Big(3C_2(G_L)\ln a_{\varphi,L} - \sum_b T_{bL}\ln a_L - Q_L\Big(1+\frac{A}{2}\Big)\Big) +$$
$$+ \sum_a\sum_{MN} \frac{\alpha_{0M}\alpha_{0N}}{2\pi^2} T_{aK} C(R_{aM}) C(R_{aN}) -$$
$$- \sum_{abc}\sum_L \frac{\alpha_{0L}}{8\pi^3} T_{aK} C(R_{aL})\lambda^*_{0 i_a m_b n_c}\lambda_0^{i_a m_b n_c}\Big(1 + A -$$
$$- B\Big) + \sum_{abc}\sum_L \frac{\alpha_{0L}}{4\pi^3} T_{aK}\lambda^*_{0 i_a m_b n_c} C(R_{cL})\lambda_0^{i_a m_b n_c} \times$$
$$\times \Big(1 + B - A\Big) + \sum_{abc} \frac{\alpha_{0K}}{8\pi^3} T_{aK} C_2(G_K)\lambda^*_{0 i_a m_b n_c} \times$$
$$\times \lambda_0^{i_a m_b n_c} - \frac{1}{16\pi^4}\sum_{abcdef} T_{aK}\lambda^*_{0 i_a m_b n_c}\lambda_0^{i_a m_b p_d} \times$$
$$\times \lambda^*_{0 p_d k_e l_f}\lambda_0^{n_c k_e l_f}\Big\} + O\Big(\alpha_0^3,\alpha_0^2\lambda_0^2,\alpha_0\lambda_0^4,\lambda_0^6\Big). \qquad (11)$$

Заметим, что поскольку аномальные размерности (8) и β-функции (11) определены в терминах голых констант связи, то они не содержат конечных констант, задающих схему вычитаний. В качестве проверки общего выражения (11), мы вычислили с его помощью трехпетлевые β-функции для Минимальной Суперсимметричной Стандартной Модели (МССМ), регуляризованной высшими ковариантными производными, и убедились, что они совпадают с соответствующими выражениями, найденными ранее в работе [19].

Результат для трехпетлевых β-функций, стандартным образом определенных в терминах перенормированных констант связи, может быть получен с использованием ренормгрупповых уравнений (2) и (4) и выражения (11). В частном случае, когда юкавские константы равны нулю, интегрирование уравнений (2) в двухпетлевом приближении дает следующие соотношения между голыми и перенормированными калибровочными константами связи:

$$\frac{1}{\alpha_{0K}} - \frac{1}{\alpha_K} = \frac{1}{2\pi}\Big\{ - Q_K\ln\frac{\Lambda}{\mu} + b_{1,K} + \frac{\alpha_K}{2\pi}C_2(G_K)\times$$
$$\times\Big(- Q_K\ln\frac{\Lambda}{\mu} + b_{2,K}\Big) - \sum_{a,L}\frac{\alpha_L}{\pi} T_{aK} C(R_{aL})\times$$
$$\times\Big(\ln\frac{\Lambda}{\mu} + b_{2,KL}\Big)\Big\} + O(\alpha^2), \qquad (12)$$

где $b_{1,K}$, $b_{2,K}$ и $b_{2,KL}$ — константы интегрирования, определяющие перенормировочное предписание. Трехпетлевые вклады в β-функции, определенные в терминах перенормированных констант связи, зависят от этих констант интегрирования. В результате вычисления, сделанного на основе уравнений (4), было получено, что в трехпетлевом приближении

$$\frac{\widetilde{\beta}_K(\alpha)}{\alpha_K^2} = -\frac{1}{2\pi}\Big\{ - Q_K - \frac{\alpha_K}{2\pi}C_2(G_K)Q_K - \\ - \sum_{a,L}\frac{\alpha_L}{\pi}T_{aK}C(R_{aL}) - \sum_{a,L}\frac{\alpha_K\alpha_L}{2\pi^2}T_{aK}C_2(G_K)C(R_{aL}) - \\ - \frac{\alpha_K^2}{4\pi^2}C_2(G_K)Q_K\Big(C_2(G_K)+b_{2,K}-b_{1,K}\Big) + \\ + \sum_{a,M,N}\frac{\alpha_M\alpha_N}{2\pi^2}T_{aK}C(R_{aM})C(R_{aN}) - \\ - \sum_{a,L}\frac{\alpha_L^2}{2\pi^2}T_{aK}C(R_{aL})\Big[3C_2(G_L)\ln a_{\varphi,L} - \sum_b T_{bL}\ln a_L - \\ - b_{1,L} - Q_L\Big(b_{2,KL}+1+\frac{A}{2}\Big)\Big]\Big\} + O(\alpha^3). \qquad (13)$$

Из формулы (13) видно, что слагаемые, определяющие трехпетлевые вклады в $\widetilde{\beta}_K(\alpha)$, являются схемно зависимыми, за исключением слагаемых пропорциональных $\alpha_M\alpha_N$ при $M \neq N$.

