Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 8, с. 625 – 632

Рассеяние квазимонохроматического гауссова пучка света на двумерном фотонном кристалле

Д. Ю. Сергеева, И. В. Бекренев, А. А. Тищенко[1)]

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 декабря 2024 г.
После переработки 11 марта 2025 г.
Принята к публикации 18 марта 2025 г.

Исследовано рассеяние немонохроматического гауссова пучка света на двумерном фотонном кристалле. Рассчитано поле и проанализирована спектральная зависимость интенсивности излучения. Прослежены заметные различия в рассеянии квазимонохроматической волны по сравнению с двумя предельными случаями: монохроматической волной и волной с широким спектром. Определены условия, при которых простой метод, часто используемый в фотонике, когда падающее поле рассматривается как плоская монохроматическая волна, может приводить к значительному искажению дифракционной картины, выражающемуся в смещении длины волны и изменении количества максимумов интенсивности излучения. Обсуждается роль неплоского (гауссова) фронта волны и влияние размера пятна, освещаемого на поверхности решетки падающим лучом, на характеристики рассеянного излучения.

DOI: 10.31857/S0370274X25040136, EDN: RTUELI

1. Введение. Двумерные фотонные кристаллы (ФК) активно изучаются в фотонике из-за их уникальных свойств [1–3]. Имея очень малую толщину, они практически не поглощают свет. В предельном случае плоский двумерный ФК представляет собой периодический набор субволновых частиц, расположенных в плоскости в определенном порядке [4–7]. Современные технологии достаточно продвинулись вперед, чтобы создавать устройства на основе двумерных ФК, несмотря на их малые размеры. С помощью этих устройств можно манипулировать светом: фокусировать его, фильтровать и изменять направление его распространения.

Существует много предложений, основанных на результатах теоретических расчетов или компьютерного моделирования, как именно сконструировать двумерный ФК, чтобы достичь того или иного эффекта управления светом. Получено много формул, которые предсказывают характеристики излучения, рассеянного на таких мишенях. Однако в большинстве теоретических исследований в качестве падающей (внешней) волны рассматривается плоская, а часто и монохроматическая волна [8–11].

Например, авторы работы [12] экспериментально продемонстрировали сжатие фемтосекундного лазерного импульса в одномерном ФК. Чтобы подтвердить экспериментальные данные, была предложена теория рассеяния квазимонохроматической плоской волны на ФК. При этом авторы отмечают, что сжатие лазерного импульса сильно зависит от угловой ширины падающего лазерного импульса.

Не вызывает сомнений, что в первом приближении лазерный импульс может быть описан полем плоской монохроматической волны. Однако, отклонение фронта реального лазерного импульса от плоскости и наличие у лазерного импульса целого набора частот вместо одной может привести к расхождениям между предсказаниями теории на основе плоских и монохроматических волн и более реалистичным гауссовым пучком конечной спектральной ширины. Эти расхождения должны быть особенно заметны в явлениях интерференционной природы, которые имеют определяющее значение при рассеянии света на двумерных ФК.

Близкая идея обсуждалась в работе [13]. Авторы рассматривали рассеяние волны на одной частице, которая имела сферическую или цилиндрическую форму. Они показали, что использование поля плоской монохроматической волны в качестве падающего может приводить к расходимости коэффициентов рассеяния при стремлении радиуса частицы к нулю. Расходимость устраняется, если учесть квазимонохроматичность падающего поля.

В этой статье мы вычисляем поле и энергию излучения, возникающего при рассеянии квазимонохроматического гауссова пучка света на двумерном ФК, см. рис. 1. Ниже будем называть рассеянную волну излучением.

[1)]e-mail: tishchenko@mephi.ru

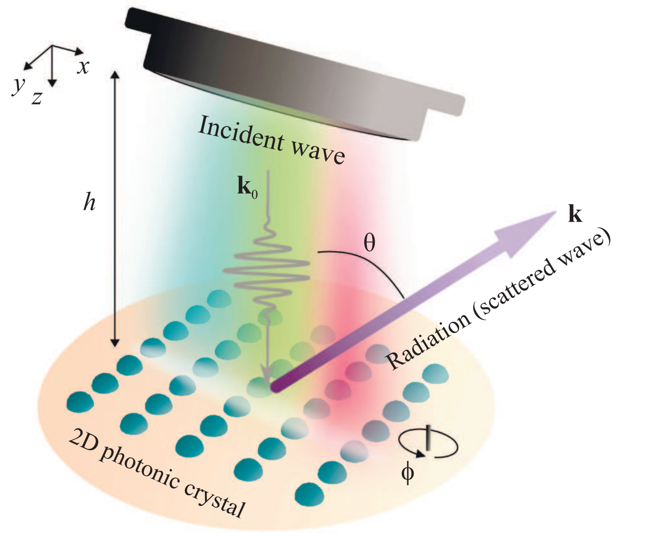

Рис. 1. (Цветной онлайн) Квазимонохроматический гауссов пучок света падает по нормали на двумерный ФК и рассеивается под произвольным углом

