Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 8, с. 639 – 641

Обратная квантовая задача многомерной статистики фотоотсчетов

А. С. Чиркин[1)]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 марта 2025 г.
После переработки 12 марта 2025 г.
Принята к публикации 12 марта 2025 г.

Впервые представлено решение задачи определения многомерной статистики фотонов по измерению статистики электронов, порождаемых при детектировании излучения. Подробно изложен двумерный случай. Метод основан на применении характеристической функции, который позволил получить связь двумерной функции распределения фотонов с двумерной функцией рапределения фотоотсчетов. Область применения полученных результатов малофотонные и неклассические световые поля.

DOI: 10.31857/S0370274X25040152, EDN: UEHWUT

Современный интерес к статистике фотоотсчетов, методу счета фотонов, обусловлен потребностями разработки квантовых оптических технологий, которые находят все более широкое применение в науке и технике. В основе измерения статистики фотонов лежит ее преобразование в статистику фотоэлектронов (фотоотсчетов), порождаемых поглощением потока фотонов фотокатодом с последующем испусканием электронов. Такой процесс является чисто квантовым. Вместе с тем на начальном этапе развития метода фотоотсчетов, когда имели дело, как правило, с интенсивным и когерентными излучением, основу метода составляла полукласссическая теория, результатом которой являлась формула Манделя распределения фотоотсчетов [1–4]. Для адекватного описания регистрации малофотонных световых пучков и неклассических световых полей небходима, разумеется, квантовая формулировка распределения фотоотсчетов.

Извлечение информации о статистике фотонов из статистики фотоотсчетов представляет собой обратную задачу. К настоящему времени она в значительной степени решена как для полуклассического [1, 3, 4], так и квантового подходов [5–8] (см. также [9] и цитируемую там литературу). Однако этот анализ ограничен одномерным распределением фотоотсчетов. Больше информации о статистике поля и фотонов содержат корреляционные функции и функции распределения фотоотсчетов более высокого порядка. Такая информация необходима, в частности, для характеристики неклассических источников излучения, которая в настоящее время включает измерение корреляции фотоотсчетов и поляризационную томографию (см. [10–13] и цитируемую там литературу).

Цель настоящего письма – изложение метода решения обратных задач статистики фотоотсчетов для многомерных распределений в квантовой формулировке. Насколько нам известно, ранее такие задачи не рассматривались. Здесь мы ограничимся случаем регистрации излучения в отсутствии шума. В основе развиваемого подхода лежит использование метода характеристической функции.

Для определенности рассмотрим регистрацию излучения двумя пространственно разнесенными детекторами. Для простоты анализа излучение считаем одномодовым. Операторы рождения (уничтожения) регистрируемых полей обозначим как $\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ и $\hat{b}^\dagger(\hat{b})$ соответственно для фотодетекторов PM1 и PM2.

Согласно квантовой теории фотодетектирования, например, при регистрации PM1 вероятность появления m_1 фотоэлектронов дается формулой [2]

$$Q(m_1) = \mathrm{Tr}\{\rho_1 \hat{N} \frac{1}{m_1!} (\eta \hat{n}_1)^{m_1} e^{-\eta \hat{n}_1}\}. \qquad (1)$$

Здесь ρ_1 – оператор (матрица) плотности поля, $\hat{N}$ – оператор нормального упорядочивания, $\hat{n}_1 = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ – оператор числа фотонов, η – вероятность рождения фотоэлектрона (квантовая эффективность процесса детектирования).

Выражение (1), используя в качестве базиса фоковские состояния, удается преобразовать к виду [2]

$$Q(m_1) = \sum_{n_1=m_1}^{\infty} C_{m_1}^{n_1} \eta^{m_1} (1-\eta)^{n_1-m_1} P(n_1),$$
$$C_{m_1}^{n_1} = \frac{n_1!}{m_1!(n_1-m_1)!}, \qquad (2)$$

[1)]e-mail: aschirkin@physics.msu.ru

где $P(n_1)$ – вероятность распределения регистрируемых фотонов, которая определяется диагональными элементами матрицы плотности.

