Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 9, с. 725 – 730 © 2025 г. 10 мая

Стабилизация атомов в сильном поле как способ усиления и генерации когерентного излучения в неравновесной лазерной плазме

А. В. Богацкая[1)], *А. М. Попов*[1)]

Физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 марта 2025 г.
После переработки 7 апреля 2025 г.
Принята к публикации 8 апреля 2025 г.

Исследуется возможность использовать явление стабилизации ридберговских атомов в интенсивных лазерных полях как способ создания плазменного канала с инверсной населенностью и последующей генерацией или усилением излучения. В рамках полуклассической теории лазерной генерации, основанной на совместном решении волнового уравнения для усиливаемого импульса и уравнения Неймана для матрицы плотности, описывающего газовую среду, проведен анализ процессов генерации и усиления излучения среднего инфракрасного диапазона частот в плазменном канале, созданном в газе фемтосекундным лазерным импульсом. Оценки показывают, что для типичных условий возникновения стабилизации и удержания населенностей в ридберговских состояниях коэффициент усиления для в среднем инфракрасном диапазоне частот может достигать $\sim 10^2$ см$^{-1}$, что позволяет получить импульсы пикосекундной длительности и мегаваттной интенсивности излучения.

DOI: 10.31857/S0370274X25050031, EDN: USPKIU

Введение. Неравновесная плазма широко используется для генерации и усиления когерентного излучения различных диапазонов частот (от терагерцового и дальнего инфракрасного (ИК) до вакуумного ультрафиолета (ВУФ) и мягкого рентгеновского излучения). При этом механизмы создания инверсной населенности, необходимые для получения усиливающей среды могут быть совершенно различными: самостоятельный или несамостоятельный разряд постоянного или переменного тока, химические реакции, рекомбинационные процессы в распадающейся и остывающей плазме, оптическая накачка с помощью лазерного излучения. В последние годы все больший интерес привлекает возможность получения генерации и усиления когерентного излучения различных частотных диапазонов в плазменных каналах (филаментах), созданных высокоинтенсивными фемтосекундными лазерными импульсами [1–6].

В данной работе анализируется принципиально новый подход к созданию среды с инверсной населенностью, основанный на явлении стабилизации атомов в сильном поле излучения. Суть этого явления, которая заключается в повышении устойчивости атомов по отношению к ионизации с ростом интенсивности воздействующего излучения, а также механизмы его возникновения подробно рассмотрены в монографии [7] и обзорах [8, 9]. В частности, высокой устойчивостью по отношению к ионизации обладают ридберговские атомы. Это явление было предсказано в [10] в рамках концепции интерференционной стабилизация (ИС). В случае, если атом изначально находится в основном состоянии, заселение и стабилизация ридберговских состояний в сильном лазерном поле возможны в результате многофотонной связи основного состояния атома с группой ридберговских состояний с определенной пространственной четностью (резонансы Фримана [11]), определяемой числом поглощенных фотонов [12, 13]. С другой стороны, заселение ридберговских состояний атомов при многофотонной ионизации было объяснено также в модели "подавленного туннелирования" (*frustrated tunneling*), предложенной в [14, 15], и развитой в ряде последующих работ [16–21]. В [22] было обращено внимание на тот факт, что модели ИС и "подавленного туннелирования" – есть описание одного и того же физического явления (удержания атомов в ридберговских состояниях в сильном поле излучения) в разных базисах стационарных состояний квантовой системы, а обе модели основаны на прямом численном интегрировании нестационарного уравнения Шредингера для атома в поле сильного излучения.

[1)]e-mail: annabogatskaya@gmail.com;
aalexander.m.popov@gmail.com

Многочисленные расчеты и эксперименты [12–27] показывают, что для достижения режима удержания значительной доли (обычно до 5–10 процентов) атомов в ридберговских состояниях в поле излучения TiSa лазера (или его второй гармоники) необходимы интенсивности излучения на уровне $\sim 10^{14}$ Вт/см^2 и выше при длительности импульсов в несколько десятков фемтосекунд. При этом в качестве газовой среды могут быть использованы как инертные газы, так и пары металлов, например, серебра [13] или калия [27]. В случае использования паров металлов, порядок многофотонности процесса меньше, что увеличивает долю атомов, удерживаемых в возбужденном состоянии. Например, в [13] доля удерживаемой в ридберговских состояниях населенности достигала 30 процентов. Расчеты показали, что во всех случаях происходит преимущественное заселение состояний со значениями главного квантового числа в диапазоне $n = 6-12$ и либо четными, либо нечетными значениями орбитального квантового числа в интервале $l = 0-6$. Что касается низколежащих возбужденных состояний, то их населенность оказывается близкой к нулю.

