Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 9, с. 788 – 795 © 2025 г. 10 мая

Ромб триад

А. Миронов[*×○1)], *А. Морозов*[+×○1)], *А. Пополитов*[+×○1)], *З. Закирова*[∇○1)]

[+]*Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия*

[*]*Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[×]*Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия*

[○]*Институт проблем передачи информации, 127994 Москва, Россия*

[∇]*Казанский государственный энергетический университет, 420066 Казань, Россия*

Поступила в редакцию 9 марта 2025 г.
После переработки 6 апреля 2025 г.
Принята к публикации 6 апреля 2025 г.

Термин триада отсылает к вложению двух систем полиномов, симметрических и типа Бейкера–Ахиезера, в степенной ряд типа Ноуми–Шираиши. Триада обеспечивает альтернативное определение теории Макдональда и ее обобщений. Базовая триада связана с векторным представлением алгебры Динга–Иохары–Мики (ДИМ). Мы обсуждаем поднятие этой триады до двух эллиптических обобщений и далее до биэллиптической триады. На алгебраическом уровне это соответствует эллиптической и биэллиптической алгебрам ДИМ. Это завершает список полиномов, связанных с теорией Зайберга–Виттена с присоединенной материей в различном числе измерений.

DOI: 10.31857/S0370274X25050127, EDN: MUFCVL

1. Введение. Взаимосвязи между низкоэнергетическим пределом суперсимметричных калибровочных теорий, называемым теорией Зайберга–Виттена [1, 2], и двумерными конформными теориями (АГТ-соответствие [3–5]) являются одним из главных вопросов в теории струн последних двух десятилетий. Фактически, основными игроками за сценой являются интегрируемые системы [6–8] и функции Некрасова [9–11]. Недавно стало ясно, что есть третий важный ингредиент – теория Макдональда [12] и ее обобщения. Этот третий ингредиент, в частности, связан с алгебраическими структурами, лежащими в основе АГТ-соответствия, – с алгеброй Динга–Иохары–Мики (ДИМ) [13–19] и ее обобщениями [19–21]. В частности, гамильтонианы интегрируемой системы, лежащей в основе теории Зайберга–Виттена, являются элементами коммутативных подалгебр этих алгебр. Собственные функции этих гамильтонианов [22–25] связаны с понятием триады.

В [26, 27] мы определили **триаду** как степенной ряд по $2N$ комплексным переменным x_i, y_i, $i = 1,\ldots,N$, который допускает **две полиномиальных редукции**: одну – при $y_i = q^{\mu_i}t^{N-i}$, где $\{\mu_i\}$ – разбиение, порождающую симметрический полином, другую при $t = q^{-m}$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, приводящую к несимметрической (квази)полиномиальной функции Бейкера–Ахиезера (БА)[2)], причем вторая редукция сводится к первой при $y_i = q^{\mu_i}t^{N-i}$, где $\{\mu_i\}$ – разбиение, *только после суммирования* по группе Вейля. Простейший пример триады, базовая триада, представленная в [26], задается степенным рядом Ноуми–Шираиши [28], а две полиномиальные редукции – это просто обычные полиномы Макдональда [12] и функция БА Чалыха [29].

Базовая триада допускает три типа деформаций. Прежде всего, это расширение на произвольные системы корней. Действительно, можно построить полиномы Макдональда [30–32] и функцию БА [29] для любой системы корней, но аналог функции Ноуми–Шираиши для систем корней, отличных от A_{N-1}, неизвестен. Последние по-прежнему должны быть собственными функциями соответствующих операторов Курнвиндера–Макдональда [30, 33], однако явные формулы для функций Ноуми–Шираиши в этом случае неизвестны.

Вторая деформация относится к твистованному случаю, когда известна функция БА [34, 22] и можно построить аналог полинома Макдональда [24], но

1) e-mail: mironov@lpi.ru; mironov@itep.ru; morozov@itep.ru; popolit@gmail.com; zolya_zakirova@mail.ru

2) Функция БА является полиномом только с точностью до пре-фактора, которая становится полиномом при специальных значениях y_i. Здесь и далее мы используем термин полином также и для квазиполиномиальной функции БА.

снова соответствующая функция Ноуми–Шираиши неизвестна.

Наконец, есть третья деформация, которая связана с эллиптизацией. Мы обсуждали в [27] эллиптическую триаду, которая может быть построена посредством эллиптической деформации с эллиптическим параметром w, и эта деформация приводит к собственным функциям гамильтонианов, двойственных эллиптическим гамильтонианам Рудженаарса. Существует еще одна эллиптическая деформация с эллиптическим параметром p, которая называется функцией Шираиши [35–37]. В пределе Некрасова–Шаташвили она приводит к полиномам, являющимся собственными функциями эллиптических гамильтонианов Рудженаарса. Следовательно, с точки зрения интегрируемых систем, первая из этих деформаций соответствует модели с эллиптической зависимостью от импульсов, тогда как вторая деформация – системам с эллиптической зависимостью от координат. Система, объединяющая обе эти эллиптические зависимости, называется *биэллиптической*, а при подходящем изменении гамильтонианов, делающем ее самодуальной, она называется *дважды эллиптической* (ДЭЛЛ). В данной статье мы имеем дело с *биэллиптической* моделью, отвечающей эллиптическому лифту функции Шираиши (ELS-функция) [38], что в пределе Некрасова–Шаташвили дает собственные функции [39] биэллиптических гамильтонианов Коротеева–Шакирова (КШ) [40].

