Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 9, с. 749 – 759 

# Аномальная сверхпроводимость и необычные свойства нормального состояния двухслойного и подкрученного графена (Миниобзор)

*М. Ю. Каган*[+*1)], *М. М. Коровушкин*[×], *В. А. Мицкан*[×], *К. И. Кугель*[◦+], *А. Л. Рахманов*[◦∇], *А. В. Рожков*[◦], *А. О. Сбойчаков*[◦]

[+] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 101000 Москва, Россия*

[*] *Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН, 119334 Москва, Россия*

[×] *Институт физики им. Л. В. Киренского, Федеральный исследовательский центр "Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук", 660036 Красноярск, Россия*

[◦] *Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, 125412 Москва, Россия*

[∇] *Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова, 127055 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 1 апреля 2025 г.
После переработки 2 апреля 2025 г.
Принята к публикации 2 апреля 2025 г.

В обзоре на основе результатов работ авторов в системах с гексагональной решеткой продемонстрирована возможность реализации механизма сверхпроводимости Кона–Латтинжера в условиях его конкуренции с другими типами упорядочения, а также рассмотрен ряд необычных свойств отмеченных систем в нормальной фазе. В первой части представлены наши ранние результаты по сверхпроводимости Кона–Латтинжера с $p$-, $d$- и $f$-спариванием в монослойном и двухслойном AB графене, полученные без учета влияния потенциала подложки и примесей. Затем подробно обсуждается конкуренция сверхпроводящего состояния Кона–Латтинжера с состоянием волны спиновой плотности в реальных AB, AA и подкрученном бислоях графена. В последних частях представлены результаты по ряду аномальных свойств в нормальной фазе и возникновению нематической сверхпроводимости вблизи волны спиновой плотности в двухслойном подкрученном графене.

DOI: 10.31857/S0370274X25050076, EDN: DDCNHB

**1. Введение.** С момента своего открытия графен привлекает к себе внимание необычными электронными свойствами [1–8]. Экспериментальные исследования двухслойного графена и открытие в 2018 г. сверхпроводимости в подкрученном под магическим углом двухслойном графене [9], содержащем двухслойные фрагменты в AB и AA модификациях вблизи магических углов подкручивания, стимулировало появление большого числа теоретических работ как в нашей стране, так и за рубежом по аномальным (нефононным) механизмам сверхпроводимости в графене и в родственных соединениях (см. обзор [10] и ссылки в нем), включая механизм Кона–Латтинжера [11–16].

Возможность реализации аномальных механизмов сверхпроводимости в графене связана в первую очередь с сильными электронными корреляциями в данной системе и во многом обусловлена наличием дираковских точек в спектре графена. Вблизи этих точек энергетический спектр линеен и электроны могут описываться уравнением Дирака для безмассовых заряженных квазичастиц. В результате возникают мощные электрон-поляронные эффекты [7, 8], резко усиливающие электронные корреляции. Это обстоятельство дает надежду на реализацию в графене механизмов сверхпроводимости, основанных на электрон-электронном взаимодействии.

Отметим, что механизм Кона–Латтинжера является базовым механизмом нефононной сверхпроводимости в сильно коррелированных электронных системах с отталкиванием и конкурирует с плазмонным механизмом Фрелиха [17] в системах с малой электронной плотностью. Для механизма сверхпроводимости Кона–Латтинжера частотные эффекты, связанные с запаздыванием, не играют доминирующей роли, в то время как решающую роль играет наличие коновской особенности [18] (фриделевских осцилляций [19]) в эффективном взаимодей-

1)e-mail: kagan@kapitza.ras.ru

ствии двух электронов куперовской пары через поляризацию фермиевского фона (см. рис. 1). Фактически, механизм Кона–Латтинжера предполагает превращение затравочного отталкивательного взаимодействия двух частиц в вакууме при наличии ферми-фона (заполненной сферы Ферми) в эффективное притяжение в веществе в канале с ненулевым орбитальным моментом куперовской пары.

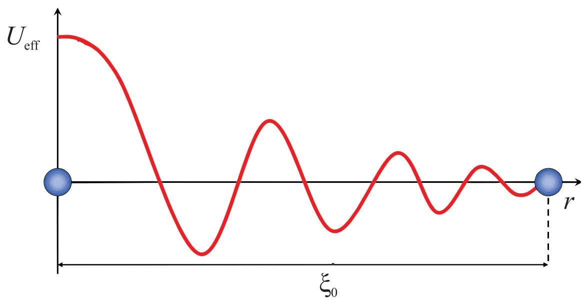


Рис. 1. (Цветной онлайн) Фриделевские осцилляции в эффективном взаимодействии двух частиц вследствие поляризации фермиевского фона, где $\xi_0$ – длина когерентности куперовской пары [10, 20, 30]

Наши результаты более ранних лет по механизму Кона–Латтинжера [20–29] были представлены в обзоре в УФН [10] по аномальной сверхпроводимости в электронных системах с отталкиванием. Они касаются в первую очередь электронных систем малой плотности, описываемых моделью Хаббарда или моделью ферми-газа с чисто отталкивательным затравочным взаимодействием. При этом в эффективном взаимодействии двух частиц через поляризацию фермиевского фона во всех каналах с ненулевым моментом куперовской пары возникает притяжение, и наиболее притягательная гармоника отвечает триплетному $p$-спариванию [12, 13]. Более того, критическая температура $p$-спаривания может быть существенно повышена в спин-поляризованном ферми-газе или в двухзонной ситуации, приводя к разумным значениям $T_c = 1-5$ K [14, 16, 20, 22, 24]. При этом возникает возможность усилить коновскую особенность в трехмерном случае. Но, что еще более важно, в случае, когда энергетическая зона становится почти плоской, возможно сделать сильную, но одностороннюю (корневую) коновскую особенность эффективной для задачи о сверхпроводимости уже во втором порядке теории возмущений. Отметим, что в соответствии с результатами авторов [10, 20, 30] для реализации $p$-спаривания коновская особенность играет важную, но не доминирующую роль. В более общем случае достаточно лишь, чтобы эффективное (или экранированное) взаимодействие возрастало на интервале от 0 до $2p_F$. Отметим также, что в отталкивательных моделях на двумерной квадратной решетке, таких как модель Хаббарда с отталкиванием, естественным образом в широкой области электронных концентраций возникает также $d_{xy}$-спаривание, а при больших электронных плотностях (ближе к половинному заполнению) реализуется $d_{x^2-y^2}$-спаривание, актуальное для купратных сверхпроводников [20, 21, 30].

**2. Сверхпроводимость в монослое и идеализированном бислое графена.** Более поздние результаты нашей группы по механизму Кона–Латтинжера на решетке [7, 8, 10, 31–39] в купратных и железосодержащих сверхпроводниках, а также в монослое и идеализированном AB бислое графена относятся к периоду 2011–2016 гг. (см. также результаты Чубукова и др. [40–44]). В этих работах в рамках наиболее отталкивательной базовой модели Шубина–Вонсовского [45] (или расширенной модели Хаббарда) с хаббардовским отталкиванием $U$ на узле и дополнительным кулоновским отталкиванием $V_1$ и $V_2$ на разных узлах квадратной решетки с учетом дальних перескоков были построены фазовые диаграммы сверхпроводящего состояния для купратных и железосодержащих сверхпроводников, обобщающие наши более ранние результаты по $p$- и $d$-спариванию в модели Хаббарда [33, 34] (см. рис. 2).