Статистика фотоэлектронов (2) является результатом двух стохастических процессов. При регистрации фотодетектором излучения с точно n_1 фотонами (в фоковском состоянии) распределение фотоотсчетов подчиняется биномиальному распределению

$$Q(m_1|n_1) = C_{m_1}^{n_1}\eta^{m_1}(1-\eta)^{n_1-m_1}. \quad (3)$$

Безусловная вероятность появления m_1 фотоэлектронов (2) определяется при усреднении выражения (3) по распределению фотонов $P(n_1)$.

Выражение, аналогичное (3), применимо и для регистрации излучения детектором РМ2:

$$Q(m_2|n_2) = C_{m_2}^{n_2}\eta^{m_2}(1-\eta)^{n_2-m_2}. \quad (4)$$

Квантовые эффективности фотодетекторов для простоты записи считаем одинаковыми.

Условная вероятность появления в первом детекторе m_1 фотоотсчетов при регистрации n_1 фотонов, а во втором m_2 фотоотсчетов при регистрации n_2 фотонов дается формулой

$$Q(m_1|n_1, m_2|n_2) = \\ = \eta^{m_1+m_2}(1-\eta)^{n_1+n_2-m_1-m_2}C_{m_1}^{n_1}C_{m_2}^{n_2}. \quad (5)$$

Отсюда получаем, что безусловная двумерная статистика фотоотсчетов $Q(m_1, m_2)$ определяется выражением

$$Q(m_1, m_2) = \sum_{n_1=m_1}^{\infty}\sum_{n_2=m_2}^{\infty}\eta^{m_1+m_2}(1-\eta)^{n_1+n_2-m_1-m_2}\times \\ \times C_{m_1}^{n_1}C_{m_2}^{n_2}P(n_1, n_2), \quad (6)$$

где $P(n_1, n_2)$ – двумерная вероятность распределения регистрируемых фотонов.

Для независимых статистик регистрируемых фотонов (функция распределения $P(n_1, n_2) = P(n_1)P(n_2)$) и распределение фотоотсчетов также статистически независимы, т.е. $Q(m_1, m_2) = Q(m_1)Q(m_2)$.

Наша задача заключается в нахождении функции распределения $P(n_1, n_2)$ по измеренному распределению $Q(m_1, m_2)$ из выражения (6) в общем случае при наличии корреляций регистрируемых детекторами фотонов. С этой целью мы воспользуемся подходом, основанным на расчете двумерной характеристической функции (ХФ):

$$C_P(u_1, u_2) = \sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}e^{i(u_2n_2+u_1n_1)}P(n_1, n_2). \quad (7)$$

Определим также условную двумерную ХФ для для фотоотсчетов при фиксированном числе фотонов, регистрируемых детектором:

$$C_Q(u_1|n_1, u_2|n_2) = \\ = \sum_{m_2=0}^{n_2}\sum_{m_1=0}^{n_1}e^{iu_2m_2+u_1m_1}Q(m_1|n_1, m_2|n_2). \quad (8)$$

Расчет приводит к выражению

$$C_Q(u_1|n_1, u_2|n_2) = (1+\eta(e^{iu_1}-1))^{n_1}(1+\eta(e^{iu_2}-1))^{n_2}. \quad (9)$$

Безусловная двумерная ХФ для фотоотсчетов при этом принимает вид

$$C_Q(u_1, u_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}C_Q(u_1|n_1, u_2|n_2)P(n_1, n_2) = \\ = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}e^{i(z_1n_1+z_2n_2)}P(n_1, n_2) = C_P(z_1, z_2), \quad (10)$$

где

$$z_j = -i\ln(1+\eta(e^{iu_j}-1)), \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Мы получили важное соотношение (10), которое дает связь между двумерными ХФ фотоотсчетов и фотонов. При квантовой эффективности $\eta = 1$ для ХФ имеем равенство $C_Q(u_1, u_2) = C_P(u_1, u_2)$, и статистика фотоотсчетов совпадает со статистикой фотонов. При $\eta \neq 1$ простой связи статистик нет, и корреляционные свойства фотоотсчетов искажают корреляционные свойства фотонов. ХФ, как известно, однозначно определяют функции распределения.