Это все еще не дает собственные функции гамильтонианов ДЭЛЛ, которые были введены в [41–43] для описания шестимерных теорий Зайберга–Виттена с присоединенной материей: в случае вырождения одного из эллиптических параметров p, эллиптическая триада связана с собственными функциями вырожденных гамильтонианов ДЭЛЛ биортогональностью относительно шуровского скалярного произведения [39], однако эта связь пока не была поднята до невырожденного (биэллиптического $\leftrightarrow$ ДЭЛЛ) случая, т.е. до ELS-триады (см. подробное обсуждение этих вопросов в [44]).

Наша цель в этом письме – сначала изучить вторую эллиптическую деформацию, т.е. мы начинаем с построения триады, связанной с функцией Шираиши, а затем расширяем ее до ELS-триады. Одной из существенных новых особенностей триады Шираиши и ELS-триады является то, что при полиномиальных редукциях они генерируют бесконечные наборы полиномов. Таким образом, мы расширяем понятие триады. Однако все еще имеется две редукции: одна из них порождает бесконечное множество симметрических полиномов, отмеченных разбиением, другая – бесконечное множество функций БА (названных так после статьи [45]), отмеченных N комплексными параметрами. Можно сказать, что новые триады содержат бесконечно много подтриад, каждая из которых допускает две собственные полиномиальные редукции.

Ромб четырех триад выглядит как на следующей схеме.

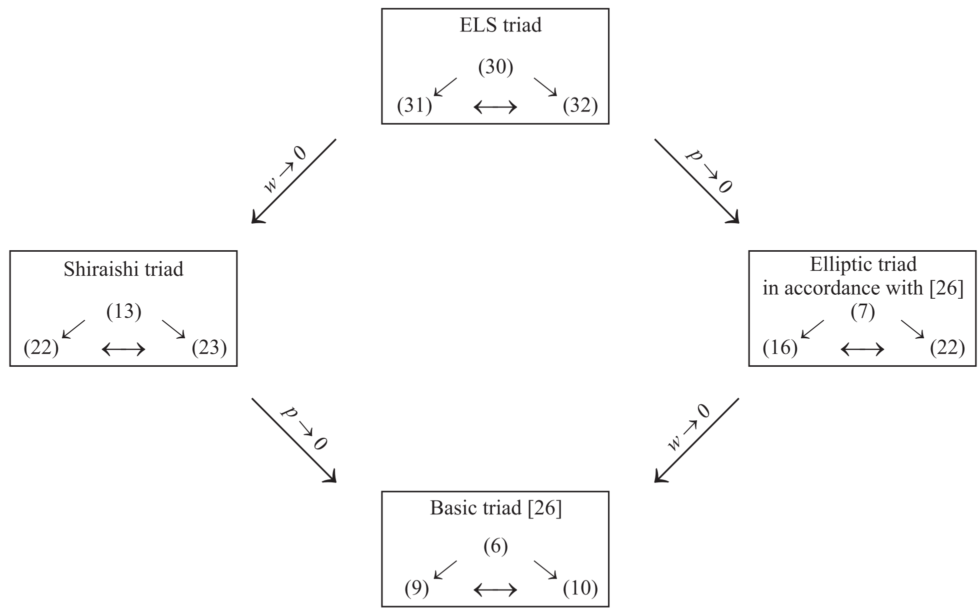
С точки зрения параметров, наиболее общая ELS-функция в верхней части рисунка зависит от $2N$ комплексных переменных x_i и y_i и параметризуется двумя эллиптическими параметрами p и w и еще тремя параметрами s, q и t. С физической точки зрения, эта функция связана с шестимерной теорией Зайберга–Виттена с присоединенной материей, и эти параметры имеют следующий смысл [38]:

q, s – два параметра деформации Ω-фона на стороне калибровочной теории в АГТ-соответствии, s управляет нестационарностью на стороне интегрируемых систем. Предел $s \to 1$ сводит нестационарное уравнение КШ к биэллиптической гамильтоновой задаче на собственные значения. На стороне конформной теории, эти параметры масштабируют размерности операторов.

t – это параметр центрального заряда на стороне конформной теории и параметр константы связи на стороне интегрируемости. Интегрируемая система становится свободной при $t \to 1$. На стороне калибровочной теории этот параметр связан с массой присоединенного гипермультиплета материи m, $t = e^{-m}$.

p – это эллиптический параметр, который управляет константой связи в калибровочной теории (затравочный тор и затравочный заряд). В пределе $p \to 0$ инстантонные поправки исчезают, что дает пертурбативный предел. На стороне интегрируемых теорий этот параметр связан с тором, на котором живут координаты. На стороне конформной теории он связан с тором, на котором живут двумерные поля.