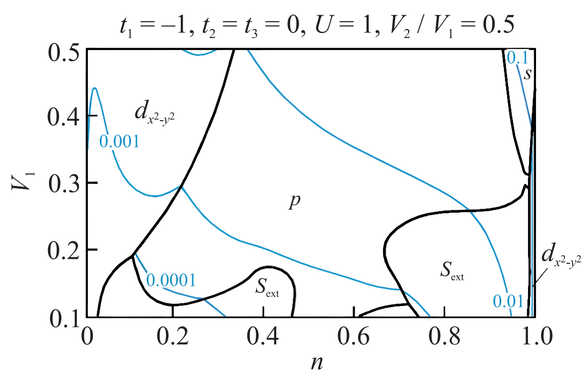


Рис. 2. (Цветной онлайн) Фазовая диаграмма $n-V_1$ модели Шубина–Вонсовского на квадратной решетке, построенная для параметров $t_2 = t_3 = 0$, $U = |t_1|$ и соотношения $V_2/V_1 = 0.5$. Тонкие кривые соответствуют линиям постоянного значения константы связи $|\lambda|$ [34]

Результаты работ по механизму Кона–Латтинжера на квадратной решетке были также обобщены нами на гексагональную решетку графена. В работах [35, 36] в рамках модели Шубина–Вонсовского нами была построена фазовая диаграмма для идеализированного монослоя графена, содержащая при различных электронных

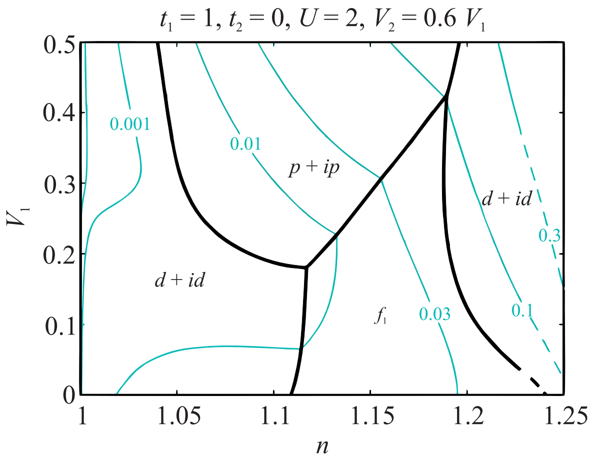


Рис. 3. (Цветной онлайн) Фазовая диаграмма $n$–$V_1$ сверхпроводящего состояния монослоя графена при $U = 2$ и $V_2 = 0.6V_1$ (все параметры в единицах $|t_1|$) [10, 35, 36]

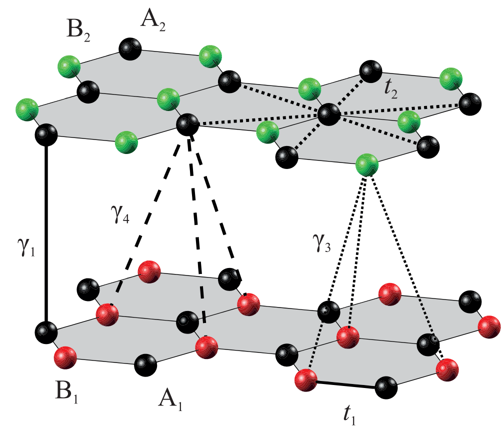


Рис. 4. (Цветной онлайн) Кристаллическая структура бислоя AB графена, где A и B обозначают подрешетки слоев. Здесь $t$ и $\gamma$ – внутрислоевые и межслоевые перескоки, которым соответствуют кулоновские взаимодействия $V$ и $G$ [10, 37, 38]

концентрациях участки триплетного спаривания с $p_x + ip_y$ и $f$-симметриями, а также небольшие участки синглетного $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ спаривания [10, 35, 36] (см. рис. 3).

Далее последовали наши работы по механизму сверхпроводимости Кона–Латтинжера и его возможному усилению для двухслойного AB графена (см. рис. 4) [10, 37, 38]. Также в рамках модели Шубина–Вонсовского с учетом дальних перескоков и кулоновских взаимодействий в слое и между слоями (наряду с хаббардовским взаимодействием) нами было продемонстрировано увеличение критической температуры для $f$-спаривания и кирального $d+id$-спаривания. Вычисления были выполнены в борновском приближении во втором порядке теории возмущений по взаимодействию в идеализированной модели AB бислоя графена.

Соответствующая фазовая диаграмма сверхпроводящего состояния приведена на рис. 5. На ней видны протяженные области, отвечающие киральному $d + id$-спариванию и $f$-спариванию (наряду с небольшими областями кирального $p + ip$-спаривания).

Необходимо отметить, что в этом цикле работ мы пренебрегали возможной конкуренцией сверхпроводимости с другими неустойчивостями в монослое и AB бислое графена, а также рассматривали чистый предел в отсутствие примесей и дефектов, к которым очень чувствительно анизотропное спаривание с ненулевым орбитальным моментом. В результате возникает естественный вопрос о том, что произойдет с эффективностью различных механизмов сверхпроводимости при переходе от идеализированного к реальному двухслойному графену.

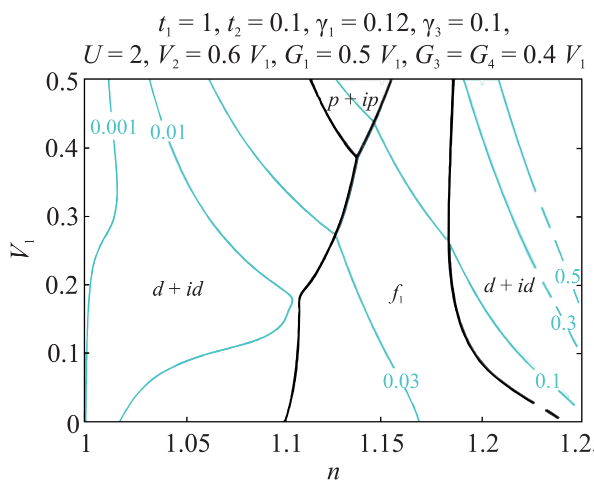


Рис. 5. (Цветной онлайн) Фазовая диаграмма $n$–$V_1$ сверхпроводящего состояния идеализированного AB бислоя графена, полученная в модели Шубина–Вонсовского при учете дальних перескоков в слое и между слоями и кулоновских взаимодействий на соседних и следующими за соседними узлах [10, 37, 38]

**3. Конкуренция сверхпроводимости и волны спиновой плотности в реальных AB и AA бислоях графена, а также в подкрученном графене.** Отметим, что существенный прогресс в исследовании аномальных механизмов сверхпроводимости, и в частности механизма Кона–Латтинжера в различных модификациях реального (не идеализированного) двухслойного графена, а также очень популярного в настоящее время подкрученного графена, был связан с последними работами авторов данного обзора [5–8, 46–50].