2. Падающая волна. Поле квазимонохроматического гауссова пучка света, распространяющегося вдоль оси z, описывается формулой:

$$\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} \frac{\rho_0}{\rho(z)} e^{-\frac{r_\perp^2}{2\rho^2(z)}} \times$$

$$\times \cos(k_0 z - \omega_0 t + k_0 r_\perp^2/(2R(z)) - \varphi_0). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{E}_0$ – вектор амплитуды, τ – длительность пучка света, ρ_0 – начальный радиус пучка, $r_\perp^2 = x^2 + y^2$,

$$\rho(z) = \rho_0 \sqrt{1 + z^2/z_d^2}, \quad (2)$$

$z_d = k_0 \rho_0^2$ – дифракционная длина пучка [14], k_0 – волновое число падающего света, ω_0 – центральная частота падающего света,

$$R(z) = z(1 + z_d^2/z^2), \quad (3)$$

$\varphi_0 = \arctan(z/z_d)$ – начальная фаза волны или сдвиг фазы относительно плоской волны.

Для квазимонохроматического света $\tau = 2\pi/\Delta\omega_0$, где $\Delta\omega_0$ – спектральная ширина поля:

$$\Delta\omega_0 \ll \omega_0. \quad (4)$$

Если $\Delta\omega_0$ стремится к нулю, то τ стремится к бесконечности и волна становится монохроматической.

Если ρ_0 стремится к бесконечности, то z_d тоже стремится к бесконечности и волна становится плоской.

3. Излучение от двумерного ФК. Спектрально-угловая плотность энергии излучения на далеких расстояниях определяется фурье-образом поля излучения $\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$:

$$\frac{dW(\mathbf{n},\omega)}{d\Omega d\omega} = cr^2 |\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)|^2, \quad (5)$$

где c – скорость света в вакууме, $\mathbf{n}$ – единичный волновой вектор излучения. На далеких расстояниях, т.е. при $kr \gg 1$, поле $\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$ определяется плотностью токов $\mathbf{j}$, которая возникает внутри частиц ФК:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = -i(2\pi)^3 \omega^{-1} [\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{j}(\mathbf{k},\omega)]] e^{ikr}/r. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{k}$ – волновой вектор излученной волны. Для периодического ФК, изображенного на рис. 1, фурье-образ поля излучения имеет вид [15, 16]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = -\alpha(\omega) \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{s=1}^{N} [\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{R}_s,\omega)]] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_s}. \quad (7)$$

В формуле (7) $\alpha(\omega)$ – поляризуемость частиц, которые образуют ФК; предполагается, что все частицы одинаковые, N – полное число частиц, $\mathbf{R}_s$ – радиус-вектор s-й частицы, суммирование ведется по всем частицам, $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{R}_s,\omega)$ – фурье-образ поля внешней волны в точке, где находится s-я частица. Поле (7) получено в рамках дипольного приближения, т.е. на расстояниях много больше длины волны λ и при

$$\lambda \gg L, \quad (8)$$

где λ – длина волны излучения, L – характерный размер (радиус) частицы. В таком случае плотность токов $\mathbf{j}$ определяется дипольным моментом $\mathbf{d}$, наведенным в частицах:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \sum_{s=1}^{N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_s) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{R}_s,t), \quad (9)$$

где $\mathbf{d}$ определяется полем падающей волны:

$$\mathbf{d}(\mathbf{R}_s,\omega) = \alpha(\omega) \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{R}_s,\omega), \quad (10)$$

а δ – дельта-функция Дирака. Выполняя все необходимые фурье-преобразования, подставляя формулы (9), (10) в формулу (6), мы получим выражение (7).

Обсудим условия применимости такого подхода.

Первое, неравенство (8) остается выполнимым для самого широкого диапазона частот, от радио- до УФ, включая ТГц, ИК и видимый: для этого надо брать частицы достаточно маленького размера, что при современных технологиях легко выполнимо.

Второе, частицы, из которых состоит ФК, могут быть как диэлектрическими, так и металлическими [17] – их свойства содержатся в $\alpha(\omega)$. Форма частиц ограничена требованием, что $\alpha(\omega)$ – скалярная функция: для частиц заметно вытянутой формы следовало бы использовать тензор второго ранга. Последнее, впрочем, несложно учесть, но мы остановимся на скалярной поляризуемости, чтобы не отвлекать внимание лишними деталями, непринципиальными для рассматриваемой задачи.