w – эллиптический параметр, который связан с тором Калуцы–Клейна в калибровочной теории (напомним, что рассматривается шестимерная теория Зайберга-Виттена с двумя измерениями, компактифицированными на двумерный тор). С точки зрения интегрируемых систем он связан с тором, на котором живут импульсы.



$$
\begin{gathered}
w = e^{2\pi i\hat{\tau}}, \quad p = e^{2\pi i\tau}, \\
t = e^{-m}, \quad q = e^{-2\pi i\epsilon_1}, \quad s = e^{-2\pi i\epsilon_2}.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Обозначения.
Мы используем q-символы Похгаммера

$$
\begin{gathered}
(u;q)_\infty := \prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i u), \quad (u;q)_n := \frac{(u;q)_\infty}{(q^n u;q)_\infty}, \\
(u;q,w)_\infty := \prod_{i,j=0}^{\infty}(1-q^i w^j u).
\end{gathered} \tag{2}
$$

Мы определяем нечетную тэта-функцию как

$$
\begin{gathered}
\theta_w(z) := (z;w)_\infty (w/z;w)_\infty = \\
= \frac{1}{(w;w)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n w^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n,
\end{gathered} \tag{3}
$$

а также вводим функцию

$$
\mathcal{R}(x,n) := \frac{(x;q)_n}{(xqt^{-1};q)_n} = \prod_{r=0}^{n-1}\frac{(1-q^r x)}{(1-q^{r+1}t^{-1}x)} \tag{4}
$$

и ее эллиптический аналог

$$
\mathcal{R}_p^{\mathrm{ell}}(x,n) := \prod_{r=0}^{n-1}\frac{\theta_p(q^r x)}{\theta_p(q^{r+1}t^{-1}x)}. \tag{5}
$$

2. Базовая триада. Мы начинаем с базовой триады, которая задается степенным рядом Ноуми–Шираиши [28], являющимся формальным степенным рядом по $2N$ переменным $x_i = q^{z_i}$ и $y_i = q^{\lambda_i}$, $i = 1,\ldots,N$

$$
\boxed{
\begin{gathered}
\mathfrak{N}\mathfrak{S}_{q,t}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\lambda_i}\cdot t^{-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\rho}} \times \\
\times \sum_{k_{ij}} \psi_{N,N}\Big(\mathbf{y},\{k_{ij}\};q,t\Big)\prod_{1\le i<j\le N}\left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{k_{ij}},
\end{gathered}
} \tag{6}
$$

где $\boldsymbol{\rho}$ – вектор Вейля, т.е. $\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{z} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(N - 2i + 1)z_i$, и сумма распространяется на все неотрицательные целые числа k_{ij} с $i<j$, а коэффициенты $\psi_{N,M}(\mathbf{y},\{k_{ij}\};q,t)$ для любой натуральной пары (N,M): $N\le M$ определяются как

$$
\begin{gathered}
\psi_{N,M}(\mathbf{y},\{k_{ij}\};q,t) := \\
:= \prod_{i=1}^{N}\left[\frac{\prod\limits_{\substack{j,n\\ i<j\le n}}^{M}\mathcal{R}\Big(t\cdot q^{\lambda_j-\lambda_i+\sum_{a>n}(k_{ia}-k_{ja})},k_{\mathrm{in}}\Big)}{\prod\limits_{\substack{j,n\\ i\le j<n}}^{M}\mathcal{R}\Big(q^{\lambda_j-\lambda_i-k_{jn}+\sum_{a>n}(k_{ia}-k_{ja})},k_{\mathrm{in}}\Big)}\right].
\end{gathered} \tag{7}
$$

Этот степенной ряд обладает двумя свойствами: (i) он является собственной функцией оператора Макдональда–Рудженаарса [12, 46–49] (**гамильтоново уравнение**),

$$\hat{H}_{MR} = \sum_{i=1}^{N} \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} q^{x_i \partial_i}$$

$$\hat{H}_{MR} \cdot \mathfrak{N}\mathfrak{S}_{q,t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sqrt{t} \sum_i y_i \right) \cdot \mathfrak{N}\mathfrak{S}_{q,t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (8)$$

и (ii) он **допускает две полиномиальные редукции**. Прежде всего, степенной ряд (6) можно сделать симметрическим полиномом от переменных x_i, выбрав $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho} \log_q t$, где у вектора $\boldsymbol{\mu}$ все компоненты μ_j яваляются неотрицательными целыми числами, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_N \geq 0$ при $j = 1, \ldots, N$. Этот симметрический полином есть не что иное, как полином Макдональда [28]:

$$\boxed{M_\mu(\{x_i\}; q, t) = \mathfrak{N}\mathfrak{S}_{q,t}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho} \log_q t).} \quad (9)$$

