Письма в ЖЭТФ, том 122, вып. 3, с. 139 – 146

Световые сдвиги резонансов когерентного пленения населенностей в периодически-модулированном лазерном излучении

В. И. Юдин[+*×1)] *М. Ю. Басалаев*[+*×], *А. В. Тайченачев*[+*], *О. Н. Прудников*[+*], *М. Д. Радченко*[+*×], *В. Г. Пальчиков*[◦∇]

[+] *Институт лазерной физики Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

[*] *Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

[×] *Новосибирский государственный технический университет, 630073 Новосибирск, Россия*

[◦] *Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений, 141570 Менделеево, Россия*

[∇] *Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 мая 2025 г.
После переработки 2 июля 2025 г.
Принята к публикации 3 июля 2025 г.

В рамках фурье-анализа были исследованы световые сдвиги резонансов когерентного пленения населенностей в периодически модулированном лазерном поле, когда частота модуляции f варьируется вблизи дробной частоты сверхтонкого расщепления в основном состоянии атомов $\Delta_{\rm hfs}/N$ (где $N = 1, 2, 3, ...$). Такой тип модуляции обычно имеет место в малогабаритных часах с полупроводниковым лазером, когда ток инжекции гармонически модулирован на частоте f, либо при использовании электрооптического или акустооптического модулятора. При этом формируется полихроматическое эквидистантное излучение, в котором имеются только две частотные компоненты, наиболее резонансные рабочим оптическим переходам в атоме, в то время как все остальные частотные компоненты являются относительно нерезонансными. На основе точных численных расчетов мы показали, что широко распространенная точка зрения, согласно которой сдвиг резонанса когерентного пленения населенностей определяется обычным квадратичным штарковским сдвигом нижних атомных уровней, является, в общем случае, существенно некорректной. Это обусловлено тем, что в общем случае дополнительный вклад в световой сдвиг резонанса когерентного пленения населенностей, обусловленный биениями (на частоте $\Delta_{\rm hfs}$) между различными нерезонансными частотными компонентами, может быть сопоставим (или даже доминировать) по отношению к величине стандартного штарковского сдвига. Более того, эти биения являются фазовочувствительными. Поэтому даже наличие детальной информации о спектральном составе модулированного излучения (например, с помощью спектр-анализатора) не является достаточным для определения светового сдвига резонанса когерентного пленения населенностей.

DOI: 10.31857/S0370274X25080032, EDN: DOMXRF

Атомные часы, основанные на резонансе когерентного пленения населенностей (КПН), в течение достаточно долгого времени активно разрабатываются во многих исследовательских центрах по всему миру [1–11]. В настоящее время имеются коммерчески доступные миниатюрные атомные часы (CSAC) различных производителей, в которых малые габариты и низкое энергопотребление сочетаются с достаточно высокими метрологическими характеристиками [12–15]. Такие устройства находят широкое применение в различных областях науки и техники [16–19]. В то же время, продолжаются исследования и разработки, направленные на улучшение метрологических характеристик CSAC [20–22].

Изначально эффект КПН был обнаружен и теоретически разработан в случае бихроматического поля, когда разность частот между его компонентами варьировалась около частоты сверхтонкого расщепления $\Delta_{\rm hfs}$ в основном состоянии атомов щелочных металлов [23–25]. Однако, в малогабаритных атомных часах обычно используется периодически модулированное излучение полупроводникового лазера с вертикальным резонатором (VCSEL) для возбуждения резонансов когерентного пленения населенностей в парах щелочных металлов (Rb, Cs). Кроме того, для модуляции также используются элек-

1) e-mail: viyudin@mail.ru

трооптические и акустооптические модуляторы. При этом сама частота модуляции f обычно равна $\Delta_{\rm hfs}$ или $\Delta_{\rm hfs}/2$. Во всех этих случаях формируется полихроматическое эквидистантное излучение, в спектре которого имеются только две частотные компоненты, которые наиболее резонансны к оптическим атомным переходам и формируют сам спектроскопический сигнал (КПН-резонанс), в то время как остальные (относительно нерезонансные) спектральные компоненты являются, по существу, балластом, влияющим на световой сдвиг КПН-резонанса.