Третье, существенным является использование в формуле (10) поля падающей волны $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ в качестве поля, действующего на отдельные частицы ФК. Это, конечно, является приближением, в котором вкладом соседних частиц пренебрегается. Вклад соседей в действующее в конкретной точке поле – это поле чаще всего называют локальным полем – учитывается в электродинамике в формулах типа Клаузиуса–Моссотти (см., например, [18]), Лорентц–Лоренца, Максвелла–Гарнетта и т.д. Также эффект влияния окружения на характеристики излучающего объекта в оптике сегодня часто называют эффектом (или фактором) Парселла. Для вычисления этого поляризационного вклада используются разные аналитические подходы: от начальных представлений о сфере Лоренца [19] до языка двухчастичных корреляционных функций [20], где радиальная функция распределения частиц до ближайшего соседа определяется или феноменологически, или аналитически, например, путем решения уравнения Орнштейна–Цернике [21] в приближении Перкуса–Йевика и другими способами (впрочем, отметим, что в длинноволновом приближении для этих расчетов хватает вычисления асимптотики бинарной функции распределения [18], что является существенно более простой задачей). Ранее мы уже рассматривали эффекты локального поля именно для плоского двумерного монослоя частиц, как в настоящей задаче, применительно к вопросам изменения величины диэлектрической проницаемости [22] и к задаче о рассеянии внешнего поля на двумерной системе взаимодействующих частиц [22, 23]. Было показано, что эффекты влияния окружения на излучение каждой отдельной частицы вносят существенный вклад в области резонансов [24–26], когда влияние окружения, будь то одна соседняя частица или много, может приводить к увеличению интенсивности рассеяния (излучения) на 2–3 порядка. Однако вне условий резонанса вклад окружения в процесс рассеяния электромагнитной волны на отдельной частице не приводит к качественным изменениям картины рассеяния. Косвенно это также подтверждается очень хорошим совпадением [27] эксперимента и теории, основанной на приближении невзаимодействующих частиц, причем эксперименты были выполнены для двумерной решетки упорядоченных субволновых частиц, аналогично данному исследованию.

Итак, в случае, если падающая волна – квазимонохроматический гауссов пучок, формула для фурье-образа поля излучения имеет вид:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = -\frac{\tau\alpha(\omega)}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{ikr}}{r}[\mathbf{k},[\mathbf{k},\mathbf{E}_0]]\sum_{s=1}^{N}\frac{\rho_0}{\rho(Z_s)}\times$$
$$\times\left(Ae^{-\frac{\tau^2(\omega+\omega_0)^2}{4}} + A^*e^{-\frac{\tau^2(\omega-\omega_0)^2}{4}}\right)e^{-\frac{R_\perp^2}{2\rho^2(Z_s)}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_s}, \tag{11}$$

где $R_\perp^2 = X_s^2 + Y_s^2$ и

$$A = \exp(-ik_0 Z_s - ik_0 R_\perp^2/(2R(Z_s)) + i\varphi_0), \tag{12}$$

A^* – комплексно-сопряженная величина A. Для спектрально-угловой плотности излученной энергии получим:

$$\frac{dW(\mathbf{n},\omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{\omega^2\tau^2}{16\pi c}|\alpha(\omega)|^2|[\mathbf{k},\mathbf{E}_0]|^2\times$$
$$\times\left|\sum_{s=1}^{N}\frac{\rho_0}{\rho(Z_s)}e^{-\frac{R_\perp^2}{2\rho^2(Z_s)}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_s}\times\right.$$
$$\left.\times\left(Ae^{-\frac{\tau^2(\omega+\omega_0)^2}{4}} + A^*e^{-\frac{\tau^2(\omega-\omega_0)^2}{4}}\right)^2\right|. \tag{13}$$

Формула (13) получена для произвольного расположения частиц в плоскости, т.е. для любых $\mathbf{R}_s$ и N.

Далее удобно анализировать нормированную интенсивность:

$$I_n \equiv \frac{dW(\mathbf{n},\omega)}{d\Omega d\omega}\frac{c}{|\alpha(\omega)E_0|^2}. \tag{14}$$

Такая величина I_n измеряется в м$^{-2}$. Эти формулы справедливы для нерезонансных частиц (вдали от резонансных частот) и не очень сильных лазерных полей. Для определенности, численный анализ ниже будет выполнен для $\mathbf{E}_0 = E_0(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, что не ограничивает общности полученных результатов.

4. Гармоники прямоугольной решетки. Конкретизируем $\mathbf{R}_s$ для частного случая: прямоугольной решетки, изображенной на рис. 1:

$$\mathbf{R}_s = (d_x s_x, d_y s_y, h), \tag{15}$$

где $d_{x,y}$ – период решетки в соответствующем направлении, $s_{x,y}$ – целое число, обозначающее отдельные частицы в рядах. Ниже, для удобства мы будем считать, что принимает значения от $-N_{x,y}$ до $N_{x,y}$, где $N_{x,y}$ – целые числа, так что $(2N_{x,y}+1)$ – число частиц в ряду x или y соответственно, а h – расстояние между начальной точкой лазерного пучка (перетяжкой пучка) и плоскостью двумерного ФК, см. рис. 1. Запись $\mathbf{R}_s$ в виде (15) не является единственно возможным вариантом и явный вид (15) выбран для удобства. Для выбранного представления мы получаем всегда нечетное число частиц в ряду, что не ограничивает общности результатов и не влияет на наблюдаемые эффекты.

