Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 9, с. 782 – 787 © 2025 г. 10 мая

Неупругие эффекты в модели Янга–Ли

Д. Менской[1)]

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 141700 Долгопрудный, Россия

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, 127994 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 января 2025 г.
После переработки 28 марта 2025 г.
Принята к публикации 8 апреля 2025 г.

В настоящей работе мы изучаем теории, ренормгрупповой поток которых проходит близко к точке Янга–Ли. Такие теории можно эффективно описывать, как возбуждения массивной теории Янга–Ли иррелевантными операторами. В работе рассматривается возмущение одним из потомков единственного нетривиального примарного оператора φ теории. Показано, что такое возмущение приводит к нарушению интегрируемости теории. С точностью до нормировки вычислено сечение неупругого рассеяния соответствующего процесса с рождением частиц $2 \to 3$. В частности, мы определяем асимптотики сечения рассеяния при больших энергиях, а также над порогом рождения частиц.

DOI: 10.31857/S0370274X25050117, EDN: GZKZBA

1. Введение. Решеточная модель Изинга описывает фазовый переход парамагнетик–ферромагнетик. В двух измерениях ее скейлинговый предел в окрестности критической точки $(T, H) = (T_c, 0)$ описывается теорией поля Изинга. Данная теория поля обладает многими интересными свойствами. В самом общем случае она не является интегрируемой теорией, и ее действие равно

$$\mathcal{A}_{\mathrm{IFT}} = \mathcal{A}_{\mathrm{ICFT}} + \frac{m}{2\pi}\int \varepsilon(x) d^2x + h\int \sigma(x) d^2x, \quad (1)$$

где $m \sim T - T_c$, $h \sim H$, а $\mathcal{A}_{\mathrm{ICFT}}$ – конформная теория поля, минимальная модель $\mathcal{M}_{4,3}$, содержащая, помимо единичного оператора, два примарных поля – плотность энергии $\varepsilon(x)$ и оператор спина $\sigma(x)$ [1].

При нулевом магнитном поле $h = 0$ данная теория поля является теорией майорановских фермионов с массой $|m|$ [2]. При критической температуре $T = T_c$ $(m = 0)$ и ненулевом магнитном поле модель является теорией, спектр частиц которой состоит из 8 стабильных частиц разных масс [3]. Как конформная теория поля, возмущенная своим сингулярным вектором, оба данных случая являются случаями интегрируемых моделей с факторизованной матрицей рассеяния [4].

Если рассматривать аналитическое продолжение в область комплексных значений параметров, то существует еще одна интегрируемая точка при значении $h = \pm i(0.1893\ldots)m^{\frac{15}{8}}$. Эта точка называется критической точкой Янга–Ли, так как она связана с плотностью нулей Янга–Ли [5, 6]. Эта теория описывается действием [7–9]

$$\mathcal{A}_{\mathrm{LY}} = \mathcal{A}_{\mathcal{M}_{2,5}} + ih\int d^2x\, \varphi(x), \quad (2)$$

где $\mathcal{A}_{\mathcal{M}_{2,5}}$ – действие минимальной модели с центральным зарядом $c = -\frac{22}{5}$ и одним (кроме единичного) примарным оператором φ [10]. Данное примарное поле имеет конформные размерности $(\Delta_\varphi, \bar{\Delta}_\varphi) = -\frac{1}{5}$. Теория (2) является неунитарной теорией, однако она является массивной и интегрируемой [4]. А именно: в спектре частиц данной теории существуют нейтральные массивные частицы одного вида с вещественной массой

$$M_{\mathrm{YL}} = C_{\mathrm{YL}}\, h^{5/12}, \quad (3)$$

где [11]

$$C_{\mathrm{YL}} = \frac{2^{\frac{19}{12}}\sqrt{\pi}}{5^{\frac{5}{16}}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)\right]^{\frac{5}{12}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} = 2.64294463\ldots, \quad (4)$$

а факторизованная матрица рассеяния задана двухчастичной амплитудой [12]

$$S_{\mathrm{YL}}(\theta) = \frac{\sinh\theta + i\sin(2\pi/3)}{\sinh\theta - i\sin(2\pi/3)}, \quad (5)$$

где θ – быстрота центра масс рассеивающихся частиц, связанная с энергией и импульсом посредством $E = m\cosh\theta$ и $p = m\sinh\theta$.