Функция распределения $P(n_1, n_2)$ из ХФ для дискретной величины находится с помощью фурье-преобразования на интервале $[-\pi, \pi]$. В соответствии с (10) имеем

$$P(n_1, n_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\times \quad (12) \\ \times\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}C_P(z_1, z_2)e^{-i(z_1n_1+z_2n_2)}dz_1dz_2 = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2}\times \\ \times\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}C_Q(u_1(z_1), u_2(z_2))e^{-i(z_1n_1+z_2n_2)}dz_1dz_2 = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}Q(m_1, m_2)\times \\ \times e^{i(m_1u_1(z_1)+m_2u_2(z_2))}e^{-i(z_1n_1+z_2n_2)}dz_1dz_2.$$

Согласно (11) $u_j = -i \ln[\eta - 1 + e^{iz_j}]/\eta$. Вычисления (12) приводят к следующему результату

$$P(n_1, n_2) = \sum_{m_1=n_1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} \eta^{-(n_1+n_2)} \times$$

$$\times (1-\eta^{-1})^{m_1+m_2-n_1-n_2} \, C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} Q(m_1, m_2). \quad (13)$$

Это соотношение решает поставленную задачу. Как и следовало ожидать, для квантовой эффективности $\eta = 1$ имеем $P(n_1, n_2) = Q(n_1 = m_1, n_2 = m_2)$, учитывая $0^0 = 1$.

Структура соотношения (13) позволяет легко его обобщить на произвольную многомерную квантовую статистику фотоотсчетов. Для обобщения изложенного вывода на пространственно-временные световые пучки в исходной формуле (1) нужно произвести замену [14] оператора $\hat{n}_1$ на

$$\hat{n}_1 = \int_t^{t+T} d\tau \int_S \hat{n}_1(t, \mathbf{r}) d^2 r, \quad (14)$$

где $\hat{n}_1(t, \mathbf{r})$ – оператор плотности числа фотонов, T – время и S -площадь детектирования соответственно. При этом выражение (13) остается справедливым.

Полученное решение (13) содержит обратное преобразование Бернулли, область его применимости для одномерной статистики детально обсуждается в [8, 9].

В заключение отметим, что с помощью применения аппарата ХФ в решении обратной квантовой задачи статистики фотоотсчетов удалось выйти за рамки одномерной статистики. Нам представляется, что изложенный в работе подход и полученные результаты могут найти применение при использовании ярких неклассических световых полей в квантовых технологиях.

Финансирование работы. Данное исследование выполнено в рамках государственного задания Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, Наука, М. (1981).
2. Р. Лоудон, *Квантовая теория света*, Мир, М. (1976).
3. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Физматлит, М. (2000).
4. Я. Перина, *Когерентность света*, Мир, М. (1974).
5. T. Kiss, U. Herzog, and U. Leonhardt, Phys. Rev. A **52**, 2433 (1995).
6. V. N. Starkov, A. A. Semenov, and H. V. Gomonay, Phys. Rev. A **80**, 013813 (2009).
7. П. П. Гостев, С. А. Магницкий, А. С. Чиркин, Квантовая электроника .**51**,925 (2021).
8. P. P.Gostev, S. A. Magnitskiy, and A. S. Chirkin, Phys. Rev. A **107**, 043710 (2023).
9. П. П. Гостев, С. А. Магницкий, А. С. Чиркин, *Метод счета фотонов в обратных задачах статистики фотоотсчетов*, Физфак МГУ, М. (2022).
10. M. Kumazawa, T. Sasaki, and M. Koashi, Opt. Express **27** (4), 5297 (2019).
11. Р. В. Захаров, О. В. Тихонова, УФН **193**(4), 406 (2023).
12. В. В. Самарцев, *Коррелированные фотоны и их применение,* Физматлит, М. (2013).
13. С. А. Магницкий, Д. Н. Фроловцев, *Квантовая оптическая томография поляризационных состояний бифотонов*, Физфак МГУ, М. (2022).
14. W. Vogel and D.-G. Welsch, *Quantum Optics*, Wiley, N.Y. (2006).