Рассмотрим в качестве падающего поле волны с широким спектром: $\mathbf{E}_{\exp}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{-t^2/\tau^2}\cos(k_0 z - \omega_0 t)$, где $\omega_0\tau \ll 1$ (т.е. $\Delta\omega_0 \gg \omega_0$). Для нахождения спектрально-углового распределения излучения в этом случае можно применить формулы и алгоритм, описанные выше. Получающийся результат совпадает с формулой (13), взятой в пределе $\rho_0 \to \infty$. При этом рассеянный свет содержит различные гармоники, спектральные и угловые свойства которых не зависят от конкретных характеристик падающего поля. Эти гармоники определяются только свойствами решетки и подчиняются следующим известным дисперсионным соотношениям:

$$d_x \cos\phi \sin\theta = \lambda m_x,$$
$$d_y \sin\phi \sin\theta = \lambda m_y, \tag{16}$$

где $m_{x,y}$ – целые числа, т.е. гармоники, и введены углы наблюдения θ и ϕ:

$$\mathbf{n} = (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, -\cos\theta). \tag{17}$$

Отметим, что (16) – это система уравнений, т.е. наибольшая интенсивность излучения будет достигнута при одновременном выполнении обоих условий из (16).

Спектральную ширину гармоник можно оценить по формуле:

$$\Delta\omega = \min \frac{4\pi c}{(2N_{x,y}+1)d_{x,y}n_{x,y}} \tag{18}$$

или

$$\Delta\lambda = \min \frac{2(2N_{x,y}+1)d_{x,y}n_{x,y}}{(2N_{x,y}+1)^2 m_{x,y}^2 - 1}. \tag{19}$$

Спектральное распределение нормированной интенсивности излучения для падающего поля с очень широким спектром (что используется, например, для исследования собственных мод решетки [28]) показано на рис. 2. Пунктирные вертикальные линии соответствуют длине волны из дисперсионных соотношений (16). Светло-серые и светло-красные полосы соответствуют спектральной ширине гармоник (19).

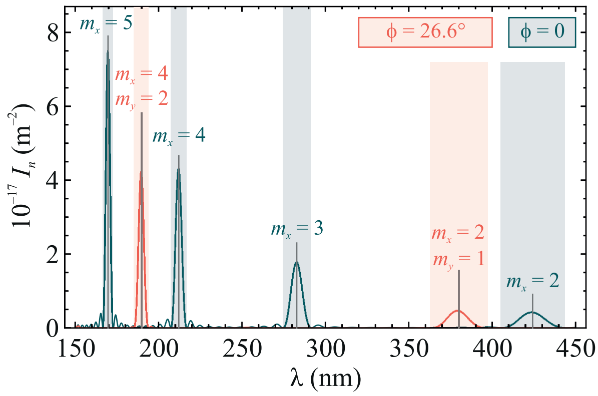

Рис. 2. (Цветной онлайн) Спектральная зависимость нормированной интенсивности излучения, возникающая при рассеянии плоской волны с широким спектром ($\Delta\omega_0 = 10\omega_0$) на двумерном ФК. Здесь $\lambda_0 = 424$ нм, $\omega_0 = 4.3\cdot10^{15}$ с$^{-1}$, $\tau = 1.5\cdot10^{-16}$ с, $N_x = N_y = 5$, $d_x = d_y = 1.2$ мкм, $\theta = 45$ градусов. Серая кривая и серые полосы соответствуют $\phi = 0$ красная кривая и красные полосы соответствуют $\phi = 26.6$ градусов

5. Рассеяние квазимонохроматического гауссова пучка. Как известно, в условиях, когда амплитуда рассеиваемого поля заметно меньше полей внутриатомных (что мы и предполагаем в данной статье), длины волн падающей монохроматической волны λ_0 и волны рассеянной совпадают. Ниже мы рассмотрим падающую немонохроматическую волну как квазимонохроматическую, спектр которой сосредоточен вблизи длины волны λ_0, но при этом от спектра монохроматической отличается.

Спектральное распределение нормированной интенсивности (14) для квазимонохроматического гауссова пучка сильно зависит от размера пятна падающего поля на плоскости ФК. Возможны два типа зависимости между размером решетки и размером лазерного пятна:

A) лазерное пятно частично покрывает решетку, т.е. $\rho(h) < d_{x,y}N_{x,y}$,

B) лазерное пятно полностью покрывает решетку, т.е. $\rho(h) > d_{x,y}N_{x,y}$.

В случае A падающее поле сильно меняется в пределах поверхности решетки, а в случае B оно практически постоянно, см. рис. 3. Фактически спектральные распределения нормированной интенсивности излучения в случае B практически такие же, как и при рассеянии обычной плоской волны: максимальные значения достигаются вблизи λ_0.