В этой работе мы рассмотрим инфракрасный предел теорий, ренормгрупповой поток которых про-

[1)]e-mail: menskoy.dd@phystech.edu

ходит рядом с точкой Янга–Ли. Эффективное действие таких теорий можно описать следующим образом [13]

$$\mathcal{A}_{\text{eff}} = \mathcal{A}_{\mathcal{M}_{2,5}} + ih \int d^2x \varphi(x) + \sum_i \alpha_i \int d^2x O_i(x), \quad (6)$$

где $\sum_i \alpha_i \int d^2x\ O_i(x)$ – вклад бесспиновых иррелевантных операторов. В нем слагаемые упорядочены по возрастанию размерностей операторов. Оператором с наименьшей размерностью (т.е. наименее иррелевантным) является оператор $T\bar{T}$ [14]. Как было указано в [15], включение этого оператора сохраняет интегрируемость.

В конформной теории поля Янга–Ли поле φ содержит сингулярные вектора на 2-м и 3-м уровнях. Этот факт выражается в том, что φ удовлетворяет уравнениям

$$\left(L_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta+1)} L_{-1}^2\right)\varphi = 0, \quad (7)$$

$$\left(L_{-3} - \frac{2}{\Delta+2} L_{-1}L_{-2} + \frac{1}{(\Delta+1)(\Delta+2)} L_{-1}^3\right)\varphi = 0. \quad (8)$$

Откуда видно, что потомки $L_{-2}\varphi$ и $L_{-3}\varphi$ выражаются через $L_{-1}^2\varphi$ и $L_{-1}^3\varphi$. Таким образом, первый нетривиальный бесспиновый потомок поля φ, не являющийся производной, это поле

$$\Xi = L_{-4}\bar{L}_{-4}\varphi. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь квантовую теорию поля, описываемую действием

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{M}_{2,5}} + ih \int d^2x\ \phi(x) + g \int d^2x\ \Xi(x). \quad (10)$$

Чтобы выяснить, как изменяется интегрирумость при включении иррелевантного оператора Ξ, рассмотрим пятиточечный форм-фактор, отвечающий неупругому процессу $2 \to 3$, отвечающему рождению частицы

$$F_5^{\Xi}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5). \quad (11)$$

Нас интересует его вклад в матрицу рассеяния, поэтому нужно вычислить значение на энергетической поверхности, которая задается равенством нулю общей энергии и импульса частиц:

$$\sum_{i=1}^{5} e^{\theta_i} = 0, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{5} e^{-\theta_i} = 0, \quad (13)$$

или в терминах элементарных симметрических полиномов, которые определены уравнением

$$\prod_{i=1}^{n}(x + x_i) = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k}\sigma_k(x_1, \ldots, x_n), \quad (14)$$

это условие будет выглядеть так:

$$\sigma_1\big(e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_5}\big) = 0,\ \sigma_4\big(e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_5}\big) = 0. \quad (15)$$

Форм-факторы полей φ хорошо известны и вычислены в [9]. Заметим, что из соображений размерности действие интеграла движения спина 5 на поле φ должно раскладываться по потомкам на 5-м уровне. В силу наличия сингулярных векторов у этого поля на 5-м уровне существует только 2 линейно независимых потомка $L_{-1}^5\varphi$ и $L_{-1}L_{-4}\varphi$. Таким образом, существуют такие числа α и β, что

$$I_5\varphi = \alpha L_{-1}^5\varphi + \beta L_{-1}L_{-4}\varphi. \quad (16)$$

Тогда существуют такие a, b, c и d, что

$$\begin{gathered} I_5\bar{I}_5\varphi = aL_{-1}^5\bar{L}_{-1}^5\varphi + bL_{-1}\bar{L}_{-1}L_{-4}\bar{L}_{-4}\varphi + \\ + cL_{-1}L_{-4}\bar{L}_{-1}^5\varphi + dL_{-1}^5\bar{L}_{-1}\bar{L}_{-4}\varphi = aL_{-1}^5\bar{L}_{-1}^5\varphi + \\ + bL_{-1}\bar{L}_{-1}\Xi + cL_{-1}L_{-4}\bar{L}_{-1}^5\varphi + dL_{-1}^5\bar{L}_{-1}\bar{L}_{-4}\varphi. \end{gathered} \quad (17)$$