Подчеркнем, что в реальном графене механизм сверхпроводимости Кона–Латтинжера конкурирует с другими неустойчивостями в системе, такими как образование волны спиновой плотности (ВСП). Эта конкуренция существенно уменьшает критические температуры сверхпроводящего перехода в сравнении с ситуацией в идеализированных бислоях.

Следует отметить, что в двухслойном и особенно в подкрученном графене необходимо анализировать и другие механизмы сверхпроводимости, в первую очередь механизм Элиашберга для сильного электрон-фононного взаимодействия [8], а также более экзотические механизмы типа БКШ–БЭК кроссовера между протяженными и локальными куперовскими парами [9].

*A. Эксперимент.* Экспериментальное наблюдение сверхпроводимости в системе на основе графена было впервые описано в 2018 г. в работе [9], где была очерчена область параметров, внутри которой в подкрученном двуслойном графене возникало сверхпроводящее состояние. Сверхпроводящий образец подкрученого графена характеризовался углом подкрутки $\theta$, близким к "магическому": $\theta \approx 1^{\circ}$, а сверхпроводимость возникала в нем лишь при определенных значениях легирования. Соответствующая критическая температура $T_c$ была разной у разных образцов, но никогда не превосходила $T_c \approx 1.7$ К. После 2018 года экспериментальная работа по обнаружению сверхпроводимости в системах на основе графена заметно активизировалась. Были найдены сверхпроводящие состояния в ромбоэдрическом трехслойном графене [51], а также в трехслойном графене с муаром [52, 53]. В 2022 году в статье [54] сообщалось об обнаружении сверхпроводимости в двуслойном AB графене. Критическая температура в AB графене (в отличие от предварительных оптимистичных оценок) составляла в этом эксперименте всего лишь $T_c \sim 30$ мК. К тому же для стабилизации сверхпроводимости потребовалось не только легировать образец, но и приложить электрическое и магнитное поле. Последнее обстоятельство явно указывало на необычный параметр порядка и сильную конкуренцию различных неустойчивостей в реальном (не идеализированном, как в работах [37, 38]) AB графене.

*B. Теория.* Обсуждая механизм сверхпроводимости, Кона–Латтинжера [11] или любой другой, в реальных графеновых системах, стоит помнить, что сверхпроводимость в таких материалах будет конкурировать или же сосуществовать с диэлектрическим упорядоченным состоянием (например, с ВСП или ее аналогом). Условия этой конкуренции/сосуществования обязательно наложат отпечаток на функционирование сверхпроводящего механизма, а также на его феноменологические проявления. Для иллюстрации этой идеи мы рассмотрим сценарий возникновения сверхпроводимости в двухслойном AB графене, обсуждавшийся в работе [47]. В качестве стартовой теоретической позиции здесь обосновывается утверждение о том, что нелегированный AB графен при $T = 0$ представляет собой так называемый "слоевой антиферромагнетик". Данное упорядоченное многочастичное состояние, при котором каждый слой обладает конечной спиновой намагниченностью, но намагниченности слоев взаимно противоположны, давая в сумме нуль, является специфической формой ВСП.

Изучение как сверхпроводимости, так и фазы ВСП, строится в [48] на методе среднего поля (в режиме $T = 0$ такой подход не противоречит теореме Мермина–Вагнера–Хоенберга, которая сформулирована лишь для $T > 0$). Еще одно важное теоретическое допущение – применимость приближения хаотических фаз (ПХФ) для определения экранированного (эффективного) кулоновского взаимодействия. Такое приближение часто критикуют как неконтролируемое, однако для систем на основе графена принято обосновывать допустимость ПХФ тем, что дополнительное вырождение по долинному квантовому числу увеличивает множитель перед диаграммами ПХФ с двух (за счет вырождения по спину) до четырех (за счет спина и долин).

В качестве первого шага необходимо, используя ПХФ, провести численный расчет экранированного взаимодействия между электронами в двухслойном графене. Вычисления следует проводить как для внутрислоевого взаимодействия, так и для межслоевого. Следующий шаг состоит в выборе параметра порядка и выводе эффективного гамильтониана в приближении среднего поля. Затем вычисляется свободная энергия системы, минимизируя которую можно найти величину параметра порядка. В рамках такого формализма был рассчитан параметр порядка для ВСП в нелегированном AB графене, который оказался равен $\Delta^{\text{SDW}} \approx 4.9$ мэВ, что неплохо согласуется с экспериментальными данными по транспортной щели [55].

Данная оценка ясно дает понять, что без "посторонней помощи" сверхпроводимость не сможет успешно конкурировать с таким состоянием. Действительно, характерный энергетический масштаб ВСП много больше 30 мК, соответствующих сверхпроводимости. К тому же ВСП в AB графене является диэлектрической фазой, что означает полное отсутствие одноэлектронных состояний на уровне Ферми. Это исключает возможность сосуществования двух фаз.

Чтобы обосновать подавление ВСП с последующей стабилизацией сверхпроводимости, в работе [47] была изучена ситуация, когда к легированному образцу приложено электрическое поле, направленное по нормали к плоскости образца. Такое воздействие приводит к разрушению ВСП и возникновению открытой поверхности Ферми вблизи особенности ван Хова. Наличие поверхности Ферми, возникшей из-за легирования, принципиальным образом меняет экранировку кулоновского потенциала. Расчет по методу ПХФ показывает, что эффективное взаимодействие сильно подавлено при малых переданных импульсах, а также становятся видны коновские аномалии [18]. Графики, показывающие взаимодействие как функцию переданного импульса, показаны на рис. 6.

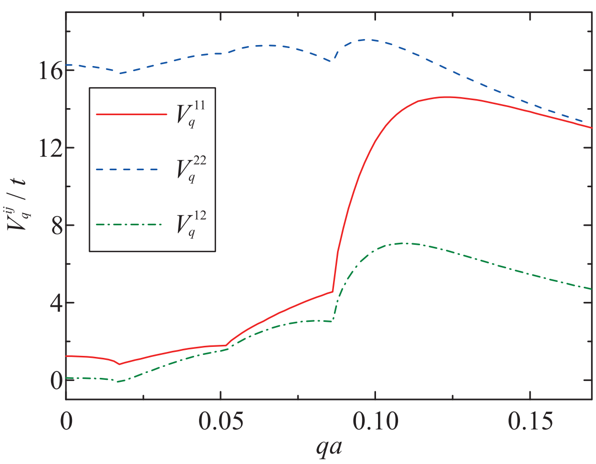


Рис. 6. (Цветной онлайн) Экранированное взаимодействие в двухслойном AB графене $V_{\mathbf{q}}^{ij}$, где $i, j = 1, 2$ – номер слоя, а $\mathbf{q}$ – переданный импульс. По горизонтальной оси отложена безразмерная величина $qa$, где $a$ – элементарная длина, а $q = |\mathbf{q}|$. Три излома на графиках – особенности Кона (три особенности вместо привычной одной возникли из-за сложной структуры поверхности Ферми в легированной системе). Из-за выраженного экранирования $V_{\mathbf{q}}^{ij}$ при малых $q$ сильно подавлены. Сверхпроводимость возникает из-за (немонотонного) возрастания взаимодействия при малых переданных импульсах