В [28] было обращено внимание на тот факт, что явление ИС приводит к инверсной населенности, которая может быть использована для усиления или генерации излучения в различных частотных диапазонах от среднего ИК до ТГц. В частности, инверсия наступает в системе ридберговских состояний, характеризующихся различной пространственной четностью. С другой стороны, инверсная населенность возникает также между группой ридберговских состояний и низколежащими возбужденными состояниями атомов, а в условиях опустошения основного состояния – между группой ридберговских состояний и основным состоянием атома. В этих случаях усиление/генерация излучения возможны в видимом/ультрафиолетовом (УФ) диапазонах частот. Целью данной работы является последовательное рассмотрение самосогласованной задачи, включающей анализ динамики инверсной населенности в среде и распространение и усиление сигнала. Приведенные результаты описывают усиление затравочного импульса, однако авторы полагают, что данный механизм может быть применен для рассмотрения генерации излучения.

Модель и обсуждение результатов. В данной работе в рамках полуклассической теории лазеров рассматривается процесс усиления излучения дальнего или среднего ИК диапазона частот на совокупности переходов между ридберговскими состояниям атомов, заселенных в режиме ИС при воздействии на газ мощного фемтосекундного лазерного импульса. Импульс излучения фемтосекундного лазера распространяется по газовой среде в положительном направлении оси z, в его "хвосте" образуется плазменная среда, которая и служит активной средой для лазерной генерации.

Заметим, что ридберговские состояния всех атомов являются водородоподобными и их спектр приближенно описывается формулой Бальмера. Поэтому в дальнейшем мы будем опираться на расчеты динамики фотоионизации и возбуждения атомов водорода [12] и использовать значения энергетических интервалов и матричных элементов дипольного оператора, соответствующие атому водорода. Данные по вероятностям спонтанных переходов между ридберговскими состояниями с энергиями переходов, лежащими в среднем ИК диапазоне частот, для различных атомов (водорода, неона, ксенона, калия) можно найти в [29]. Эти данные подтверждают, что эти вероятности для разрешенных переходов, действительно, имеют один порядок величины и лежат в интервале $\sim 10^5-10^6$ с$^{-1}$.

В дальнейшем для описания эволюции населенности ридберговских состояний атомов мы будем использовать приближение двухуровневой системы, когда группы ридберговских состояний с определенной четностью (населенные и не населенные) объединяются в пару состояний с суммарными значениями населенностей n_1 и n_2. Для определенности в дальнейшем мы будем использовать в качестве частоты перехода величину $\hbar\omega_0 = 0.1175\mathrm{Ry} \approx 0.16$ эВ, соответствующую переходу $n = 6 \rightarrow n = 5$ в атоме водорода.

Для описания динамики населенностей n_1 и n_2 будем использовать уравнение Неймана в формализм матрицы плотности $\rho_{i,j}$ $(i, j = 1, 2)$. В этом случае диагональные элементы матрицы плотности описывают населенности связанных состояний $n_1 = \rho_{11}$, $n_2 = \rho_{22}$, а недиагональные элементы определяют поляризацию системы

$$P = d_{21}(\rho_{12} + \rho_{21}), \tag{1}$$

где d_{21} – матричный элемент дипольного оператора, связывающий состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$. Введем величину разности населенностей

$$N = n_1 - n_2. \tag{2}$$

Случай $N < 0$ означает наличие инверсной населенности, которая возникает к концу лазерного воздействия.