Далее, чтобы, найдя число b, вычислить форм-фактор $F_5^{\Xi}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$, можно воспользоваться следующими свойствами форм-факторов. Во-первых, форм-фактор производной поля можно выразить через форм-фактор самого поля [16]

$$F_n^{\partial_\mu \mathcal{O}}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{\mu}\right) F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1, \ldots, \theta_n). \quad (18)$$

В голоморфных и антиголоморфных координатах данное условие можно переписать в виде (здесь и далее симметрические многочлены вычислены в точке $\big(e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_5}\big)$, если не указано иное)

$$\begin{gathered} F_n^{\partial\mathcal{O}}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} e^{\theta_i}\right) F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \\ = \frac{m}{2}\sigma_1 F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1, \ldots, \theta_n), \end{gathered} \quad (19)$$

$$\begin{gathered} F_n^{\bar{\partial}\mathcal{O}}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \left(-\sum_{i=1}^{n} e^{-\theta_i}\right) F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \\ = \frac{m}{2}\frac{\sigma_4}{\sigma_5} F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1, \ldots, \theta_n). \end{gathered} \quad (20)$$

Во-вторых, также существует связь форм-фактора коммутатора поля с интегралом движения с форм-фактором самого поля

$$F_n^{[I_s,O]}(\theta_1,\ldots,\theta_n) = -\Lambda_n^{(s)}(\theta_1,\ldots,\theta_n)F_n^O(\theta_1,\ldots,\theta_n),$$
$$\Lambda_n^{(s)}(\theta_1,\ldots,\theta_n) = m^{|s|}\sum_{i=1}^{n} e^{s\theta_i}, \tag{21}$$

где s – спин интеграла движения.

Используя (19), находим, что

$$F_5^{L_{-1}\bar{L}_{-1}\Xi}(\theta_1,\ldots,\theta_5) = \frac{m^2}{4}\frac{\sigma_1\sigma_4}{\sigma_5}F_5^{\Xi}(\theta_1,\ldots,\theta_5). \tag{22}$$

С другой стороны, используя (21), можно получить

$$F_5^{I_5\bar{I}_5\varphi}(\theta_1,\ldots,\theta_5) = m^{10}F_5^{\varphi}(\theta_1,\ldots,\theta_5)\sum_{i,j=1}^{5} e^{5(\theta_i-\theta_j)}, \tag{23}$$

где

$$F_5^{\varphi}(\theta_1,\ldots,\theta_5) = \tag{24}$$
$$= \frac{H_5}{ih\pi(1-\Delta)}\sigma_1\sigma_4(\sigma_2\sigma_3-\sigma_5)\prod_{i<j}\frac{f(\theta_i-\theta_j)}{e^{\theta_i}+e^{\theta_j}},$$

а $f(\theta)$ – минимальный форм-фактор:

$$f(\theta) = \frac{\cosh\theta - 1}{\cosh\theta + \frac{1}{2}}v(i\pi-\theta)v(-i\pi+\theta), \tag{25}$$

где функция $v(\theta)$ не имеет полюсов и нулей в полуплоскости $\operatorname{Im}\theta > 0$ и определяется

$$v(\theta) = \tag{26}$$
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(\theta+2\pi i(n+\frac{1}{2}))(\theta+2\pi i(n-\frac{1}{6}))(\theta+2\pi i(n-\frac{1}{3}))}{(\theta+2\pi i(n-\frac{1}{2}))(\theta+2\pi i(n+\frac{1}{6}))(\theta+2\pi i(n+\frac{1}{3}))}\right]^n.$$

Ввиду (17) имеем

$$F_5^{I_5\bar{I}_5\varphi} = aF_5^{L_{-1}^5\bar{L}_{-1}^5\varphi} + bF_5^{L_{-1}\bar{L}_{-1}\Xi} +$$
$$+ cF_5^{L_{-1}L_{-4}\bar{L}_{-1}^5\varphi} + dF_5^{L_{-1}^5\bar{L}_{-1}\bar{L}_{-4}\varphi}. \tag{27}$$