Можно ли в такой ситуации стабилизировать сверхпроводимость без участия фононов, исключительно на кулоновском взаимодействии? Вычисления в приближении среднего поля для триплетного параметра порядка демонстрируют, что можно. Оценка критической температуры $T_c \approx 23$ мК, приведенная в работе [47], неплохо согласуется с имеющимися экспериментальными данными [54]. Стоит также отметить, что триплетная структура параметра порядка, полученная в рамках такого подхода, указывает на сильную устойчивость сверхпроводимости по отношению к зеемановскому полю (магнитному полю, параллельному плоскости образца). Существующие экспериментальные данные [54], косвенно подтверждают факт такой устойчивости.

Авторы работы [48] указывали на связь предложенного ими способа расчета сверхпроводящих свойств с механизмом Кона–Латтинжера [11]. В частности, ими было отмечено, что, хотя вычисления по теории возмущений, подобные классической формулировке Кона и Латтинжера, и не появляются в работе [49], для стабилизации сверхпроводящего параметра порядка в реальном двухслойном AB графене принципиальной оказывается роль поляризационного оператора, возникающего естественным образом в методе ПХФ. Именно учет поляризационного оператора приводит к подавлению взаимодействия при малых переданных импульсах, см. рис. 6. Из вычислений явно следует, что именно такая сильно немонотонная форма зависимости взаимодействия от импульса и становится непосредственной причиной возникновения триплетного сверхпроводящего параметра порядка.

Подобная программа рассмотрения сверхпроводимости была применена в работе [50] к двухслойному AA графену (рис. 7). Оказалось, что механизм сверхпроводимости, основанный исключительно на кулоновском взаимодействии, не обеспечивает сколь-нибудь заметной критической температуры. Это связано с малой плотностью состояний на поверхности Ферми исследованной системы. Сравнивая, например, AA графен с AB графеном, рассмотренным выше, можно обнаружить, что для двуслойного графена с AB упаковкой плотность состояний увеличивается подстройкой легирования и электрического поля, обеспечивающей выход особенности ван Хова на уровень Ферми. В модели же AA графена, изученной в работе [51], такой возможности влиять на плотность состояний обнаружено не было.

Завершая обсуждение AA графена, хотелось бы напомнить, что этот тип двуслойного графена является, наверное, наименее изученным [5]. Несмотря на наличие образцов [56–60] и теоретических исследований [46, 48, 61, 62], популярность AB графена остается недостижимым пределом для его AA собрата.

**4. Необычные нормальные свойства двухслойного подкрученного графена.** Помимо двух простых конфигураций укладки бислоя графена, называемых AA (рис. 7) и AB (рис. 4), существует еще

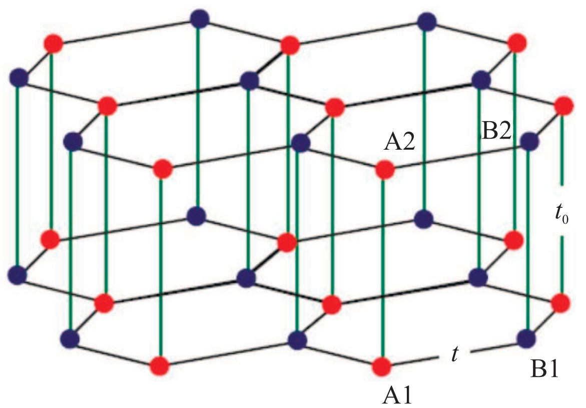


Рис. 7. (Цветной онлайн) Кристаллическая структура AA графена, состоящая из двух подрешеток A (красные кружки) и B (синие кружки). Ячейка кристаллической структуры включает четыре атома A1 и B1 в нижнем (1) слое и A2 и B2 в верхнем (2) слое

одна конфигурация укладки (точнее, их набор), называемая подкрученным бислоем графена (рис. 8). Такой материал в настоящее время привлекает большое внимание как теоретиков, так и экспериментаторов.

Отметим, что достаточно повернуть графеновые слои относительно друг друга на небольшой угол, как сразу же возникнет модулированная структура, напоминающая муаровый узор на некоторых шелковых тканях. При малых углах поворота элементарная ячейка такой муаровой сверхрешетки может быть очень большой (до нескольких тысяч атомов).

Муаровый узор можно визуализировать с помощью сканирующей туннельной микроскопии (*scanning tunneling microscopy*, STM) [63, 64]. Измерив период муара $L$, можно определить угол подкручивания $\theta$ по формуле

$$L = \frac{a}{2\sin(\theta/2)}\,, \tag{1}$$

где $a$ – длина базисного вектора кристаллической решетки графена. Муаровый узор возникает для произвольного угла подкручивания, однако теоретики рассматривают в основном так называемые соизмеримые углы, когда система имеет периодическую сверхструктуру. Также можно показать, что в случае достаточно малого угла подкручивания, сверхячейку подкрученного графена можно рассматривать как состоящую из областей с почти AA, AB и BA укладками.

Низкоэнергетические электронные свойства подкрученного двухслойного графена существенно зависят от угла подкручивания. Когда этот угол не слишком мал, электронный спектр при низких энергиях

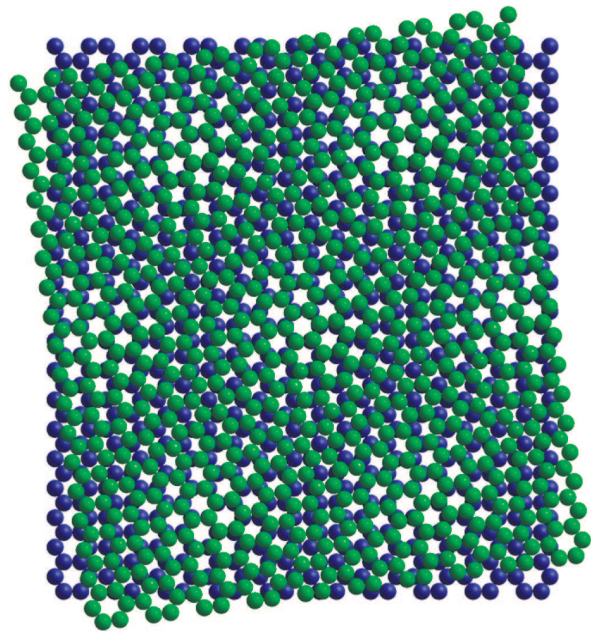

Рис. 8. (Цветной онлайн) Кристаллическая структура подкрученного бислоя графена, при повороте одного из слоев на угол $\theta = 8^\circ$

состоит из двух дважды вырожденных конусов Дирака, расположенных в двух неэквивалентных точках Дирака зоны Бриллюэна сверхрешетки. Эти конусы Дирака пересекаются при более низких и более высоких энергиях, образуя низкоэнергетические особенности ван Хова. Скорость Ферми у этих конусов Дирака меньше, чем в однослойном графене. Она уменьшается с уменьшением угла подкручивания. Это уменьшение скорости Ферми может быть значительным, но образец остается полуметаллом. Однако при так называемом первом магическом угле система приобретает поверхность Ферми даже в точке зарядовой нейтральности.