Динамику усиления/генерации излучения в такой системе будем описывать в рамках полуклассической теории лазера [30]. В одномерном приближении уравнение для поля генерируемой волны (поле мы считаем линейно поляризованным) записывается в виде

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial j}{\partial t}. \quad (3)$$

Здесь поляризация P определяется соотношением (1), P_0 описывает вклад в поляризацию нейтральных атомов, оставшихся в основном состоянии (в дальнейшем этим слагаемым мы пренебрегаем), а j – ток, вызываемый свободными электронами.

Уравнения для разности населенностей N и поляризации среды в приближении двухуровневой системы в каждой пространственной точке среды записываются в виде [30, 31]

$$\ddot{P} + \frac{2}{T_2}\dot{P} = \frac{2\omega_0|d_{21}|^2}{\hbar}EN, \quad (4)$$

$$\dot{N} + \frac{N-N_0}{T_1} = -\frac{2}{\hbar\omega_0}E\dot{P}. \quad (5)$$

Здесь ω_0 – частота перехода между уровнями, T_1 и T_2 – времена релаксации населенностей и поляризации, N_0 – равновесное значение разницы населенностей, которое в случае начальной инверсии между ридберговскими состояниями мы полагаем равным нулю. Как правило, $T_1 > T_2$.

Система уравнений (3)–(5) является основой полуклассической теории генерации когерентного излучения в случае однородного уширения [30, 31]. В условиях распространения в газе мощного импульса фемтосекундного лазера (длительность импульса меньше, чем характерное время различных релаксационных процессов) на конец лазерного воздействия среда будет характеризоваться не только наличием инверсии, но и макроскопической поляризации, которая, наряду со спонтанными переходами, в соответствии с (3) может привести к раскачке поля излучения.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением среды с инверсией как усилителя излучения с частотой ω, равной частоте атомного перехода $\omega = \omega_0$. Будем считать, что концентрация электронов существенно меньше критической для частоты перехода, а усиливаемый импульс содержит достаточно много периодов поля волны. Тогда в приближении медленно меняющихся амплитуд (ММА)

$$E(z,t) = E_0(z,t)\exp(i(kz-\omega t)). \quad (6)$$

Здесь $E_0(z,t)$ – амплитуда усиливаемого импульса, ω, $k=\omega/c$ – его частота и волновой вектор. Очевидно, функция $N(z,t)$ также является плавной функцией времени (мы полагаем, что $\omega T_1 \gg 1$), в то время как поляризация быстро осциллирует вместе с полем волны. Поэтому найдем поляризацию среды в виде

$$P = P_0\exp(i(kz-\omega t)). \quad (7)$$

Тогда

$$\dot{P}_0 = \frac{2\omega|d_{21}|^2}{\hbar}\frac{1}{\nu_2}NE_0. \quad (8)$$

Здесь $\nu_2 = 2/T_2$. Тогда уравнение (5) для разницы населенностей атомных состояний записывается в виде

$$\dot{N} = -\nu_1 N - 2c\sigma_{\rm ph}(I/\hbar\omega)N. \quad (9)$$

Здесь введены обозначения $\nu_1 = 1/T_1$, $I = c|E_0|^2/8\pi$ – интенсивность излучения, $\sigma_{\rm ph} = \frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{A_{12}}{\nu_2}$ – сечение фотопоглощения, A_{12} – коэффициент Эйнштейна спонтанного перехода, $\lambda = 2\pi/\omega$ – длина волны излучения на переходе $|2\rangle \to |1\rangle$. Первый член в правой части (9) описывает релаксацию разности населенностей за счет процессов в среде, а второй – взаимодействие с полем излучения.

Используя модель Друде, запишем выражение для тока свободных электронов в виде:

$$j = j_0\exp(i(kz-\omega t)),\ j_0 = \frac{e^2}{m}\frac{1}{\nu - i\omega}n_e E_0, \quad (10)$$

где n_e – концентрация электронов, ν – транспортная частота столкновений электронов в плазме.