На рисунке 4 представлена спектральная зависимость нормированной интенсивности излучения, возникающая при рассеянии гауссова квазимонохроматического лазерного луча на двумерном ФК при раз-

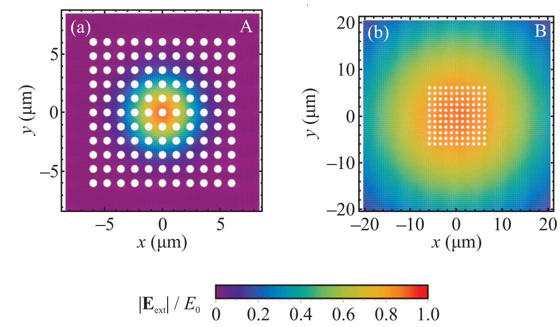

Рис. 3. (Цветной онлайн) Распределение падающего поля в плоскости решетки $z = h$ в зависимости от координат решетки. (a) – Лазерное пятно частично покрывает решетку; (b) – лазерное пятно полностью покрывает решетку. Белые точки – это схематическое изображение частиц двумерного ФК, вид сверху, радиус частиц – не в масштабе, период и общий размер решетки – в масштабе. Здесь $N_x = N_y = 5$, $d_x = d_y = 1.2$ мкм, $\lambda_0 = 424$ нм, $\Delta\omega_0 = \omega_0/4$, $h = 3$ мкм, (a) – $\rho_0 = 2$ мкм, (b) – $\rho_0 = 15$ мкм

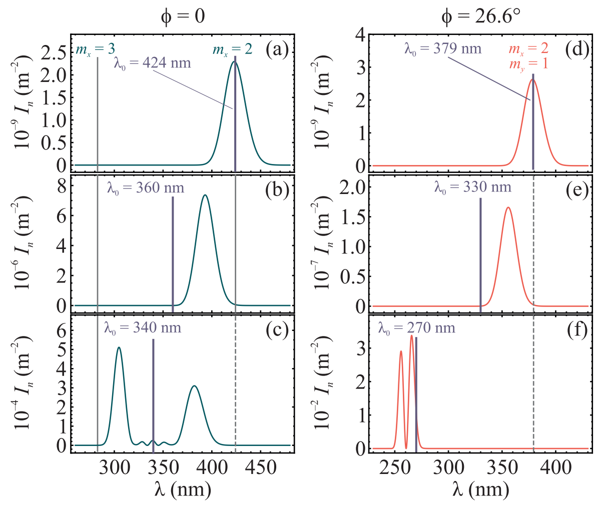

Рис. 4. (Цветной онлайн) Спектральная зависимость нормированной интенсивности излучения, возникающая при рассеянии квазимонохроматического гауссова лазерного луча на двумерном ФК при различных λ_0. Здесь $\tau = 6$ фс, $N_x = N_y = 5$, $d_x = d_y = 1.2$ мкм, $\theta = 45$ градусов, $\rho_0 = 2$ мкм, $h = 3$ мкм. Условие $\lambda \gg L$ выполнено для всех рассматриваемых длин волн. Для левой колонки $\phi = 0$ для правой колонки $\phi = 26.6$ градусов. Серые пунктирные линии соответствуют порядкам дифракции (16). Фиолетовые длинно-пунктирные линии соответствуют λ_0

личных λ_0. Графики приведены для двух разных азимутальных углов наблюдения: $\phi = 0$ (левая колонка) и $\phi = 26.6$ градусов (правая колонка). Значения $\lambda_0 = 424$ нм для $\phi = 0$ и $\lambda_0 = 379$ нм для $\phi = 26.6$ градусов выбраны так, чтобы длина волны падающего поля совпадала со второй гармоникой решетки. Для краткости это условие совпадения ниже будет называться брэгговским резонансом. Серые пунктирные линии соответствуют порядкам дифракции (16). Фиолетовые длинно-пунктирные линии соответствуют λ_0. Видно, что в условиях резонанса рассеянное излучение имеет высокую интенсивность, см. рис. 4a, d. Смещение длины волны падающего поля λ_0 от резонансной приводит к уменьшению интенсивности и к тому, что длина волны излучения не совпадает ни с длиной волны падающего поля, ни с гармониками решетки, см. рис. 4b, e. Дальнейшее смещение длины волны λ_0 приводит к появлению двух максимумов интенсивности вместо ожидаемого одного, длины волн обоих из которых не совпадают ни с длиной волны падающего света, ни с гармониками решетки, см. рис. 4c, f. Отметим, что аналогичный эффект наблюдали Архипов и соавторы, см. рис. 9 в работе [29].