Вместо получения симметрических полиномов с требованиями целочисленности для $\boldsymbol{\lambda}$, можно выбрать $t = q^{-m}$, что даст полином x_i, хотя и не симметрический, но вместо этого с $\boldsymbol{\lambda}$, задаваемым N произвольными комплексными параметрами. Этот полином есть не что иное, как функция БА $\Psi_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ [29]:

$$\boxed{\Psi_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathfrak{N}\mathfrak{S}_{q,q^{-m}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),} \quad (10)$$

которую можно однозначно (с точностью до нормировки) определить свойством периодичности, приводящем к системе линейных уравнений:

$$\begin{gathered} \Psi_m(x_k q^j, \mathbf{y}) = \Psi_m(x_l q^j, \mathbf{y}) \qquad \forall k, l \quad \text{и} \\ 1 \leq j \leq m \qquad \text{при} \quad x_k = x_l. \end{gathered} \quad (11)$$

Мы используем этот термин также и во всех остальных случаях: мы называем функцией БА редукцию при $t = q^{-m}$.

В нашей предыдущей статье [26, 27] мы рассмотрели базовую и эллиптическую триады, заданные степенными рядами, допускающими две полиномиальные редукции: одна из них порождает функцию БА, определенную при N произвольных комплексных параметрах $\boldsymbol{\lambda}$, другая приводит к симметрическому полиному, когда $\boldsymbol{\lambda}$ является разбиением, и может быть получена из функции БА суммированием по группе Вейля.

В этом письме мы используем метод подъема функции Ноуми–Шираиши до функции Шираиши (см. раздел 3.1), предложенный в работе [36], чтобы поднять эллиптическое обобщение функции Ноуми–Шираиши [38] до ELS-функции [38] (см. раздел 4). Это делается практически аналогично статье [36]. Заметим также, что в обоих случаях функций Шираиши и ELS каждая из двух полиномиальных редукций приводит к бесконечному набору полиномов таким образом, что функция БА является набором полиномов, определенных при N произвольных комплексных параметрах $\boldsymbol{\lambda}$, а второй набор полиномов – симметрические полиномы, когда $\boldsymbol{\lambda}$ является разбиением. Симметрические полиномы из второго набора получаются из полиномов первого (функции БА) путем суммирования по группе Вейля. Мы проверили этот факт с помощью компьютера во множестве частных случаев. Мы также обсудим ниже различные свойства симметрии триад и линейные уравнения, подобные (11) в случае Ноуми–Шираиши.

Таким образом, новыми являются формулы (30) с (29) для ELS-функции [38], а также соотношения двух полиномиальных редукций (27)–(28) как в случае триады Шираиши, так и ELS-триады.

3. Триада Шираиши.

3.1. Функция Шираиши.

Определение. Введя эллиптический параметр p, можно достичь периодичности, выбирая

$$x_{i+N} = px_i, \quad y_{i+N} = sy_i \quad (12)$$

в системе с бесконечным количеством x_i и y_i. Однако эта процедура требует некоторой регуляризации. Один из способов сделать ее – ограничить все произведения по i числом N [36] и сохранить все остальные произведения до бесконечности, так что (6) изменится на

$$\boxed{\begin{gathered} \mathfrak{S}_N(\mathbf{x}; p|\mathbf{y}; s|q, t) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\lambda_i} \cdot t^{-\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\rho}} \times \\ \times \sum_{k_{ij}} \psi_{N,\infty}\Big(\mathbf{y}, \{k_{ij}\}; q, t, s\Big) \prod_{i=1}^{N} \prod_{j>i}^{\infty} \left(\frac{x_j}{x_i} \right)^{k_{ij}} \end{gathered}} \quad (13)$$

с условиями периодичности $k_{i+N, j+N} = k_{ij}$, и с (12), наложенными на x_i, y_i.

$\mathfrak{S}_N(\mathbf{x}; p|\mathbf{y}; s|q, t)$ как раз и есть функция Шираиши [35, 36].

3.2. Свойства функции Шираиши.

Биспектральная дуальность. При выборе подходящей нормировки [35, формула (1)],

$$\begin{gathered} \mathfrak{S}_N^{(1)}(\mathbf{x}; p|\mathbf{y}; s|q, t) := \mathcal{N}_1(\mathbf{y}, s|q, t) \mathfrak{S}_N(\mathbf{x}; p|\mathbf{y}; s|q, t) \\ \mathcal{N}_1(\mathbf{y}, s|q, t) := \\ := \prod_{i<j} \frac{\left(q \frac{y_j}{y_i}; q, s^N \right)_\infty}{\left(\frac{q y_j}{t y_i}; q, s^N \right)_\infty} \cdot \prod_{i \leq j} \frac{\left(q s^N \frac{y_i}{y_j}; q, s^N \right)_\infty}{\left(s^N \frac{q y_i}{t y_j}; q, s^N \right)_\infty} \end{gathered} \quad (14)$$

функция Шираиши становится симметричной относительно перестановки наборов $(\mathbf{x},p) \longleftrightarrow (\mathbf{y},s)$ [35, формула (2)], [36, формула (2.12)],

$$\mathfrak{S}^{(1)}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,t) = \mathfrak{S}^{(1)}_N(\mathbf{y};s|\mathbf{x};p|q,t), \tag{15}$$