Так как в силу (19) и (20) форм-факторы $F_5^{L_{-1}^5\bar{L}_{-1}^5\varphi}$ и $F_5^{L_{-1}^5\bar{L}_{-1}\bar{L}_{-4}\varphi}$ пропорциональны σ_1^2, а $F_5^{L_{-1}L_{-4}\bar{L}_{-1}^5\varphi}$ пропорционален σ_4^2, то на массовой поверхности (12)–(13) эти форм-факторы обнуляются. Так как

$$F_5^{I_5\bar{I}_5\varphi}(\theta_1,\ldots,\theta_5) = \frac{m^{10}}{ih\pi(1-\Delta)}H_5\sigma_1\sigma_4(\sigma_2\sigma_3-\sigma_5)\times$$
$$\times\prod_{i<j}\frac{f(\theta_i-\theta_j)}{e^{\theta_i}+e^{\theta_j}}\sum_{i,j=1}^{5}e^{5(\theta_i-\theta_j)}, \tag{28}$$

то итого, получаем

$$F_5^{\Xi}(\theta_1,\ldots,\theta_5)\Big|_{\sigma_1,\sigma_4=0} = \frac{4m^8}{ih\pi b(1-\Delta)}H_5\sigma_5(\sigma_2\sigma_3-\sigma_5)\times$$
$$\times\prod_{i<j}\frac{f(\theta_i-\theta_j)}{e^{\theta_i}+e^{\theta_j}}\sum_{i,j=1}^{5}e^{5(\theta_i-\theta_j)}. \tag{29}$$

2. Вычисление числа *b*. Вычисление числа b производится следующим образом. Оно определяется соотношением

$$I_5\bar{I}_5\varphi(x) = bL_{-1}\bar{L}_{-1}\Xi(x) + \ldots. \tag{30}$$

Данное число можно определить с точностью до нормировочного множителя $\mathcal{B}$, который мы определим через соотношение $I_5 = \mathcal{B}\tilde{I}_5$, где $\tilde{I}_5$ – это интеграл движения спина 5 [17], где

$$\tilde{I}_5\varphi(x) = \oint_x \frac{dw}{2\pi i}\left(T^3(w) + \frac{c+2}{12}(\partial T)^2(w)\right)\varphi(x). \tag{31}$$

Число b можно выразить через квадрат другого числа β'

$$b = \mathcal{B}\beta'^2, \tag{32}$$

где

$$\tilde{I}_5\varphi(x) = \beta' L_{-1}L_{-4}\varphi(x) + \alpha' L_{-1}^5\varphi(x). \tag{33}$$

Левую часть равенства (33) разобьем на два слагаемых, чтобы каждое вычислять отдельно

$$\tilde{I}_5\varphi(x) = \tilde{I}_5^{(3)}\varphi(x) + \frac{c+2}{12}\tilde{I}_5^{(2)}\varphi(x), \tag{34}$$
$$\tilde{I}_5^{(3)}\varphi(x) = \oint_x \frac{dw}{2\pi i}T^3(w)\varphi(x), \tag{35}$$
$$\tilde{I}_5^{(2)}\varphi(x) = \oint_x \frac{dw}{2\pi i}(\partial T)^2(w)\varphi(x), \tag{36}$$

Чтобы вычислять эти слагаемые, разложим соответствующие операторы по модам

$$\tilde{I}_5^{(3)}\varphi(x) = \oint_x \frac{dw}{2\pi i}T^3(w)\varphi(x) =$$
$$= \oint_x \frac{dw}{2\pi i}\sum_n \frac{(T^3)_n\varphi(x)}{(w-x)^{n+6}} = (T^3)_{-5}\varphi(x), \tag{37}$$
$$\tilde{I}_5^{(2)}\varphi(x) = \oint_x \frac{dw}{2\pi i}(\partial T)^2(w)\varphi(x) =$$
$$= \oint_x \frac{dw}{2\pi i}\sum_n \frac{[(\partial T)^2]_n\varphi(x)}{(w-x)^{n+6}} = [(\partial T)^2]_{-5}\varphi(x). \tag{38}$$

Чтобы вычислять моды $(T^3)_{-5}$, $[(\partial T)^2]_{-5}$, удобно воспользоваться формулой [1]

$$(AB)_n = \sum_{k\leq -\Delta_A} A_k B_{n-k} + \sum_{k>-\Delta_A} B_{n-k} A_k, \quad (39)$$