При этом одним из наиболее важных параметров, который определяет метрологические характеристики атомных КПН часов (например, долговременную стабильность), является именно световой сдвиг реперного резонанса. Поэтому исследование этого сдвига и разработка методов его подавления является одной из наиболее актуальных задач прецизионной лазерной спектроскопии и квантовой метрологии [20, 26–34]. В то же время в большинстве работ, как правило, использовался и продолжает использоваться упрощенный подход (см., например, [6, 35–37]), в котором учитываются только две резонансные частные компоненты, т.е. когда реальное полихроматическое излучение заменяется двухчастотным полем, в то время как все остальные спектральные компоненты рассматриваются только в контексте квадратичного штарковского сдвига атомных уровней. В результате такого подхода сформировалось и стало доминирующим упрощенное представление о природе сдвига КПН-резонанса, согласно которому этот сдвиг определяется квадратичным штарковским сдвигом энергий рабочих уровней в основном состоянии атомов. Однако, как показано в нашей работе, такие полуинтуитивные представления являются, в общем случае, весьма некорректными, и поэтому требуется их существенный пересмотр.

В настоящей работе мы проводим расчет КПН-резонанса и его светового сдвига в периодически модулированном лазерном поле, когда частота модуляции f варьируется вблизи дробной частоты сверхтонкого расщепления в основном состоянии атомов $\Delta_{\rm hfs}/N$ (где $N = 1, 2, 3, ...$). При этом мы используем точное решение системы уравнений для атомной матрицы плотности на основе фурье-анализа. Далее, мы сопоставляем полученные результаты для светового сдвига КПН-резонанса с расчетом стандартного квадратичного штарковского сдвига атомных уровней и проводим физическую интерпретацию обнаруженных существенных различий.

Рассмотрим взаимодействие трех-уровневой Λ-системы (см. рис. 1a) с лазерным полем с про-

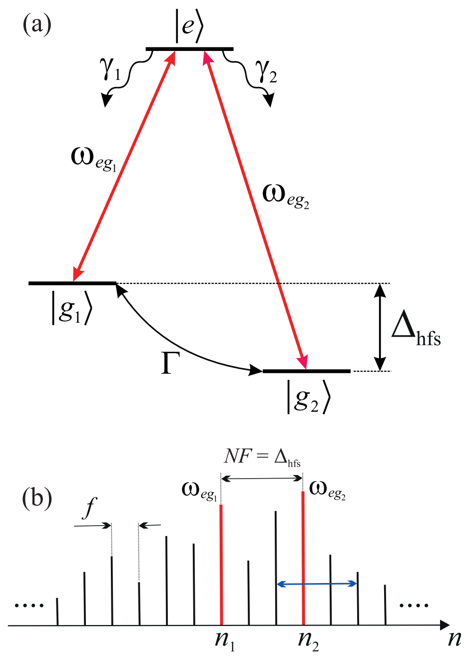

Рис. 1. (Цветной онлайн) (a) – Схема энергетических уровней для Λ-системы. (b) – Схематическое изображение спектрального разложения поля (2), где красными линиями выделены две частотные компоненты, резонансные оптическим переходам в Λ-системе (см. верхний рисунок (a))

извольной амплитудно-частотной периодической модуляцией с частотой модуляции f:

$$E(t) = e^{-i\omega t}\mathcal{E}(t)e^{-i\varphi(t)} + \text{c.c.}, \tag{1}$$

где ω есть несущая частота, а $\mathcal{E}(t+T) = \mathcal{E}(t)$ и $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ есть произвольные периодические функции с периодом $T = 2\pi/f$ для амплитуды и фазы соответственно. В рамках фурье-разложения такое поле может быть описано как полихроматическое когерентное излучение вида:

$$E(t) = \\ = \sum_n \mathcal{E}_n e^{-i(\omega_n t+\phi_n)} + \text{c.c.} = \sum_{n\neq n_{1,2}} \mathcal{E}_n e^{-i(\omega_n t+\phi_n)} + \\ + \mathcal{E}_{n_1} e^{-i(\omega_{n_1} t+\phi_{n_1})} + \mathcal{E}_{n_2} e^{-i(\omega_{n_2} t+\phi_{n_2})} + \text{c.c.}, \tag{2}$$