и также симметричной становится функция Ноуми–Шираиши (6) [28, формула (1.17)] [29, 24] при выборе подобного нормировочного множителя

$$\widehat{\mathcal{N}}_1(\mathbf{y}|q,t) := \prod_{i<j} \frac{\left(q\frac{y_j}{y_i};q\right)_\infty}{\left(\frac{qy_j}{ty_i};q\right)_\infty}. \tag{16}$$

Дуальность Пуанкаре. Далее, при выборе другой нормировки [35, формула (1)],

$$\mathfrak{S}^{(2)}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,t) := \mathcal{N}_2(\mathbf{y},s|q,t)\mathfrak{S}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,t)$$
$$\mathcal{N}_2(\mathbf{y},s|q,t) :=$$
$$:= \prod_{i<j} \frac{\left(\frac{qx_j}{tx_i};q,p^N\right)_\infty}{\left(\frac{qx_j}{x_i};q,p^N\right)_\infty} \cdot \prod_{i\le j} \frac{\left(p^N\frac{qx_i}{tx_j};q,p^N\right)_\infty}{\left(p^N\frac{qx_i}{x_j};q,p^N\right)_\infty} \tag{17}$$

функция Шираиши не меняется при преобразовании $t \to q/t$ [35, Формула (3)], [36, формула (2.12)],

$$\mathfrak{S}^{(2)}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,t) = \mathfrak{S}^{(2)}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,q/t) \tag{18}$$

и также не меняется функция Ноуми–Шираиши (6) [28, формула (1.17)] [29, 24] при выборе нормировочного множителя

$$\widehat{\mathcal{N}}_2(\mathbf{y}|q,t) := \prod_{i<j} \frac{\left(\frac{qx_j}{tx_i};q\right)_\infty}{\left(\frac{qx_j}{x_i};q\right)_\infty}. \tag{19}$$

Гамильтоново уравнение. Уравнение на функцию Шираиши весьма сложное [36], и его называют "нестационарное эллиптическое уравнение Руджена-арса", поскольку в пределе[3] $s \to 1$ функция Шираиши становится собственной функцией гамильтониана эллиптического Рудженаарса [35],

$$\hat{H}_{ellR} = \sum_{i=1}^N \prod_{j\ne i} \frac{\theta_p(tx_i/x_j)}{\theta_p(x_i/x_j)} q^{x_i\partial_i}$$
$$\hat{H}_{ellR} \cdot \mathfrak{S}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s\to 1|q,t) =$$
$$= \Lambda(y_i;p,q,t)\cdot \mathfrak{S}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s\to 1|q,t). \tag{20}$$

Таким образом, в соответствии с тем, что мы объяснили во Введении, s контролирует нестационарность, а предел $s \to 1$ отвечает пределу Некрасова–Шаташвили.

[3] В этом пределе функция Шираиши сингулярна, и нужно изменить ее нормировку так, чтобы она стала регулярной в пределе $s \to 1$.

3.3. Полиномиальные редукции. Для того, чтобы генерировать полиномиальные редукции функции Шираиши, ее надо разложить в ряд по степеням параметра p:

$$\mathfrak{S}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,t) = \sum_{n\ge 0} p^{Nn} \cdot \frac{\mathfrak{S}^{(n)}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,t)}{\prod_{i=1}^N x_i^n} =$$
$$= \sum_{n\ge 0} \mathfrak{S}^{(n)}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,t)\cdot \prod_{i=1}^N \left(\frac{p}{x_i}\right)^n. \tag{21}$$

Редукция к симметрическим полиномам. Таким образом, получается бесконечный набор степенных рядов $\mathfrak{S}^{(n)}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,t)$, отмеченных дополнительным *уровнем* n, и каждый из них допускает две полиномиальные редукции. Первая возникает при выборе $y_i = q^{\mu_i}t^{N-i}$ с $\mu_i \in \mathbb{Z}$, $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \ldots \mu_N \ge 0$ и умножении $\mathfrak{S}^{(n)}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,t)$ на $\prod_{i+1}^N x_i^{\mu_i}$:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathfrak{M}_\mu(\mathbf{x};p;s|q,t) = \mathfrak{S}_N\Big(\mathbf{x};p\big|\{q^{\mu_i}t^{N-i}\};s\big|q,t\Big) = \\ = \sum_{n\ge 0} \mathfrak{M}^{(n)}_\mu(\mathbf{x};s|q,t)\cdot \prod_{i=1}^N\left(\frac{p}{x_i}\right)^n.\end{gathered}} \tag{22}$$

Здесь $\mathfrak{M}^{(n)}_\mu(\mathbf{x};s|q,t)$ – симметрический полином, и $\mathfrak{M}^{(0)}_\mu(\mathbf{x};s|q,t)$ не зависит от s и является стандартным полиномом Макдональда $M_\mu(\mathbf{x};q,t)$.