Результат для схемы $\overline{\text{DR}}$ может быть получен из формулы (13), если конечные константы, определяющие перенормировочное предписание, положить равными

$$b_{1,K} = 3C_2(G_K)\ln a_{\varphi,K} - \sum_a T_{aK}\ln a_K;$$
$$b_{2,K} = -\frac{1}{4}Q_K + b_{1,K};$$
$$b_{2,KL} = -\frac{1}{4} - \frac{A}{2}. \qquad (14)$$

В этом случае выражения для трехпетлевых β-функций многозарядной теории в $\overline{\text{DR}}$–схеме при условии отсутствия юкавских констант связи принимают вид

$$\frac{\widetilde{\beta}_K(\alpha)}{\alpha_K^2}\Big|_{\overline{\text{DR}}} = -\frac{1}{2\pi}\Big\{ - Q_K - \frac{\alpha_K}{2\pi}C_2(G_K)Q_K - \\ - \sum_{a,L}\frac{\alpha_L}{\pi}T_{aK}C(R_{aL}) - \sum_{a,L}\frac{\alpha_K\alpha_L}{2\pi^2}T_{aK}C_2(G_K)C(R_{aL}) - \\ - \frac{\alpha_K^2}{4\pi^2}C_2(G_K)Q_K\Big(-\frac{1}{4}Q_K + C_2(G_K)\Big) + \\ + \sum_{a,L}\frac{3\alpha_L^2}{8\pi^2}T_{aK}C(R_{aL})Q_L \\ + \sum_{a,M,N}\frac{\alpha_M\alpha_N}{2\pi^2}T_{aK}C(R_{aM})C(R_{aN})\Big\} + O(\alpha^3). \qquad (15)$$

Для проверки правильности данного выражения с его помощью были вычислены независящие от юкавских констант вклады в трехпетлевые β-функции МССМ. В схеме $\overline{\text{DR}}$ эти β-функции были впервые вычислены в работе [20]. Проведенное сравнение продемонстрировало совпадение рассматриваемых вкладов.

Автор выражает свою благодарность К. В. Степаньянцу за полезные обсуждения и комментарии.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у нее нет конфликта интересов.

1. J. R. Ellis, S. Kelley, and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. B **260**, 131 (1991).
2. U. Amaldi, W. de Boer, and H. Furstenau, Phys. Lett. B **260**, 447 (1991).
3. P. Langacker and M. x. Luo, Phys. Rev. D **44**, 817 (1991).
4. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **229**, 381 (1983).
5. D. R. T. Jones, Phys. Lett. B **123**, 45 (1983).
6. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Phys. Lett. B **166**, 329 (1986).
7. M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, Nucl. Phys. B **277**, 456 (1986).
8. A. A. Slavnov, Nucl. Phys. B **31**, 301 (1971).
9. А. А. Славнов, ТМФ **13**, 174 (1972).
10. A. L. Kataev and K. V. Stepanyantz, Nucl. Phys. B **875**, 459 (2013).
11. K. V. Stepanyantz, Eur. Phys. J. C **80**, 911 (2020).
12. W. Siegel, Phys. Lett. B **84**, 193 (1979).
13. I. Jack, D. R. T. Jones, and C. G. North, Phys. Lett. B **386**, 138 (1996).
14. I. Jack, D. R. T. Jones, and C.G. North, Nucl. Phys. B **486**, 479 (1997).
15. А. А. Славнов, ТМФ **33**, 210 (1977).
16. M. A. Shifman, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 5761 (1996).
17. D. Korneev, D. Plotnikov, K. Stepanyantz, and N. Tereshina, JHEP **10**, 046 (2021).
18. A. Kazantsev and K. Stepanyantz, JHEP **06**, 108 (2020).
19. O. V. Haneychuk, V. Yu. Shirokova, and K. V. Stepanyantz, JHEP **09**, 189 (2022).
20. I. Jack, D. R. T. Jones, and A. F. Kord, Annals Phys. **316**, 213 (2005).