где

$$A(w) = \sum_n \frac{A_n}{w^{n+\Delta_A}}, \quad (40)$$

$$B(w) = \sum_n \frac{B_n}{w^{n+\Delta_B}}, \quad (41)$$

$$AB(w) = \sum_n \frac{(AB)_n}{w^{n+\Delta_A+\Delta_B}}, \quad (42)$$

а Δ_A и Δ_B – размерности полей A и B соответственно. Тензор энергии-импульса является полем размерности 2 с модами – генераторами алгебры Вирасоро

$$T(w) = \sum_n \frac{L_n}{w^{n+2}}. \quad (43)$$

После вычислений, вспоминая, что $\Delta_\varphi = -\frac{1}{5}$, получаем

$$(T^3)_{-5}\varphi = -\frac{42}{19} L_{-1}L_{-4}\varphi + \frac{75}{38} L_{-1}^5\varphi. \quad (44)$$

Теперь можно посчитать $\tilde{I}_5^{(2)}\varphi(x) = [(\partial T)^2]_{-5}\varphi(x)$. Для этого заметим, что моды ∂T – это просто операторы L_{-1}, примененные к модам T, и, так как

$$\partial T = \partial\partial w \sum_n \frac{L_n}{w^{n+2}} = \sum_n -\frac{(n+2)L_n}{w^{n+3}} = \sum_n \frac{(\partial T)_n}{w^{n+3}}, \quad (45)$$

то имеем

$$(\partial T)_n = -(n+2)L_n. \quad (46)$$

Теперь воспользуемся формулой (39) для $A = B = \partial T$

$$[(\partial T)^2]_{-5}\varphi = \frac{140}{19} L_{-1}L_{-4}\varphi - \frac{125}{19} L_{-1}^5\varphi. \quad (47)$$

Итого, так как $c = -\frac{22}{5}$, получаем, что

$$\tilde{I}_5\varphi = -\frac{70}{19} L_{-1}L_{-4}\varphi + \frac{125}{38} L_{-1}^5, \quad (48)$$

т.е.

$$\beta' = -\frac{70}{19},\ \alpha' = \frac{125}{38},\ b = \frac{4900}{361}\mathcal{B}. \quad (49)$$

3. Сечение рассеяния. Сечение рассеяния можно вычислить по формуле

$$\sigma_{2\to 3}(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{3!}\int \frac{d\beta_1}{2\pi}\frac{d\beta_2}{2\pi}\frac{d\beta_3}{2\pi}(2\pi)^2 \times \\ \times \delta^{(2)}(P_{\rm out} - P_{\rm in})|S_{2\to 3}(\theta_1,\theta_2|\beta_1,\beta_2,\beta_3)|^2, \quad (50)$$

где $P_{\rm in} = m(\cosh\theta_1 + \cosh\theta_2)$ и $P_{\rm out} = m(\cosh\beta_1 + \cosh\beta_2 + \cosh\beta_3)$ – соответственно общий импульс частиц до и после неупругого процесса, а $S_{2\to 3}$ – матричный элемент S-матрицы, который можно вычислить по теории возмущений [18]

$$S_{2\to 3}(\theta_1,\theta_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = {}_g^{\rm out}\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3|\theta_1,\theta_2\rangle_g^{\rm in} \quad (51)$$

$$= {}_0^{\rm out}\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3|\theta_1,\theta_2\rangle_0^{\rm in} - ig(2\pi)^2 \times \\ \times \delta^{(2)}(P_{\rm out} - P_{\rm in}){}_0^{\rm out}\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3|\Xi(0)|\theta_1,\theta_2\rangle_0^{\rm in}. \quad (52)$$

Так как невозмущенная теория интегрируема, то первое слагаемое равно нулю

$${}_0^{\rm out}\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3|\theta_1,\theta_2\rangle_0^{\rm in} = 0, \quad (53)$$

а значит, сечение рассеяния связано с форм-фактором возмущающего оператора посредством

$$\sigma_{2\to 3}(\theta_1,\theta_2) = \frac{g^2}{3!}\int \frac{d\beta_1}{2\pi}\frac{d\beta_2}{2\pi}\frac{d\beta_3}{2\pi}(2\pi)^2 \times \\ \times \delta^{(2)}(P_{\rm out} - P_{\rm in})|{}_0^{\rm out}\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3|\Xi(0)|\theta_1,\theta_2\rangle_0^{\rm in}|^2. \quad (54)$$