Редукция к функции БА. Другая полиномиальная редукция возникает при выборе $t = q^{-m}$, $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$. Эта полиномиальная редукция приводит к функции БА:

$$\boxed{\begin{gathered}\Psi_m(\mathbf{x};p\,|\,\mathbf{y};s) = \mathfrak{S}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,q^{-m}) := \\ := \sum_n \Psi^{(n)}_m(\mathbf{x};\mathbf{y};s)\prod_{i=1}^N\left(\frac{p}{x_i}\right)^n\end{gathered}} \tag{23}$$

и

$$\boxed{\begin{gathered}\Psi^{(n)}_m(\mathbf{x};\mathbf{y};s) = \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_i - m\rho_i}\times \\ \times \sum_{k_{ij}} \psi^{(n)}_m\Big(\mathbf{y},\{k_{ij}\},s;q\Big)\prod_{1\le i<j\le N}\left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{k_{ij}}\end{gathered}} \tag{24}$$

с $0 \le k_{ij} \le m+2n$, причем $\Psi^{(n)}_m(\mathbf{x};\,|\,\mathbf{y};s)$ все еще удовлетворяет все тому же условию периодичности (11):

$$\Psi_m(x_kq^j,\mathbf{y}) = \Psi_m(x_lq^j,\mathbf{y})$$
$$\forall k,l \ \text{ и } \ 1\le j\le m \qquad \text{при } \ x_k = x_l. \tag{25}$$

На самом деле, $\Psi^{(0)}_m(\mathbf{x};\,|\,\mathbf{y};s) = \Psi^{(0)}_m(\mathbf{x};\,|\,\mathbf{y})$ не зависит от s.

Необходимо сделать два замечания. Прежде всего, оба свойства симметричности (15) и (18) наследуются полной функцией БА $\Psi_m(\mathbf{x};p\,|\,\mathbf{y};s)$, но не отдельными полиномами $\Psi_m^{(n)}(\mathbf{x};\mathbf{y};s)$ при $n\neq 0$. В частности, это означает, что, в отличие от случая $n=0$, нельзя использовать функцию БА для построения симметрических полиномов при $t=q^{m+1}$.

Во-вторых, обратим внимание, что свойство периодичности достаточно для однозначной фиксации функции БА $\Psi_m^{(0)}(\mathbf{x};\,|\,\mathbf{y})$ [29], однако, это уже не так для более высоких $\Psi_m^{(n)}(\mathbf{x};\,|\,\mathbf{y};s)$: количество уравнений, необходимых для фиксации функции БА $\Psi_m^{(n)}(\mathbf{x};\,|\,\mathbf{y};s)$, растет с n. Поэтому остается открытым вопрос, можно ли дополнить уравнения периодичности при $n\neq 0$ бо́льшим количеством уравнений, так, чтобы каждое $\Psi_m^{(n)}(\mathbf{x};\,|\,\mathbf{y};s)$ можно было бы определить исключительно из этих уравнений однозначно (с точностью до нормировки).

Связь двух редукций. В случае базовой триады можно сделать полином Макдональда из функции БА при неотрицательных целых значениях компонент вектора $\boldsymbol{\lambda}+m\boldsymbol{\rho}$, упорядоченных по невозрастанию (это – оригинальное соотношение Чалыха между двумя редукциями, см. [29, теорема 5.11]), при помощи суммирования по действию группы Вейля:

$$M_{\boldsymbol{\lambda}+m\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x};q,q^{-m})=\sum_{w\in W}\Psi_m(w\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}). \tag{26}$$

Здесь w – элемент группы Вейля для A_{N-1}. Оказывается, что это соотношение продолжает оставаться верным на уровне функции Шираиши:

$$\mathfrak{M}^{(n)}_{\boldsymbol{\lambda}+m\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x};p;s|q,q^{-m})=\sum_{w\in W}\Psi_m^{(n)}(w\mathbf{x};\mathbf{y};s) \tag{27}$$

или, эквивалетно,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{S}_N(\mathbf{x};p|\{q^{\mu_i}t^{N-i};s|q,t)=\\ &=\sum_{w\in W}\mathfrak{S}_N(w\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,q^{-m}).\end{aligned} \tag{28}$$

4. ELS-триада.

Определение. Столь же непосредственно конструируется и ELS-триада: коэффициенты в (7) просто обобщаются заменой разностей на тэта-функции, как это делалось в [50, 38, 27]:

$$\psi^{\rm ell}_{N,M}\Big(\mathbf{y},\{k_{ij}\};q,t,w\Big):= \tag{29}$$

$$:=\prod_{i=1}^{N}\left[\frac{\prod\limits_{\substack{j,n\\ i<j\le n}}^{M}\mathcal{R}^{\rm ell}_w\Big(t\cdot q^{\lambda_j-\lambda_i+\sum_{a>n}(k_{ia}-k_{ja})},k_{\rm in}\Big)}{\prod\limits_{\substack{j,n\\ i\le j<n}}^{M}\mathcal{R}^{\rm ell}_w\Big(q^{\lambda_j-\lambda_i-k_{jn}+\sum_{a>n}(k_{ia}-k_{ja})},k_{\rm in}\Big)}\right].$$