Интересно отметить, что в соседней области физики – физике излучения – близкие по своей природе эффекты имеют место в переходном излучении от решетки [27, 30, 31] и излучении Смита–Парселла от пучка релятивистских электронов [16, 32–35], пролетающих через или вблизи периодической структуры, в том числе двумерного ФК [15, 16, 27]. Действительно, при генерации этих типов излучения от периодических структур роль падающей волны играет Лоренц-трансформированное кулоновское поле, которое, как и в рассмотренной задаче, имеет ограниченный размер и неплоский фронт, убывает с расстоянием от центра (траектории электрона) и не является монохроматическим.

Рисунок 4 построен для случая A, см. рис. 3a, так как для всех рассмотренных λ_0 имеем $\rho(h) \approx 2$ мкм и $\max\{d_x N_x; d_y N_y\} = 6$ мкм. На рисунке 5 приведены те же графики, но для случая B при $\rho_0 = 15$ мкм $\approx \rho(h)$. Видно, что эффекта сдвига длины волны нет: все максимумы рассеянного излучения очень близки к соответствующим λ_0, но вблизи λ_0 имеются осцилляции с несколькими максимумами и минимумами. Эти осцилляции связаны с тем, что широким фронтом падающей волны возбуждаются и главные, и побочные максимумы собственных гармоник решетки. Отметим также, что в этом случае не видно разницы между излучением от плоских и гауссовых падающих волн.

Для всех кривых на рис. 4, 5 выполнены условия $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$ и $\Delta\omega_0 \gg \Delta\omega$.

6. Обсуждение. В целом, в этой задаче есть пять важных параметров: $\rho(h)$ – радиус пятна падающего поля в плоскости решетки, $d_{x,y}N_{x,y}$ – харак-

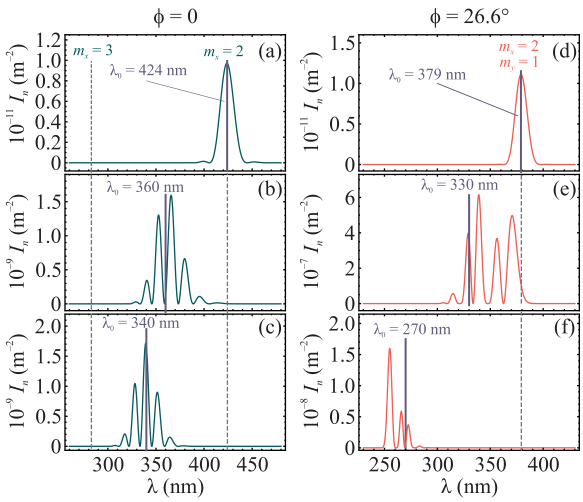

Рис. 5. (Цветной онлайн) То же, что на рис. 4, но для случая B при $\rho_0 = 15$ мкм

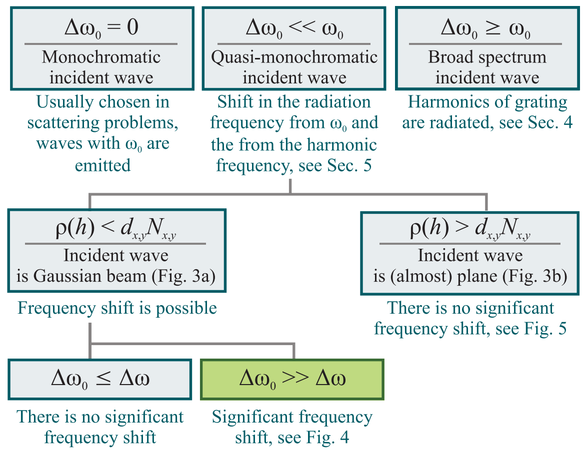

Рис. 6. (Цветной онлайн) Возможные соотношения между основными параметрами задачи и их значениями

терный размер решетки, ω_0 – основная частота падающей волны, $\Delta\omega_0$ – ширина спектра падающей волны, $\Delta\omega$ – ширина спектра собственных гармоник решетки. Окончательное спектральное распределение рассеянного излучения сильно зависит от соотношения этих параметров. Возможные варианты приведены на рис. 6.

В зависимости от ширины спектра падающего поля падающая волна может быть монохроматической (идеальный случай, часто используемый в пакетах для моделирования, неинтересный для данной статьи), квазимонохроматическим (предмет интереса в данной статье) и широким, см. первую строку схемы на рис. 6. Если спектр широкий, то возбуждаются собственные гармоники решетки, т.е. характеристики рассеянной волны определяются геометрическими параметрами решетки и практически не зависят от характеристик падающей волны. Этот случай подробно описан в разделе 4.

В наиболее интересном случае – внешняя волна квазимонохроматическая – спектральные характеристики рассеянной волны будут зависеть от того, насколько полно поверхность решетки покрывается площадью пятна этой внешней волны, см. вторую строку схемы на рис. 6. Здесь возможны два варианта.