Спектр при повороте на магический угол состоит из четырех почти плоских зон (см. рис. 9), отделенных от низшей и высшей дисперсионных полос энергии энергетическими щелями. Ширина плоских зон имеет минимум при магическом угле. Теоретические предсказания и экспериментальные наблюдения показывают, что значение первого магического угла мало и составляет $\theta_c \approx 1.08^\circ$ [7–9].

Существенный шаг в изучении подкрученного бислоя графена был сделан в работах [9, 65]. Авторам этих работ удалось разработать технологию изготовления устройств, в которых угол поворота слоев можно контролировать с точностью до десятых долей градуса. В этих устройствах двухслойный графен помещался в структуру, позволяющую контро-

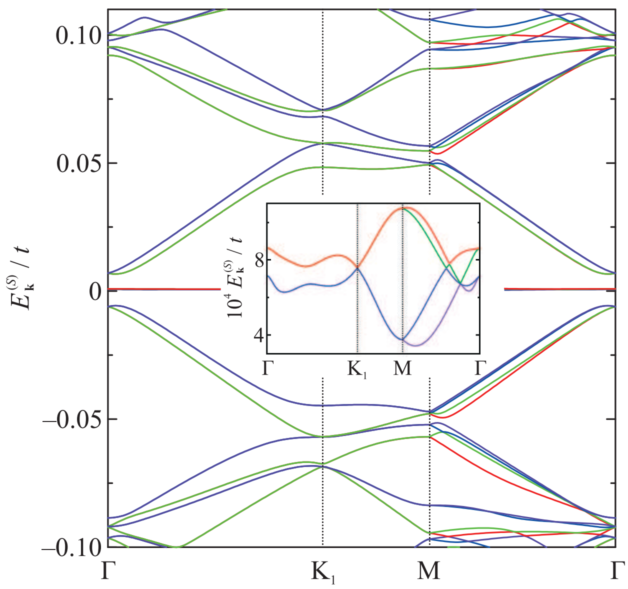


Рис. 9. (Цветной онлайн) Энергетический спектр подкрученного двухслойного графена при сверхструктуре под магическим углом. Вблизи нулевой энергии наблюдаются четыре плоские зоны, разделенные энергетическими щелями от более низко и более высоко расположенных дисперсионных энергетических зон. На вставке показаны дисперсии плоских зон в увеличенном масштабе [7, 8]

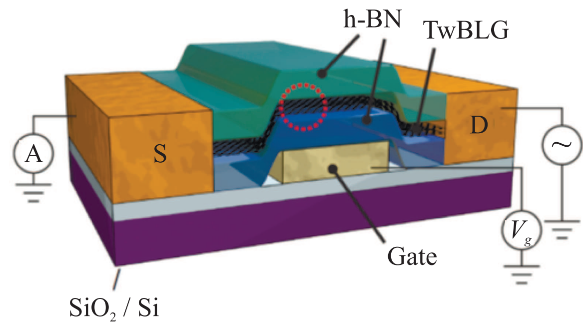


Рис. 10. (Цветной онлайн) Схема подкрученных двухслойных графеновых устройств, используемых для измерения проводимости в зависимости от легирования [8, 9, 65]

лировать плотность носителей заряда с помощью напряжения на затворе.

Рассматриваемое устройство схематически показано на рис. 10. Подкрученный двухслойный графеновый образец с измеренным углом подкручивания помещается между двумя подложками из нитрида бора. Два электрода, исток и сток, расположены на противоположных сторонах образца. Третий, затворный, электрод расположен под образцом. Подача напряжения на затвор позволяет ввести в бислой дополнительный заряд, электроны или дырки. Данное устройство позволяет измерять проводимость бислоя в зависимости от степени легирования $n$ [9].

Исследователей интересовали "магические углы" поворота, предсказанные ранее теоретиками. При магическом угле кинетическая энергия электронов вблизи точек Дирака сравнима с энергией межслойной гибридизации. Авторы работы измерили проводимость $\sigma(n)$ для нескольких образцов двухслойного подкрученного графена с немного отличающимися углами подкручивания, близкими к магическому $\theta_c \approx 1.08^\circ$.

При анализе экспериментов авторы прежде всего сосредоточились на эффектах, связанных с шириной зоны. При наличии плоских зон взаимодействие становится очень важным. Действительно, если зона очень узкая, то даже при относительно небольшом кулоновском отталкивании электронов на одном участке решетки мы имеем дело с пределом сильных электронных корреляций. Тогда, даже если зона проводимости заполнена наполовину (один электрон на элементарную ячейку), в спектре элементарных возбуждений появляется щель, поскольку присутствие двух электронов в одной ячейке невыгодно из-за их сильного кулоновского отталкивания. Такое состояние со щелью является моттовским диэлектриком, и оно действительно наблюдалось экспериментально при углах, близких к магическому. Когда эффективное число носителей изменяется напряжением на затворе, щель в спектре проявляется не только для полностью заполненных минизон (возникающих из-за муаровой сверхрешетки), но и для полузаполненных зон, что является явным проявлением состояния моттовского диэлектрика.

В эксперименте кривые проводимости показали минимумы при заполнении $n = 0, \pm2, \pm4$ (некоторые образцы показали также минимумы при $n = \pm3$). Минимумы проводимости при половинном заполнении, $n = \pm2$ (т.е. для двух дополнительных электронов на сверхячейку) не могут быть описаны в рамках одночастичной теории, и необходимо учитывать многочастичные эффекты. Помимо диэлектрических состояний, авторы также наблюдали два сверхпроводящих "купола" немного ниже и выше половинного заполнения, $n = -2$.

Отметим, что взаимодействия нарушают симметрию одночастичного гамильтониана, приводя к появлению некоторого параметра порядка в системе. Природа многочастичных диэлектрических состояний в подкрученном на магический угол двухслойном графене рассматривалась во многих теоретических работах. В качестве основного состояния системы были предложены различные типы ВСП [65–70], ферромагнитное состояние [71] и другие состояния с нарушенной симметрией фазы [72, 73]. Стоит отметить, что такое изобилие конкурирующих диэлектрических фаз не является уникальной особенностью именно подкрученного бислоя, но обсуждается также и для других видов двухслойных графеновых систем, см., например, [74].

Самое любопытное, что при отклонении от половинного заполнения в ту или иную сторону графеновые слои, повернутые на магический угол, становятся сверхпроводящими. Максимальная температура сверхпроводящего перехода $T_c$, наблюдаемая в эксперименте, составляет 1.7 К. Она кажется низкой, но в минизоне мало носителей заряда. Поэтому отношение $T_c$ к энергии Ферми $E_F$ оказывается выше, чем в купратных сверхпроводниках, что свидетельствует об относительной силе сверхпроводящего спаривания. Таким образом, на фазовой диаграмме по обе стороны от моттовского диэлектрика появляются два главных сверхпроводящих "купола".