Теперь снова накладывая условия периодичности $k_{i+N,j+N}=k_{ij}$ и (12) на x_i, y_i, непосредственно получается степенной ряд ELS [38]

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathfrak{S}^{\rm ell}_N(\mathbf{x};p|\mathbf{y};s|q,t,w)=\prod_{i=1}^{N}x_i^{\lambda_i}\cdot t^{-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\rho}}\times\\ &\times\sum_{k_{ij}}\psi^{\rm ell}_{N,\infty}\Big(\mathbf{y},\{k_{ij}\};q,t,w\Big)\prod_{i=1}^{N}\prod_{j>i}^{\infty}\left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{k_{ij}}.\end{aligned}} \tag{30}$$

Полиномиальные редукции. В этом случае надо буквально повторить шаги, которые мы делали в случае функции Шираиши, для того, чтобы получить бесконечный набор симметричсеких полиномов

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathfrak{M}^{ell}_\mu(\mathbf{x};p;s|q,t,w)=\mathfrak{S}_N\Big(\mathbf{x};p\Big|\{q^{\mu_i}t^{N-i}\};s\Big|q,t,w\Big)=\\ &\sum_{n\ge 0}\mathfrak{M}^{(ell,n)}_\mu(\mathbf{x};s|q,t,w)\cdot\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p}{x_i}\right)^n\end{aligned}} \tag{31}$$

и бесконечный набор функций БА:

$$\boxed{\begin{aligned}&\Psi^{\rm ell}_m(\mathbf{x};p\,|\,\mathbf{y};s|q,w)=\mathfrak{S}^{\rm ell}_N\Big(\big|x;p|\mathbf{y};s\big|q,q^{-m},w\Big):=\\ &:=\sum_{n}\Psi^{(\mathrm{ell},n)}_m(\mathbf{x};\mathbf{y};s,w)\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p}{x_i}\right)^n.\end{aligned}} \tag{32}$$

Заметим, что тот факт, что $\mathfrak{M}^{(\mathrm{ell},n)}_\mu(\mathbf{x};s|q,t,w)$ – симметрический полином, крайне нетривиален [51] и является следствием ряда тождеств на тэта-функции [38]. Соотношения (27)–(28) между двумя полиномиальными редукциями все еще сохраняются и в этом случае ELS-триады. Однако аналог (11) в эллиптическом случае до сих пор не построен.

Гамильтоново уравнение. Аналогично случаю триады Шираиши, чтобы получить "стационарное" уравнение в случае ELS-триады, нужно взять предел $s\to 1$ с соответствующим изменением нормировки. Тогда ELS-триада становится собственной функцией гамильтонианов КШ [39]. Эти гамильтонианы могут быть представлены либо [44, уравнения (97), (137)] в исходной форме КШ [40], либо [44, уравнения (127), (138)] в форме, предложенной в [52]. Гамильтонианы нелокальны и довольно сложны, и мы не воспроизводим их здесь.

5. Заключение. В этом письме мы рассмотрели дополнительную эллиптическую деформацию с эллиптическим параметром p известных триад: базовой триады из [26] и эллиптической триады из [27]. Это позволило нам расширить понятие этих триад так, что они допускают две редукции к бесконечным наборам полиномов: к (симметрическим)

$\mathfrak{M}_\mu^{(n)}(\mathbf{x};s|q,t)$ и $\Psi_m^{(n)}(\mathbf{x};|\,\mathbf{y};s)$ $(n=0,\ldots,\infty)$, полученным путем разложения функции Шираиши по p, и к (симметрическим) $\mathfrak{M}_\mu^{(\mathrm{ell},n)}(\mathbf{x};p;s|q,t,w)$ и $\Psi_m^{(\mathrm{ell},n)}(\mathbf{x};p\,|\,\mathbf{y};s|q,w)$ $(n=0,\ldots,\infty)$, полученным путем разложения ELS-функции по p. Построенная нами **биэллиптическая ELS-триада** является наибольшей триадой, связанной с шестимерной теорией Зайберга–Виттена с присоединенной материей, и четыре построенные триады исчерпывают полиномиальные системы, связанные с теориями Зайберга–Виттена этого типа. Открытым остается вопрос о преобразовании биэллиптической конструкции к явной дважды эллиптической (самодуальной) форме [44].

Финансирование работы. Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (грант номер # 23-41-00049).