где $n = 0, \pm1, \pm2, ...$, а $\mathcal{E}_n$ и ϕ_n есть соответственно амплитуда и фаза n-й спектральной компоненты электрического поля с частотой

$$\omega_n = \omega + nf. \tag{3}$$

Таким образом, соседние частоты отстоят друг от друга на одинаковую величину f (см. рис. 1b), которую будем полагать равной $f = \Delta_{\rm hfs}/N$, где $\Delta_{\rm hfs} = \omega_{eg_2} - \omega_{eg_1}$ есть частота перехода между нижними состояниями $|g_1\rangle$ и $|g_2\rangle$, а N есть какое-то фиксированное целое число $N \geq 1$.

В выражении (2) мы выделили две частотные компоненты с индексами n_1 и n_2, которые резонансны оптическим переходам в Λ-системе (см. частотные компоненты, выделенные красным цветом на рис. 1b): $\omega_{n_1} \approx \omega_{eg_1}$ и $\omega_{n_2} \approx \omega_{eg_2}$. При этом разность между этими частотами автоматически варьируется около частоты расщепления нижних уровней, $\omega_{n_2} - \omega_{n_1} = (n_2 - n_1)f \approx \Delta_{\rm hfs}$, т.е. $n_2 = n_1 + N$.

Теоретическое описание квантовой системы будем проводить в рамках формализма одноатомной матрицы плотности $\hat{\rho}$, которая в базисе состояний $\{|e\rangle, |g_1\rangle, |g_2\rangle\}$ имеет вид

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{ee} & \rho_{eg_1} & \rho_{eg_2} \\ \rho_{g_1e} & \rho_{g_1g_1} & \rho_{g_1g_2} \\ \rho_{g_2e} & \rho_{g_2g_1} & \rho_{g_2g_2} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} + \hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\} = -i[\hat{H}^{(0)}, \hat{\rho}] - i[\hat{V}(t), \hat{\rho}], \tag{5}$$

где символ $[\hat{A}, \hat{B}] = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ обозначает коммутатор операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$. В выражении (5) $\hat{H}_0$ есть гамильтониан невозмущенного атома, линейный функционал $\hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\}$ описывает релаксационные процессы, а $\hat{V}(t)$ есть оператор дипольного взаимодействия атомов с лазерным излучением.

Введем следующие проекционные операторы:

$$\hat{\Pi}_e = |e\rangle\langle e|,\ \hat{\Pi}_{eg_1} = |e\rangle\langle g_1|,\ \hat{\Pi}_{eg_2} = |e\rangle\langle g_2|, \tag{6}$$
$$\hat{\Pi}_{g_1} = |g_1\rangle\langle g_1|,\ \ \hat{\Pi}_{g_2} = |g_2\rangle\langle g_2|,\ \ \hat{\Pi}_g = \hat{\Pi}_{g_1} + \hat{\Pi}_{g_2}.$$

Тогда гамильтониан невозмущенного атома можно представить как

$$\hat{H}^{(0)} = -\omega_{eg_1}\hat{\Pi}_{g_1} - \omega_{eg_2}\hat{\Pi}_{g_2}, \tag{7}$$

в то время как выражение для оператора $\hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\}$ в модели констант релаксации имеет вид

$$\hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\} = \gamma_{\rm sp}\hat{\Pi}_e\hat{\rho}\hat{\Pi}_e - \gamma_1\hat{\Pi}^\dagger_{eg_1}\hat{\rho}\hat{\Pi}_{eg_1} - \gamma_2\hat{\Pi}^\dagger_{eg_2}\hat{\rho}\hat{\Pi}_{eg_2} + \tag{8}$$
$$+\gamma_{\rm opt}\big(\hat{\Pi}_e\hat{\rho}\hat{\Pi}_g + \hat{\Pi}_g\hat{\rho}\hat{\Pi}_e\big) + \Gamma\big(\hat{\Pi}_g\hat{\rho}\hat{\Pi}_g - \frac{\hat{\Pi}_g}{2}{\rm Tr}\{\hat{\Pi}_g\hat{\rho}\hat{\Pi}_g\}\big),$$