Наряду со сверхпроводящими куполами вблизи половинного заполнения $n = -2$ экспериментаторы наблюдали также три дополнительных сверхпроводящих купола вблизи заполнений $n = 0$, и $n = \pm 1$. Таким образом, фазовая диаграмма подкрученного под магическим углом двухслойного графена может быть очень богатой. Более того, экранирование электрон-электронного взаимодействия путем введения металлического слоя, расположенного вблизи подкученного бислоя графена, дает возможность контролировать и настраивать форму фазовой диаграммы.

Помимо легирования, электронные свойства подкрученного двухслойного графена можно регулировать давлением. Приложенное давление может быть использовано для управления межчастичным расстоянием и, следовательно, влиять на величину взаимодействия и на формирование плоских зон. Так, гидростатическое давление более 11 ГПа вызвало сверхпроводимость в подкрученном двухслойном устройстве с углом подкручивания 1.27°, превышающим магическое значение. Без давления такие образцы в сверхпроводящее состояние не переходили.

В высококачественных образцах подкрученного двухслойного графена при углах подкручивания, близких к магическому, были обнаружены и другие упорядоченные фазы при различном количестве носителей заряда на единичную ячейку муаровой сверхрешетки, в том числе ряд коррелированных состояний между сверхпроводящими фазами, три из которых были диэлектрическими, а три других полуметаллическими. Проводящие состояния были топологически нетривиальными.

Также появились доказательства того, что вблизи заполнения на три четверти минизоны проводимости электронные корреляции переводят подкрученный бислой графена в ферромагнитное состояние. Вблизи этого уровня заполнения (на 3/4 заполненной зоны) система также ярко демонстрирует выраженный аномальный эффект Холла и некоторые признаки киральных краевых состояний.

Существование различных конкурирующих фаз обычно предполагает возможность фазового расслоения. Действительно, измерения емкости в образцах подкрученного двухслойного графена демонстрируют весьма немонотонное поведение электронной сжимаемости $\partial\mu(n)/\partial n$, где $\mu$ – химический потенциал в зависимости от числа носителей заряда $n$ на муаровую элементарную ячейку. Соответствующие графики демонстрируют диапазоны отрицательной сжимаемости (см. рис. 11), в то время как зависимость самого химического потенциала $\mu(n)$ – участки с отрицательной кривизной [8, 75]. Последнее является явным свидетельством неустойчивости однородных фаз и, следовательно, электронного фазового расслоения, которое не так просто выявить из-за больших размеров элементарных ячеек в муаровых сверхрешетках.

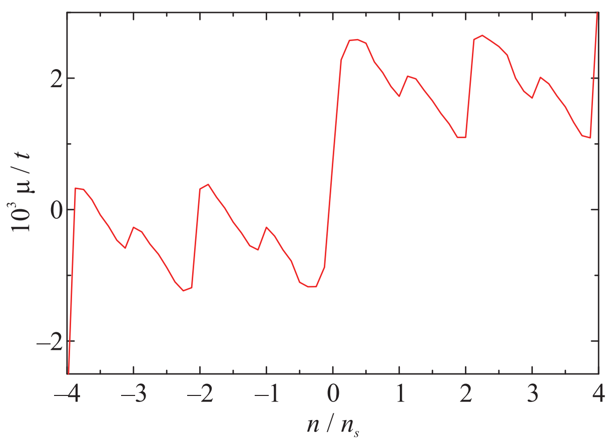


Рис. 11. (Цветной онлайн) Зависимость химического потенциала от легирования. Области с отрицательной сжимаемостью $\partial\mu(n)/\partial n < 0$ сигнализируют о нестабильности однородного состояния относительно расслоения на фазы [8, 75]

Теоретический анализ возможных неоднородных состояний в подкрученном двухслойном графене вблизи магического угла был проведен в работе авторов [69] (см. также монографию [8]). Предполагалось, что возникающий параметр несверхпроводящего порядка является ВСП, и изучалась эволюция такого упорядоченного состояния с легированием. Было показано, что в диапазоне плотностей электронов, где параметр порядка ненулевой, однородное состояние системы может быть неустойчивым по отношению к фазовому расслоению. Авторы показали, что если ВСП является основным состоянием системы, то существует четыре области фазового расслоения в диапазоне легирования $n < 4$. Более того, фазы в неоднородном состоянии характеризуются четным числом электронов на ячейку сверхрешетки. Это позволяет объяснить некоторые особенности в поведении проводимости системы с легированием. Так, становится возможным объяснить тот факт, что минимумы проводимости, которые могли бы возникнуть при уровнях легирования, соответствующих нечетному числу электронов на сверхячейку, отсутствуют в одних исследуемых образцах (происходит фазовое расслоение) и присутствуют в других (фазовое расслоение подавляется дальнодействующим кулоновским отталкиванием).

**5. Нематическая сверхпроводимость в подкрученном графене.** В литературе рассмотрены различные механизмы сверхпроводимости для двухслойного подкрученного графена (фононы [72, 76], электронные корреляции), а также различные симметрии параметров сверхпроводящего порядка. В этом коротком обзоре мы сосредоточимся на нефононных механизмах сверхпроводимости, таких как механизм Кона–Латтинжера.

Мы уже обсуждали, что, если не учитывать взаимодействие и ограничиться лишь одночастичными расчетами [6], то оказывается, что подкрученный графен обладает сложной многокомпонентной поверхностью Ферми, образованной четырьмя плоскими зонами, выходящими на уровень Ферми. Однако из-за слабой дисперсии этих зон данная поверхность Ферми легко меняется под воздействием многочастичных эффектов.

В работе [49] был численно найден поляризационный оператор и эффективное кулоновское взаимодействие для подкрученого графена при разных уровнях легирования. Это взаимодействие затем было использовано для минимизации многочастичной энергии в приближении среднего поля. Как и в случае с другими видами двуслойного графена, упомянутыми выше, среднеполевой расчет ожидаемо демонстрирует, что фаза ВСП оказывается очень устойчивой. Тем не менее ВСП в подкрученом графене – это металлическое состояние, а не диэлектрическое, поскольку спиновое упорядочение в обсуждаемой системе не в состоянии закрыть щелью всю исходную поверхность Ферми. Сохранившаяся поверхность Ферми отвечает нематическому состоянию, что подтверждается данными эксперимента.

На остаточной поверхности Ферми может возникнуть сверхпроводимость. Авторы работы [49] изучили механизм возникновения этой фазы, основанный лишь на кулоновском взаимодействии. Среднеполевой расчет показал, что экранированное кулоновское взаимодействие действительно стабилизирует сверхпроводящий параметра порядка, демонстрирующий нули на поверхности Ферми. Однако теоретическая оценка для критической температуры оказывается значительно меньше экспериментального значения $T_c \approx 1.7$ К. В работе указываются возможные причины такого расхождения.