Подставляя полученные выражения для поляризации и тока в уравнение (3) и вводя переменную $\xi = z - ct$, получим в приближении ММА уравнение для амплитуды поля волны

$$\frac{\partial E_0}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}\sigma_{\rm ph}NE_0 - \frac{2\pi e^2}{mc}\frac{1}{\nu - i\omega}n_e E_0, \quad (11)$$

или для интенсивности излучения

$$\frac{\partial I}{\partial \xi} = -\sigma_{\rm ph}NI - \mu_\omega I. \quad (12)$$

Здесь $\mu_\omega = \frac{4\pi e^2 n_e}{mc}\frac{\nu}{\omega^2+\nu^2}$ – коэффициент поглощения электромагнитного излучения в плазме. В случае инверсии ($N<0$) в плазменном образовании возможно усиление излучения при выполнении условия

$$\sigma_{\rm ph}|N| > \mu_\omega. \quad (13)$$

Проведем численные оценки. Прежде всего определим подходящие параметры газовой среды, пригодной для создания инверсной населенности. Мы будем ориентироваться на переход $n=6 \to n=5$ с энергией кванта $\hbar\omega = 0.01175\mathrm{Ry} \cong 0.16$ эВ и соответствующей длиной волны $\lambda \cong 7.8$ мкм. Оценим характерный размер атома для квантового числа $n=6$ как

$2a_0 n^2 \approx 72 a_0 = 38$ А (a_0 – боровский радиус). Чтобы можно было говорить о газе свободных атомов, будем считать, что среднее межатомное состояние в несколько раз превышает этот размер, т.е. оказывается порядка $\langle r\rangle \cong 10^{-6}$ см. Тогда плотность газа не может быть больше $N_{\rm at} \sim \langle r\rangle^{-1/3} \sim 10^{18}\,\text{см}^{-3}$. В дальнейшем мы будем считать, что начальная концентрация нейтрального газа $N_{\rm at} = 10^{17}\,\text{см}^{-3}$. Расчеты показывают, что в режиме стабилизации при воздействии на такой газ фс-импульсом TiSa – лазера (или его второй гармоники) может быть сформирован плазменный канал со степенью ионизации, близкой к единице и концентрацией ридберговских атомов на уровне до 5–10 процентов от концентрации газа. В дальнейшем, в качестве величины инверсной населенности возьмем $N = 0.03 N_{\rm at} \cong 3\times 10^{15}\,\text{см}^{-3}$, полагая что только часть образовавшихся ридберговских атомов создает инверсию на рассматриваемом переходе.

Приведенных данных достаточно для оценки коэффициента поглощения электромагнитного излучения на электронах плазмы. Считая энергию электронов порядка $\varepsilon \sim 2$ эВ, оценим частоту кулоновских столкновений электронов в плазме $\nu = N_{\rm at}\sigma_{ei}\sqrt{2\varepsilon/m} \sim 5\times 10^{11}\,\text{с}^{-1}$ (здесь σ_{ei} – сечение кулоновских столкновений). Тогда

$$\mu_\omega \approx \frac{4\pi e^2 n_e \nu}{mc\omega^2} \sim 0.085\,\text{см}^{-1},$$

т.е. длина пробега излучения в такой плазме за счет поглощения на электронах континуума составляет ~ 10 см.

Оценим теперь реально достижимые значения коэффициента усиления.

$$k_{\rm amp} = \sigma_{\rm ph}|N| = \frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{A_{12}}{\nu_2}|N|. \tag{14}$$

Полагая, что значение инверсии $|N| = 3\times 10^{15}\,\text{см}^{-3}$, величина коэффициента Эйнштейна спонтанного перехода $A_{12} \sim 3\times 10^5\,\text{с}^{-1}$ [29], а релаксацию поляризации определяет транспортная частота столкновений электронов в плазме, т.е. $\nu_2 \cong \nu \sim 4.8\times 10^{11}\,\text{с}^{-1}$, получим $\sigma_{\rm ph} \cong 6\times 10^{-14}\,\text{см}^2$ и $k_{\rm amp} \sim 1.8\times 10^2\,\text{см}^{-1}$. Как видно, эта величина более, чем на три порядка больше, чем коэффициент поглощения, определяемый электронной компонентой плазмы. Поэтому в дальнейшем это поглощение мы не учитываем. Мы также можем пренебречь дифракционным расплыванием усиливаемого импульса, если дифракционная длина $L_D = kR^2$ меньше длины плазменного канала. Например, для радиуса канала ~ 0.3 мм имеем $L_D \sim 10$ см, что существенно превышает рассматриваемые ниже протяженности каналов.