Первое, пусть характерный размер пятна внешнего поля в плоскости решетки $\rho(h)$ превышает размер самой решетки $d_{x,y}N_{x,y}$ (рис. 3b). Тогда характеристики рассеянной волны практически не будут отличаться от характеристик света, наблюдаемого при рассеянии плоской волны на такой решетке. Это происходит потому, что все частицы решетки находятся в одинаковом внешнем поле. Этот случай подробно обсуждался в разделе 5, см. случай B. В этом случае не имеет смысла учитывать отличие поля падающей волны от поля плоской квазимонохроматической волны.

Второе, пусть падающий пучок света хорошо сфокусирован, т.е. характерный размер пятна внешнего поля в плоскости решетки меньше размера самой решетки: $\rho(h) < d_{x,y}N_{x,y}$ (рис. 3a). Тогда необходимо учитывать то, что фронт волны является гауссовым, а не плоским, см. случай A в разделе 5. Именно в этом диапазоне параметров можно ожидать, что характеристики рассеянной волны будут существенно отличаться от тех, что наблюдаются при рассеянии плоской монохроматической волны. Однако и при условии $\rho(h) < d_{x,y}N_{x,y}$ есть ситуации, когда отличием формы фронта от плоской можно пренебречь: так будет, если спектральная ширина падающей волны меньше, чем спектральная ширина гармоник решетки, т.е. при $\Delta\omega_0 \le \Delta\omega$, см. третью строку схемы на рис. 6.

Таким образом, наиболее интересный диапазон (в котором тот факт, что падающая волна представляет собой квазимонохроматический гауссов пучок, вносит в спектральное распределение наиболее существенные изменения по сравнению со случаем монохроматической плоской волны), соответствует зеленому полю на рис. 6 и определяется неравенствами:

$$\begin{gathered}\Delta\omega \ll \Delta\omega_0 \ll \omega_0,\\ \rho(h) < d_{x,y}N_{x,y}.\end{gathered} \tag{20}$$

Эти неравенства, несколько более грубо, можно объединить следующим образом:

$$\frac{c}{m\rho_0 \sin\theta} \ll \frac{1}{\tau} \ll \frac{c}{\lambda_0}, \quad m \ge 1, \tag{21}$$

где m – отношение линейного размера решетки к радиусу падающего пучка света в плоскости двумерного ФК.

Например, для лазера, использованного в [12], $\omega_0 = 2.3 \cdot 10^{15}\,\text{с}^{-1}$, $\Delta\omega_0 = 2.3 \cdot 10^{13}\,\text{с}^{-1}$, т.е. $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$, $\rho_0 = 20\,\text{мкм}$. Оценим, какими параметрами должна обладать решетка, чтобы реализовались рассмотренные выше случаи. Условие (21) хорошо выполняется от $m \approx 10$ и выше, на углах $\theta \approx 80$ градусов; при этом обсуждаемые эффекты становятся видны уже начиная с $m \approx 4$. Полагая, что $N_x = 15$, $h = 1\,\text{мм}$, $\phi = 0$, можно получить графики подобные тем, что изображены на рис. 4a для такого лазера и двумерного ФК со следующими параметрами: $d_x = 5.8\,\text{мкм}$ ($m = 4.3$), или подобные графикам на рис. 4b для $d_x = 5.9\,\text{мкм}$ ($m = 4.46$), или подобные графикам на рис. 4c для $d_x = 6\,\text{мкм}$ ($m = 4.52$).

7. Заключение. В настоящей работе исследовано рассеяние квазимонохроматического гауссова пучка света на двумерном ФК, представляющем собой массив одинаковых субволновых частиц, упорядоченных в плоскости. Мы определили условия, когда можно пользоваться моделью монохроматической плоской волны, а когда надо учитывать немонохроматичность реального падающего поля и/или ограниченность его фронта (гаусс вместо плоской волны) по сравнению с площадью решетки. Показано, что эти факторы приводят к отличию частоты рассеянного света от частоты падающего света и от любой гармоники решетки. Это может сопровождаться возникновением двух максимумов вместо одного, причем длина волны также будет отличаться от длины волны падающего света или любой гармоники решетки. Наиболее ярко эффект будет наблюдаться для хорошо сфокусированных пучков при $\Delta\omega_0 \gg \Delta\omega$ и при больших углах наблюдения.

Отметим еще, что мы рассмотрели массив частиц, находящихся в узлах прямоугольной решетки. Полученные аналитические выражения и развитый метод, однако, верны и для произвольного расположения частиц.

Мы надеемся, что результаты – определение условий, когда можно пользоваться моделью монохроматической плоской волны, а когда надо учитывать немонохроматичность реального падающего поля и/или ограниченность его фронта (гаусс вместо плоской волны) – будут полезны для практической реализации устройств управления светом.