Завершая обсуждение работы [49], хочется обратить внимание на две характеристики сверхпроводящей фазы, исследуемой в ней. Во-первых, из-за нематичности остаточной поверхности Ферми возникшая сверхпроводимость также нематична. Во-вторых, в отличие от случая АВ графена, в котором два типа упорядочения конкурировали друг с другом, в подкрученом графене ВСП и сверхпроводимость сосуществуют. Такое сосуществование является следствием неспособности фазы ВСП закрыть всю поверхность Ферми целиком. Таким образом, мы видим, что механизмы сверхпроводимости, подобные сценарию Кона и Латтинжера, могут быть применены для объяснения экспериментальной ситуации в двуслойных графенах разных типов.

**6. Заключение.** В обзоре представлены результаты наших работ по широко обсуждаемому в настоящий момент вопросу о реализации аномального сверхпроводящего спаривания в различных модификациях графена. В качестве конкретного механизма развития куперовской неустойчивости обсуждается механизм Кона–Латтинжера, в рамках которого происходит трансформация изначального отталкивательного взаимодействия двух частиц в вакууме в эффективное притяжение в присутствии фермиевского фона. Первая часть обзора посвящена нашим более ранним результатам о возможности реализации сверхпроводящей фазы Кона–Латтинжера в идеализированных монослое и АВ бислое графена в отсутствие примесей, дефектов, потенциала ван дер Ваальса подложки и в пренебрежении конкуренции с другими типами упорядочения. Показано, что учет ренормировок Кона–Латтинжера до второго порядка теории возмущений включительно, а также кулоновского взаимодействия фермионов на разных атомах углерода идеализированного монослоя графена существенно сказываются на конкуренции между сверхпроводящими фазами с $f$-, $d$- и $p$-типами симметрии параметра порядка. Полученные для монослоя результаты обобщены на случай идеализированного бислоя графена с AB упаковкой при учете межслойного кулоновского отталкивания. Отмечено, что рассмотрение идеализированной двухслойной системы графена приводит к существенному повышению критической температуры сверхпроводящего перехода в рамках механизма Кона–Латтинжера.

Во второй части обзора подробно рассмотрены наши недавние результаты для реальных AA и AB бислоев, а также для подкрученного бислоя графена при учете конкуренции между сверхпроводимостью Кона–Латтинжера и ВСП. Показано, что учет этой конкуренции приводит к резкому уменьшению критических температур сверхпроводящего перехода, по сравнению с температурами в идеализированных бислоях. В этом случае другие механизмы сверхпроводимости, и в первую очередь электрон-фононный механизм Элиашберга [8], могут играть определяющую роль в развитии куперовской неустойчивости. В последней части обзора проанализировано возникновение низкотемпературной нематической сверхпроводимости, сосуществующей с ВСП в двухслойном подкрученном графене вблизи магических углов подкрутки.

Авторы выражают благодарность В. В. Валькову и А. В. Чубукову за плодотворные дискуссии.

**Финансирование работы.** Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Института теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Института физики имени Л. В. Киренского, Федеральный исследовательский центр “Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук”. М. Ю. Каган благодарен программе поддержки фундаментальных исследований Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики”.

**Конфликт интересов.** Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, and A. A. Firsov, Science **306**, 666 (2004).
2. M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, Nature Phys. **2**, 620 (2006).
3. V. N. Kotov, B. Uchoa, V. M. Pereira, F. Guinea, and A. H. Castro Neto, Rev. Mod. Phys. **84**, 1067 (2012).
4. A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009).
5. A. V. Rozhkov, A. O. Sboychakov, A. L. Rakhmanov, and F. Nori, Phys. Rep. **648**, 1 (2016).
6. A. O. Sboychakov, A. L. Rakhmanov, A. V. Rozhkov, and F. Nori, Phys. Rev. B **92**, 075402 (2015).
7. M. Yu. Kagan, K. I. Kugel, and A. L. Rakhmanov, Phys. Rep. **916**, 1 (2021).
8. M. Yu. Kagan, K. I. Kugel, A. L. Rakhmanov, and A. O. Sboychakov, *Electronic phase separation in magnetic and superconducting materials: Recent advances*, vol. 201 of *Springer Series in Solid-State Sciences*, Springer, Cham, Switzerland (2024).
9. Y. Cao, V. Fatemi, S. Fang, K. Watanabe, T. Taniguchi, E. Kaxiras, and P. Jarillo-Herrero, Nature **556**, 43 (2018).
10. М. Ю. Каган, В. А. Мицкан, М. М. Коровушкин, УФН **185**, 785 (2015).
11. W. Kohn and J. M. Luttinger, Phys. Rev. Lett. **15**, 524 (1965).
12. D. Fay and A. Layzer, Phys. Rev. Lett. **20**, 187 (1968).
13. М. Ю. Каган, А. В. Чубуков, Письма в ЖЭТФ **47**, 525 (1988).
14. М. Ю. Каган, А. В. Чубуков, Письма в ЖЭТФ **50**, 483 (1989).
15. A. V. Chubukov and M. Yu. Kagan, J. Phys. Condens. Matter **1**, 3135 (1989).
16. M. Yu. Kagan, Phys. Lett. A **152**, 303 (1991).
17. H. Fröhlich, J. Phys. C: Solid State Phys. **1**, 544 (1968).
18. W. Kohn, Phys. Rev. Lett. **2**, 393 (1959).
19. J. Friedel, Il Nuovo Cimento **7**, 287 (1958).
20. M. A. Baranov, A. V. Chubukov, and M. Yu. Kagan, Int. J. Mod. Phys. B **06**, 2471 (1992).
21. M. A. Baranov and M. Yu. Kagan, Z. Phys. B Condens. Matter **86**, 237 (1992).
22. M. A. Baranov, D. V. Efremov, and M. Yu. Kagan, Physica C **218**, 75 (1993).
23. A. V. Chubukov, Phys. Rev. B **48**, 1097 (1993).
24. М. Ю. Каган, УФН **164**, 77 (1994).
25. М. А. Баранов, М. Ю. Каган, Ю. Каган, Письма в ЖЭТФ **64**, 273 (1996).
26. М. А. Баранов, М. Ю. Каган, ЖЭТФ **99**, 1236 (1991).
27. М. А. Баранов, М. Ю. Каган, ЖЭТФ **102**, 313 (1992).
28. M. Yu. Kagan, M. A. Baranov, D. V. Efremov, M. S. Mar'enko, P. Brussaard, Ch. G. van Weert, and H. W. Capel, Письма в ЖЭТФ **62**, 589 (1995).
29. М. А. Баранов, М. Ю. Каган, М. С. Марьенко, Письма в ЖЭТФ **58**, 734 (1993).
30. M. Yu. Kagan, *Modern trends in superconductivity and superfluidity*, *Lecture Notes in Physics*, Springer, Dordrecht (2014), v. 874.
31. M. Yu. Kagan and V. V. Valk'ov, ЖЭТФ **140**, 179 (2011).
32. M. Yu. Kagan, D. V. Efremov, M. S. Marienko, and V. V. Val'kov, Письма в ЖЭТФ **93**, 807 (2011).