Для описания динамики генерации нам также важно оценить время релаксации инверсной населенности $T_1 = 1/\nu_1$. Помимо спонтанных переходов на основное и низколежащие возбужденные состояния, характеризующиеся временами $\sim 10^{-5}$–10^{-7} с [29], тут может быть важно учитывать процессы ассоциативной ионизации и ионизации пеннинговского типа. Константы скоростей этих процессов имеют порядок $10^{-10}\,\text{см}^3\cdot\text{с}^{-1}$ [32–34], что приводит к оценке времени ионизации в таких процессах $T_1 \approx 10^{-7}$ с. Оценка скорости ионизации ридберговских состояний электронным ударом дает $T_1 \sim 10^{-11}$ с. Следовательно, скорость релаксации инверсии в (5) оценим как $\nu_1 \approx 10^{11}\,\text{с}^{-1}$.

Таким образом, в условиях генерации (усиления) излучения в плазменном канале динамика интенсивности излучения и инверсной населенности описывается системой уравнений

$$\frac{dI}{dt} = -\sigma_{\rm ph} N I, \tag{15}$$

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{c}\left(2_{\rm ph}\frac{I}{\hbar\omega} + \nu_1\right)N, \tag{16}$$

с начальными условиями

$$N(\xi = z - ct = 0) = N_0, \tag{17}$$

$$I(\xi = z - ct = 0) = I_0, \tag{18}$$

где $N_0 < 0$ – величина инверсной населенности, образующаяся после прохождения фс лазерного импульса, I_0 – начальное значение интенсивности излучения на частоте перехода $|2\rangle \to |1\rangle$ определяемое спонтанными шумами, или же начальное значение интенсивности усиливаемого импульса.

В общем случае система уравнений (15), (16) с начальными условиями (17), (18) должна решаться численно. В данной работе мы более подробно рассмотрим частный случай, когда релаксация инверсной населенности происходит медленнее, чем обмен энергией между атомной и полевой подсистемами (это условие выполнено, если $c\sigma_{\rm ph}N_0 \gg \nu_1$). В этом случае система уравнений приближенно (15), (16) допускает "интеграл движения":

$$I + \frac{c\hbar\omega}{2}|N| = \text{const} \approx I_{\max}. \tag{19}$$

Соотношение (19) фактически означает закон сохранения энергии: суммарная энергия, запасенная в поле и в газовой среде, есть величина постоянная. Используя выражение (19), нетрудно найти общее решение системы (15), (16). Например, для интенсивности излучения получим

$$\frac{dI}{d\xi} = \frac{2\sigma_{\rm ph}}{c\hbar\omega}(I_{\max} - I)I, \qquad (20)$$

откуда при выполнении условия $I_{\max} \gg I_0$, найдем

$$I(\xi = z - ct) \approx I_0 \frac{\exp(\sigma_{\rm ph} N_0 \xi)}{1 + (I_0/I_{\max})\exp(\sigma_{\rm ph} N_0 \xi)}. \qquad (21)$$

Начальный экспоненциальный рост интенсивности излучения сменяется выходом на стационарное значение $I_{\max}$ при значении аргумента

$$\xi^* = \frac{1}{\sigma_{\rm ph} N_0}\ln(I_{\max}/I_0), \qquad (22)$$

которое логарифмически слабо зависит от начальной затравочной интенсивности излучения. Оценивая достижимые интенсивности излучения с помощью (19) при $|N| = 3 \times 10^{15}$ см$^{-3}$, получим $I_{\max} \cong 10^6$ Вт/см^2. Интенсивность такого порядка может быть достигнута в канале длиной $\sim \xi^* \cong 0.1$ см (здесь мы полагали, что $I_0 \cong 1$ Вт/см^2). Такие протяженности плазменного канала должны быть сформированы импульсом излучения фемтосекундного лазера. “Медленная” релаксации инверсии на временах $\sim 1/\nu_1$ учитывается заменой величины N_0 в выражении (21) на функцию

$$N = N_0 \times \exp(-\nu_1/c\xi), \qquad (23)$$

что приведет к формированию импульса протяженностью в несколько миллиметров. Расчеты (см. рис. 1) динамики генерации, выполненные с учетом релаксации подтверждают оценки, приведенные выше.