Финансирование работы. Исследование выполнено в рамках работ по гранту #24-72-00150 Российского научного фонда.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

---

1. S. Fan and J. D. Joannopoulos, Phys. Rev. B **65**, 235112 (2002).
2. Q. Shi, J. Zhao, and L. Liang, Progress in Quantum Electronics **77**, 100298 (2021).
3. Е. Э. Маслова, М. Ф. Лимонов, М. В. Рыбин, Письма в ЖЭТФ **109**, 347 (2019).
4. S. Noda, M. Fujita, and T. Asano, Nat. Photonics **1**, 449 (2007).
5. S. T. Ha, Y. H. Fu, N. K. Emani, Z. Pan, R. M. Bakker, Nat. Nanotechnol. **13**, 1042 (2018).
6. M. Panmai, J. Xiang, S. Li, X. He, Y. Ren, M. Zeng, J. She, J. Li, and S. Lan, Nat. Commun. **13**, 2749 (2022).
7. S. A. Dyakov, I. M. Fradkin, D. V. Yurasov, V. A. Zinovyev, S. G. Tikhodeev, and N. A. Gippius, Phys. Rev. B **108**, 155416 (2023).
8. V. Miljkovic, T. Shegai, P. Johansson, and M. Kall, Opt. Express **20**, 10816 (2012).
9. S. Gladyshev, O. Pashina, A. Proskurin, A. Nikolaeva, Z. Sadrieva, M. Petrov, A. Bogdanov, and K. Frizyuk, ACS Photonics **11**, 404 (2024).
10. J. Sun and C. Zheng, JOSA A **26**, 156 (2009).
11. P. Y. Chen, M. A. Byrne, A. A. Asatryan, L. C. Botten, K. B. Dossou, A. Tuniz, R. C. McPhedran, C. M. de Sterke, C. G. Poulton, and M. J. Steel, Waves in Random and Complex Media **22**, 531 (2012).
12. А. В. Андреев, А. В. Балакин, Д. Буше, П. Масселин, И. А. Ожередов, А. П. Шкуринов, Письма в ЖЭТФ **71**, 539 (2000).
13. Y. A. Brynkin and M. I. Tribelsky, Phys. Rev. A **100**, 013834 (2019).
14. С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин, *Физическая оптика*, МГУ, М. (1998).
15. D. Yu. Sergeeva, A. A. Tishchenko, and M. N. Strikhanov, Nucl. Instruments Methods Phys. Res. B **402**, 206 (2017).
16. D. I. Garaev, D. Yu. Sergeeva, and A. A. Tishchenko, Phys. Rev. B **103**, 75403 (2021).
17. И. Д. Морохов, В. И. Петинов, Л. И. Трусов, В. Ф. Петрунин, УФН **133**, 653 (1981).
18. М. И. Рязанов, *Электродинамика конденсированного вещества*, Наука, М. (1984).
19. Г. А. Лоренц, *Теория электронов и её применение к явлениям света и теплового излучения*, ГТТИ, М. (1953).
20. О. В. Долгов, Е. Г. Максимов, УФН **135**, 441 (1981).
21. Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, Мир, М. (1978).
22. М. И. Рязанов, А. А. Тищенко, ЖЭТФ **130**, 621 (2006).

23. M. I. Ryazanov and A. A. Tishchenko, Laser Phys. **12**, 1442 (2002).
24. M. I. Ryazanov, M. N. Strikhanov, and A. A. Tishchenko, Nucl. Instr. and Meth. B **266**, 3811 (2008).
25. A. A. Tishchenko and D. Yu. Sergeeva, Phys. Rev. B **100**, 235421 (2019).
26. D. Yu. Sergeeva and A. A. Tishchenko, Phys. Rev. B **108**, 155435 (2023).
27. D. Yu. Sergeeva, A. S. Aryshev, A. A. Tishchenko, K. E. Popov, N. Terunuma, and J. Urakawa, Opt. Lett. **46**, 544 (2021).
28. С. Г. Романов, Письма в ЖЭТФ **79**, 751 (2004).
29. R. M. Arkhipov, I. Babushkin, M. K. Lebedev, Yu. A. Tolmachev, and M. V. Arkhipov, Phys. Rev. A **89**, 043811 (2014).
30. P. Henri, O. Haeberle, P. Rullhusen, N. Maene, and W. Mondelaers, Phys. Rev. E **60**, 6214 (1999).
31. А. П. Потылицын, Г. А. Науменко, Л. Г. Сухих, А. Арышев, М. Шевелев, Н. Терунума, Дж. Уракава, Письма в ЖЭТФ **104**, 826 (2016).
32. И. М. Франк, Известия АН СССР. Серия физическая **6**, 3 (1942).
33. S. J. Smith and E. M. Purcell, Phys. Rev. **92**, 1069 (1953).
34. A. P. Potylitsyn, M. I. Ryazanov, M. N. Strikhanov, and A. A. Tishchenko, *Diffraction Radiation from Relativistic Particles*, Springer Tracts in Modern Physics, Springer, Berlin (2010), v. 239.
35. G. Doucas, *Smith-Purcell Radiation: Basic Theory and Applications*, Oxford University Press, Oxford (2025).