Можно воспользоваться кроссинг-симметрией, чтобы переписать матричный элемент в виде форм-фактора, который нужно вычислить в невозмущенной теории

$${}_0^{\rm out}\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3|\Xi(0)|\theta_1,\theta_2\rangle_0^{\rm in} = \\ = F_5^{\Xi}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\theta_1 + i\pi,\theta_2 + i\pi). \quad (55)$$

Обозначим

$$z_i = e^{\beta_i},\ x_i = e^{\theta_i}. \quad (56)$$

Симметричные многочлены имеют вид

$$\sigma_2(z_1,z_2,z_3,-x_1,-x_2) = x_1x_2 - \\ - (x_1+x_2)(z_1+z_2+z_3) + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3), \quad (57)$$

$$\sigma_3(z_1,z_2,z_3,-x_1,-x_2) = z_1z_2z_3 - \\ - (x_1+x_2)(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) + x_1x_2(z_1+z_2+z_3), \quad (58)$$

$$\sigma_5(z_1,z_2,z_3,-x_1,-x_2) = x_1x_2z_1z_2z_3. \quad (59)$$

После долгих вычислений и упрощений при подстановке (29) в (54), а также после перехода к системе центра инерции и выбора единиц измерения, где $m = 1$, введения обозначений $E = x_1 + x_2 = 2\sinh\theta$, $x_1x_2 = 1$, интеграл примет вид (здесь $s = z_1z_2z_3$, а интегралы по двум другим переменным

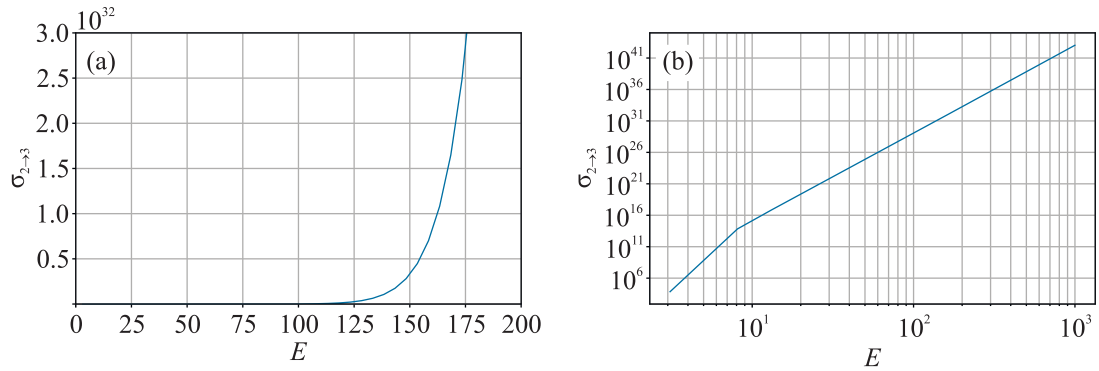

Рис. 1. (Цветной онлайн) График зависимости сечения рассеяния $\sigma_{2\to3}$ (с точностью до нормировочного множителя $\mathcal{B}$) от энергии центра инерции E в стандартном (a) и логарифмическом (b) масштабах

$s_1 = z_1 + z_2 + z_3$ и $s_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$ снялись дельта-функциями)

$$\sigma_{2\to3}(\theta_1,\theta_2) = \frac{K^2 g^2}{3!}\int \frac{ds}{2\pi}\frac{1}{D(s|E)}\times$$
$$\times\left|\frac{25E^2(E^2-1)^2(s^2-Es+1)^2}{s^2}\right|^2$$
$$\times\Big|f(\theta_1+i\pi-\beta_1)f(\theta_1+i\pi-\beta_2)\times$$
$$\times f(\theta_1+i\pi-\beta_3)f(\theta_2+i\pi-\beta_1)\Big|^2$$
$$\times\Big|f(\theta_2+i\pi-\beta_2)f(\theta_2+i\pi-\beta_3)f(\theta_1-\theta_2)\Big|^2$$
$$\times\Big|f(\beta_1-\beta_2)f(\beta_2-\beta_3)f(\beta_1-\beta_3)\Big|^2, \qquad (60)$$