Отметим, что представленная картина процесса генерации на переходах между ридберговскими состояниями атомов является упрощенной. Прежде всего, поскольку в результате лазерного воздействия заселяется совокупность ридберговских состояний с различными значениями главного квантового числа, усиление (генерация) излучения будут возможны на совокупности близко расположенных линий, которые могут частично перекрываться между собой, создавая излучение квазиконтинуума. С другой стороны, уширение спектра излучения будет сопровождаться уменьшением коэффициента усиления, определяемым величиной инверсии на каждом конкретном переходе. Кроме того, зависимость интенсивности излучения лазера накачки от радиальной координаты также может привести к обогащению генерируемого спектра ИК излучения, поскольку на различных удалениях от оси плазменного канала могут заселяться состояния с различной четностью и энергией [18].

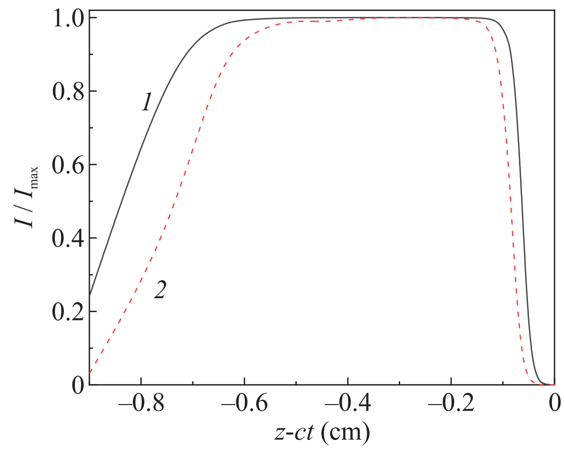

Рис. 1. (Цветной онлайн) Распределение интенсивности генерируемого (усиливаемого) излучения вдоль оси плазменного канала для различных значений отношения максимальной достижимой интенсивности излучения в канале $I_{\max}$ к затравочной интенсивности I_0. Кривые *1* и *2* соответствуют отношению $I_{\max}/I_0$, равному 10^4 и 10^6. Точка $= z - ct = 0$ задает положение фемтосекундного импульса

Такая картина процесса будет проанализирована в дальнейшем на основе численного интегрирования модели, основанной на уравнениях (3)–(5).

Заключение. Таким образом, в данной статье предлагается использовать инверсию населенностей между совокупностью ридберговских состояний атома, возникающую в результате явления ИС в сильных лазерных полях, для усиления и генерации излучения среднего и дальнего ИК диапазонов частот. Показано, что для типичных условий ИС коэффициент усиления для этого частотного диапазона может достигать $\sim 10^2$ см$^{-1}$, что позволяет получить импульсы пикосекудной длительности и мегаваттной интенсивности излучения. Мы также хотели бы отметить, что лазерный эффект, основанный на явлении ИС можно получить и в видимом/УФ диапазонах частот. При этом особый интерес может представлять эффект генерации в режиме ИС в процессе лазерного воздействия. В этом случае наличие динамического штарковского сдвига атомных состояний может привести к существенному повышению частоты генерации. Экспериментально обсуждаемый эффект, вероятно, можно наблюдать в филаментах, в том числе на достаточно большом расстоянии от источника, инициирующего плазменный канал лазерного излучения, и использовать для целей широкополосной дистанционной спектроскопии различных газовых сред.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Физического института имени П. Н. Лебедева Российской академии наук и Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