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

---

1. N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B **426**, 19 (1994); hep-th/9408099.
2. N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B **431**, 484 (1994); hep-th/9407087.
3. L. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, Lett. Math. Phys. **91**, 167 (2010); arXiv:0906.3219.
4. N. Wyllard, JHEP **0911**, 002 (2009); arXiv:0907.2189.
5. A. Mironov and A. Morozov, Nucl. Phys. B **825**, 1 (2009); arXiv:0908.2569.
6. A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, Phys. Lett. B **355**, 466 (1995); hep-th/9505035.
7. A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, Nucl. Phys. B **527**, 690 (1998); hep-th/9802007.
8. A. Gorsky and A. Mironov, hep-th/0011197.
9. N. Nekrasov, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 831 (2004); hep-th/0206161.
10. R. Flume and R. Poghossian, Int. J. Mod. Phys. A **18**, 2541 (2003); hep-th/0208176.
11. A. Mironov and A. Morozov, Phys. Lett. B **680**, 188 (2009); arXiv:0908.2190.
12. I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University Press (1995).
13. J. Ding and K. Iohara, Lett. Math. Phys. **41**, 181 (1997); q-alg/9608002.
14. K. Miki, J. Math. Phys. **48**, 123520 (2007).
15. H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi, and S. Yanagida, arXiv:1106.4088.
16. B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin, Kyoto J. Math. **52**, 621 (2012); arXiv:1110.5310.
17. H. Awata, B. Feigin, and J. Shiraishi, arXiv:1112.6074.
18. H. Awata, H. Kanno, T. Matsumoto, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, Y. Ohkubo, and Y. Zenkevich, JHEP **07**, 103 (2016); arXiv:1604.08366.
19. A. Mironov, A. Morozov, and Y. Zenkevich, Phys. Lett. B **762**, 196 (2016); arXiv:1603.05467.
20. Y. Saito, arXiv:1301.4912.
21. M. Ghoneim, C. Kozçaz, K. Kurşun, and Y. Zenkevich, Nucl. Phys. B **978**, 115740 (2022); arXiv:2012.15352.
22. O. Chalykh and M. Fairon, J. Geom. Phys. **121**, 413 (2017); arXiv:1704.05814.
23. A. Mironov, A. Morozov, and A. Popolitov, JHEP **2024**, 200 (2024); arXiv:2406.16688.
24. A. Mironov, A. Morozov, and A. Popolitov, Phys. Lett. B **863**, 139380 (2025); arXiv:2410.10685.
25. A. Mironov, A. Morozov, and A. Popolitov, Nucl. Phys. B **1012**, 116809 (2025); arXiv:2411.14194.
26. A. Mironov, A. Morozov, and A. Popolitov, arXiv:2411.16517.
27. A. Mironov, A. Morozov, A. Popolitov, and Z. Zakirova, arXiv:2412.19588.
28. M. Noumi and J. Shiraishi, arXiv:1206.5364.
29. O. Chalykh, Adv. Math. **166**(2), 193 (2002); math/0212313.
30. I. G. Macdonald, *Orthogonal polynomials associated with root systems*, preprint (1987); mathQA/0011046.
31. I. Cherednik, q-alg/9412016.
32. I. Cherednik, The Annals of Mathematics, Second Series **141**, 191 (1995).
33. T. H. Koornwinder, in *Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications, Tampa, FL (1991)*, Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1992), v. 138, p. 189.
34. O. Chalykh and P. Etingof, Adv. Math. **238**, 246 (2013); arXiv:1111.0515.
35. J. Shiraishi, J. Integrable. Syst. **4**, xyz010 (2019); arXiv:1903.07495.
36. E. Langmann, M. Noumi, and J. Shiraishi, SIGMA **16**, 105 (2020); arXiv:2006.07171.
37. H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, and A. Morozov, JHEP **2020**; 212, (2020); arXiv:1912.12897.
38. H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, and A. Morozov, JHEP **08**, 150 (2020); arXiv:2005.10563.
39. A. Mironov, A. Morozov, and Y. Zenkevich, Eur. Phys. J. C **81**, 461 (2021); arXiv:2103.02508.
40. P. Koroteev and S. Shakirov, Lett. Math. Phys. **110**, 969 (2020); arXiv:1906.10354.
41. H.W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, Nucl. Phys. B **573**, 553 (2000); hep-th/9906240.
42. A. Mironov and A. Morozov, Phys. Lett. B **475**, 71 (2000); hep-th/9912088.
43. A. Mironov and A. Morozov, hep-th/0001168.

44. A. Mironov and A. Morozov, Nucl. Phys. B **999**, 116448 (2024); arXiv:2309.06403.
45. O. A. Chalykh, M. V. Feigin, and A. P. Veselov, Comm. Math. Phys. **206**, 533 (1999); math-ph/9903019.
46. J. Sekiguchi, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **12**, 455 (1977).
47. A. Debiard, C. R. Acad. Sci. Paris (sir. I) **296**, 529 (1983).
48. S. N. M. Ruijsenaars, Comm. Math. Phys. **110**, 191 (1987).
49. I. G. Macdonald, Springer Lecture Notes **1271**, 189 (1987).
50. M. Fukuda, Y. Ohkubo, and J. Shiraishi, SIGMA **16**, 116 (2020); arXiv:2002.00243.
51. H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, and A. Morozov, Eur. Phys. J. C **80**, 994 (2020); arXiv:2002.12746.
52. A. Grekov and A. Zotov, SciPost Phys. **10**, 055 (2021); arXiv:2010.08077.