где

$$D(s|E) = \sqrt{E^4s^2 - 4s^3E^3 - 4E^3s + 18E^2s^2 - 27s^2}, \qquad (61)$$

$$K = \frac{4m^8}{ih\pi\mathcal{B}\beta^2(1-\Delta)}H_5, \qquad (62)$$

и мы учли также, что

$$\delta\left(\frac{s_2 - Es}{s}\right) = s\delta(s_2 - Es). \qquad (63)$$

Асимптотическое поведение при высоких энергиях. На рисунке 1 мы видим график зависимости $\sigma_{2\to3}(E)$. По графику логарифмической зависимости можно судить, что при $E \to +\infty$ сечение рассеяния ведет себя как E^{14}.[2)]

Асимптотическое поведение над порогом. На рисунке 2 мы видим график зависимости

[2)] Отметим, что нормировочный множитель $\mathcal{B}$, который еще предстоит вычислить, не влияет на данное поведение, а также на асимпототическое поведение над порогом.

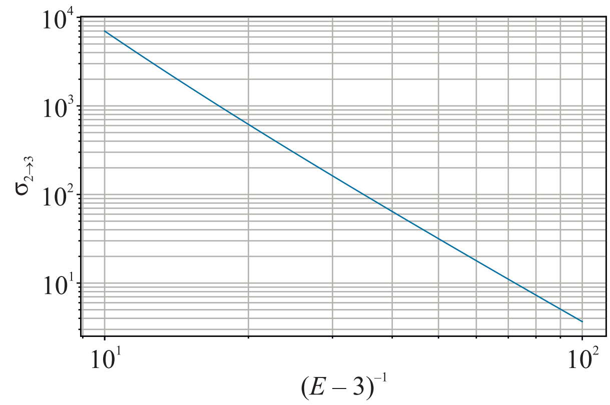

Рис. 2. (Цветной онлайн) График зависимости сечения рассеяния $\sigma_{2\to3}$ (с точностью до нормировочного множителя $\mathcal{B}$) от величины $(E-3)^{-1}$

$\sigma_{2\to3}((E-3)^{-1})$. По графику логарифмической зависимости можно судить, что при $E \to 3$ сечение рассеяния ведет себя как $(E-3)^3$.

4. Заключение. Таким образом, с помощью форм-факторной теории возмущений [18] было вычислено (с точностью до нормировочного множителя) с учетом первого порядка теории возмущений сечение неупругого рассеяния, т.е. процесса с рождением частиц. Также графически обоснованы асимптотики при больших энергиях и над порогом. Учет последующих порядков предполагает вычисление членов, квадратичных по форм-факторам возмущающего поля Ξ.

Автор выражает благодарность Александру Замолодчикову и Алексею Литвинову за ценные обсуждения и советы по публикации.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем передачи информации имени

А. А. Харкевича Российской академии наук. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Springer-Verlag New York, N.Y. (1996).
2. T. T. Wu and B. M. McCoy, *The two-dimensional Ising model*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (1973).
3. A. B. Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 4235 (1989).
4. A. B. Zamolodchikov, Adv. Stud. Pure Math. **19**, 641 (1989).
5. C. N. Yang and T. D. Lee, Phys. Rev. **87**, 404 (1952).
6. T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **87**, 410 (1952).
7. M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **40**, 1610 (1978).
8. A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **342**, 695 (1990).
9. A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **348**, 619 (1991).
10. J. L. Cardy, Phys. Rev. Lett. **54**, 1354 (1985).
11. A. B. Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 1125 (1995).
12. J. L. Cardy and G. Mussardo, Phys. Lett. B **225**, 275 (1989).
13. H.-L. Xu and A. Zamolodchikov, J. High Energy Phys. **2022**, 57 (2022); 2203.11262.
14. A. B. Zamolodchikov, hep-th/0401146.
15. F. Smirnov and A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **915**, 363 (2017); 1608.05499.
16. F. A. Smirnov, *Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapore (1992); https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/1115].
17. R. S. Sasaki and I. Yamanaka, Adv. Stud. Pure Math. **16**, 271 (1988).
18. G. Delfino, G. Mussardo, and P. Simonetti, Nucl. Phys. B **473**, 469 (1996); hep-th/9603011.