---

1. Q. Luo, A. Hosseini, W. Liu, and S. L. Chin, Optics and Photonics News **15**(9), 44 (2004).
2. S. Suckewer and P. Jaeglé, Laser Phys. Lett. **6**, 411 (2009).
3. A. Dogariu, J. B. Michael, M. O. Scully, and R. B. Miles, Science **331**(6016), 442 (2011).
4. I. R. Khairulin, V. A. Antonov, M. Yu. Ryabikin, and O. Kocharovskaya, Phys. Rev. Research **2**, 023255 (2020).
5. T. Garrett, J. Elle, M. White, R. Reid, A. Englesbe, R. Phillips, P. Mardahl, E. Thornton, J. Wymer, A. Janicek, O. Sale, and A. Schmitt-Sody, Phys. Rev. E **104**, L063201 (2021).
6. A. Englesbe, J. Elle, R. Schwartz, T. Garrett, D. Woodbury, D. Jang, K.-Y. Kim, H. Milchberg, R. Reid, A. Lucero, D. F. Gordon, R. Phillips, S. Kalmykov, and A. Schmitt-Sody, Phys. Rev. A **104**, 013107 (2021).
7. M. V. Fedorov, *Atomic and free electrons in strong light field*, World Scientific, Singapore (1997).
8. M. Gavrila, J. Phys. B **35**, R147 (2002).
9. A. M. Popov, O. V. Tikhonova, and E. A. Volkova, J. Phys. B **36**, R125 (2003).
10. M. V. Fedorov and A. M. Movsesian, J. Phys. B **21**, L155 (1988).
11. R. R. Freeman, P. H. Bucksbaum, H. Milchberg, S. Darack, D. Schumacher, and M. E. Geusic, Phys. Rev. Lett. **59**, 1092 (1987).
12. A. M. Popov, O. V. Tikhonova, and E. A. Volkova, Laser Phys. **20**, 1028 (2010).
13. Е. А. Волкова, А. М. Попов, О. В. Тихонова, ЖЭТФ **140**(3), 450 (2011).
14. T. Nubbemeyer, K. Gorling, A. Saenz, U. Eichmann, and W. Sandner, Phys. Rev. Lett. **101**, 233001 (2008).
15. U. Eichmann, T. Nubbemeyer, H. Rottke, and W. Sandner, Nature **461**, 1261 (2009).
16. U. Eichmann, A. Saenz, S. Eilzer, T. Nubbenmeyer, and W. Sandner, Phys. Rev. Lett. **110**, 203002 (2013).
17. H. Zimmermann, S. Patchkovskii, M. Ivanov, and U. Eichmann, Phys. Rev. Lett. **118**, 013003 (2017).
18. H. Zimmermann, S. Meise, A. Khujakulov, A. Magaña, A. Saenz, and U. Eichmann, Phys. Rev. Lett. **120**, 123202 (2018).
19. S. V. Popruzhenko, J. Phys. B **51**, 014002 (2018).
20. U. Eichmann and S. Patchkovskii, Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics **72**, 1 (2023).
21. S. Hu, X. Yi, L. Guo, C. Bi, and J. Chen, Phys. Rev. A **107**, 033104 (2023).
22. A. M. Popov, O. V. Tikhonova, and E. A. Volkova, J. Phys. B **47**, 204012 (2014).
23. L. Fechner, N. Camus, A. Krupp, J. Ullrich, Th. Pfeifer, and R. Moshammer, Phys. Rev. A **92**, 051403(R) (2015).
24. H. Lv, J.-F. Zhang, W.-L. Zuo, H.-F. Xu, M.-X. Jin, and D.-J. Ding, Chin. Phys. B **24**, 063303 (2015).
25. H. Zimmermann, J. Buller, S. Eilzer, and U. Eichmann, Phys. Rev. Lett. **114**, 123003 (2015).
26. P. Xin, T. Qiu, L. Chen, H. Ma, and H. Liu, J. Opt. Soc. Am. B **38**(4), 1031 (2021).
27. F. Morales, M. Richter, S. Patchkovskii, and O. Smirnova, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **108**, 16906 (2011).
28. A. V. Bogatskaya and A. M. Popov, Laser Phys. Lett. **12**, 045303 (2015).
29. https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html.
30. O. Zvelto, *Principles of lasers*, Tamburini Editore, Milan (1972).
31. С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин, *Физическая оптика*, Наука, М. (1998).
32. Е. Л. Думан, И. П. Шматов, ЖЭТФ **78**, 2116 (1980).
33. R. K. Janev and A. A. Mihajlov, Phys. Rev. A **21**, 819 (1980).
34. A. A. Mihailov and R. K. Janev, J. Phys. B **14**, 1639 (1981).