33. М. Ю. Каган, В. В. Вальков, В. А. Мицкан, М. М. Коровушкин, Письма в ЖЭТФ **97**, 253 (2013).
34. М. Ю. Каган, В. В. Вальков, В. А. Мицкан, М. М. Коровушкин, ЖЭТФ **144**, 837 (2013).
35. М. Ю. Каган, В. В. Вальков, В. А. Мицкан, М. М. Коровушкин, ЖЭТФ **145**, 1127 (2014).
36. M. Yu. Kagan, V. V. Val'kov, V. A. Mitskan, and M. M. Korovushkin, Solid State Commun. **188**, 61 (2014).
37. М. Ю. Каган, В. А. Мицкан, М. М. Коровушкин, ЖЭТФ **146**, 1301 (2014).
38. M. Yu. Kagan, V. A. Mitskan, and M. Korovushkin, Eur. Phys. J. B **88**, 157 (2015).
39. M. Yu. Kagan, Письма в ЖЭТФ **103**, 822 (2016).
40. R. Nandkishore, L. S. Levitov, and A. V. Chubukov, Nature Phys. **8**, 158 (2012).
41. R. Nandkishore, G.-W. Chern, and A. V. Chubukov, Phys. Rev. Lett. **108**, 227204 (2012).
42. R. Nandkishore and A. V. Chubukov, Phys. Rev. B **86**, 115426 (2012).
43. R. Nandkishore, R. Thomale, and A. V. Chubukov, Phys. Rev. B **89**, 144501 (2014).
44. Z. Dong, A. V. Chubukov, and L. Levitov, Phys. Rev. B **107**, 174512 (2023).
45. S. Schubin and S. Wonsowsky, Proc. Roy. Soc. (London) A **145**, 159 (1934).
46. A. L. Rakhmanov, A. V. Rozhkov, A. O. Sboychakov, and F. Nori, Phys. Rev. Lett. **109**, 206801 (2012).
47. A. O. Sboychakov, A. V. Rozhkov, and A. L. Rakhmanov, Phys. Rev. B **108**, 184503 (2023).
48. A. V. Rozhkov, A. O. Sboychakov, and A. L. Rakhmanov, Phys. Rev. B **108**, 205153 (2023).
49. A. O. Sboychakov, A. V. Rozhkov, and A. L. Rakhmanov, Phys. Rev. B **109**, 094505 (2024).
50. A. O. Sboychakov, A. L. Rakhmanov, and A. V. Rozhkov, Physica E **165**, 116118 (2025).
51. H. Zhou, T. Xie, T. Taniguchi, K. Watanabe, and A. F. Young, Nature **598**, 434 (2021).
52. J. M. Park, Y. Cao, K. Watanabe, T. Taniguchi, and P. Jarillo-Herrero, Nature **590**, 249 (2021).
53. G. Chen, A. L. Sharpe, P. Gallagher, I. T. Rosen, and E. J. Fox, L. Jiang, B. Lyu, H. Li, K. Watanabe, T. Taniguchi, J. Jung, Z. Shi, D. Goldhaber-Gordon, Y. Zhang, and F. Wang, Nature **572**, 215 (2019).
54. H. Zhou, L. Holleis, Y. Saito, L. Cohen, W. Huynh, C. L. Patterson, F. Yang, T. Taniguchi, K. Watanabe, and A. F. Young, Science **375**, 774 (2022).
55. A. Veligura, H. J. van Elferen, N. Tombros, J. C. Maan, U. Zeitler, and B. J. van Wees, Phys. Rev. B **85**, 155412 (2012).
56. J. Borysiuk, J. Sołtys, and J. Piechota, J. Appl. Phys. **109**, 093523 (2011).
57. J.-K. Lee, S.-C. Lee, J.-P. Ahn, S.-Ch. Kim, J. I. B. Wilson, and P. John, J. Chem. Phys. **129**, 234709 (2008).
58. Z. Liu, K. Suenaga, P. J. F. Harris, and S. Iijima, Phys. Rev. Lett. **102**, 015501 (2009).
59. H.-V. Roy, C. Kallinger, and K. Sattler, Surf. Sci. **407**, 1 (1998).
60. A. Grubišić-Čabo, J. C. Kotsakidis, Y. Yin, A. Tadich, M. Haldon, S. Solari, J. Riley, E. Huwald, K. M. Daniels, R. L. Myers-Ward, M. T. Edmonds, N. V. Medhekar, D. K. Gaskill, and M. S. Fuhrer, Front. Nanotech. **5** (2024).
61. L. Brey and H. A. Fertig, Phys. Rev. B **87**, 115411 (2013).
62. O. Farkad, F. Elfatouaki, R. Takassa, S. Hassine, Y. Ijdiyaou, E. A. Ibnouelghazi, and D. Abouelaoualim, Mater. Today Commun. **33**, 104714 (2022).
63. G. Li, A. Luican, J. M. B. Lopes dos Santos, A. H. Castro Neto, A. Reina, J. Kong, and E. Y. Andrei, Nature Phys. **6**, 109 (2010).
64. W. Yan, M. Liu, R.-F. Dou, L. Meng, L. Feng, Z.-D. Chu, Y. Zhang, Z. Liu, J.-C. Nie, and L. He, Phys. Rev. Lett. **109**, 126801 (2012).
65. C.-C. Liu, L.-D. Zhang, W.-Q. Chen, and F. Yang, Phys. Rev. Lett. **121**, 217001 (2018).
66. T. Huang, L. Zhang, and T. Ma, Sci. Bull. **64**, 310 (2019).
67. A. O. Sboychakov, A. V. Rozhkov, A. L. Rakhmanov, and F. Nori, Phys. Rev. B **100**, 045111 (2019).
68. A. O. Sboychakov, A. V. Rozhkov, A. L. Rakhmanov, and F. Nori, Phys. Rev. B **102**, 155142 (2020).
69. А. О. Сбойчаков, А. В. Рожков, А. Л. Рахманов, Письма в ЖЭТФ **116**, 708 (2022).
70. K. Seo, V. N. Kotov, and B. Uchoa, Phys. Rev. Lett. **122**, 246402 (2019).
71. T. Cea and F. Guinea, Phys. Rev. B **102**, 045107 (2020).
72. F. Wu, A. H. MacDonald, and I. Martin, Phys. Rev. Lett. **121**, 257001 (2018).
73. K. Yananose, G. Cantele, P. Lucignano, S.-W. Cheong, J. Yu, and A. Stroppa, Phys. Rev. Lett. **104**, 075407 (2021).
74. А. В. Рожков, А. О. Сбойчаков, Современная электродинамика **2**(10), 18 (2024).
75. А. О. Сбойчаков, А. В. Рожков, К. И. Кугель, А. Л. Рахманов, Письма в ЖЭТФ **112**, 693 (2020).
76. B. Lian, Z. Wang, and B. A. Bernevig, Phys. Rev. Lett. **122**, 257002 (2019).