где имеется следующий набор констант релаксации: $(\gamma_{\rm sp}, \gamma_{1,2}, \gamma_{\rm opt}, \Gamma)$. При этом $\gamma_{\rm sp}$ есть скорость спонтанного распада верхнего уровня, а константы γ_1 и γ_2 описывают парциальные скорости спонтанного прихода в нижние состояния $|g_1\rangle$ и $|g_2\rangle$ соответственно (см. рис. 1a), для которых выполняется условие замкнутости Λ-системы

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_{\rm sp}. \tag{9}$$

Константа $\gamma_{\rm opt}$ описывает скорость затухания оптической когерентности как за счет спонтанного излучения, так и за счет столкновений с буферным газом, т.е. должно выполняться условие $\gamma_{\rm opt} \geq \gamma_{\rm sp}/2$. Константа Γ описывает скорость диффузионно-пролетной деполяризации атомов в основном состоянии к равновесному изотропному распределению: $\hat{\Pi}_g{\rm Tr}\{\hat{\Pi}_g\hat{\rho}\hat{\Pi}_g\}/2$. В случае КПН-спектроскопии для атомов щелочных металлов (например, ^{87}Rb или ^{133}Cs) в газовых ячейках с буферным газом обычно выполняется следующая иерархия величин:

$$\Gamma \ll \gamma_{\rm sp} \ll \gamma_{\rm opt} < f. \tag{10}$$

При этом мы будем полагать, что величина $\gamma_{\rm opt}$ также превышает доплеровскую ширину линии (т.е. $\gamma_{\rm opt} > k\bar{v}$, где $\bar{v}$ – тепловая скорость атомов), что позволяет использовать модель неподвижных атомов.

В приближении вращающейся волны оператор электро-дипольного взаимодействия атома $\hat{V}(t) = -\hat{d}E(t)$ с лазерным полем (2) имеет вид:

$$\hat{V}(t) = -\begin{pmatrix} 0 & V_{eg_1} & V_{eg_2} \\ V^*_{eg_1} & 0 & 0 \\ V^*_{eg_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

в котором матричные элементы определяются как

$$V_{eg_j}(t) = \sum_n \Omega_n^{(j)} e^{-i(\omega_n t + \phi_n)}, \quad (j = 1, 2), \tag{12}$$

где

$$\Omega_n^{(j)} = d_{eg_j}\mathcal{E}_n/\hbar, \quad (j = 1, 2), \tag{13}$$

есть соответствующие частоты Раби для n-й спектральной компоненты поля, а $d_{eg_j} = \langle e|\hat{d}|g_j\rangle$ есть матричный элемент оператора электрического дипольного момента для оптического перехода $|g_j\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ $(j = 1, 2)$.

Используя формулы (6)–(12), из общего операторного уравнения (5) для матрицы плотности получаем следующую систему уравнений на ее элементы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{g_1g_1} + \frac{\Gamma}{2}(\rho_{g_1g_1} - \rho_{g_2g_2})/2 - \gamma_1\rho_{ee} =$$
$$i\sum_n \left\{\Omega_n^{(1)*}\rho_{eg_1}e^{i(\omega_n t + \phi_n)} - \Omega_n^{(1)}\rho_{g_1e}e^{-i(\omega_n t + \phi_n)}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{g_2g_2} + \frac{\Gamma}{2}(\rho_{g_2g_2} - \rho_{g_1g_1})/2 - \gamma_2\rho_{ee} =$$
$$i\sum_n \left\{\Omega_n^{(2)*}\rho_{eg_1}e^{i(\omega_n t + \phi_n)} - \Omega_n^{(2)}\rho_{g_1e}e^{-i(\omega_n t + \phi_n)}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{ee} + \gamma_{\rm sp}\rho_{ee} =$$
$$i\sum_n \left\{\Omega_n^{(1)}\rho_{g_1e} + \Omega_n^{(2)}\rho_{g_2e}\right\} e^{-i(\omega_n t+\phi_n)} -$$
$$i\sum_n \left\{\Omega_n^{(1)*}\rho_{eg_1} + \Omega_n^{(2)*}\rho_{eg_2}\right\} e^{i(\omega_n t+\phi_n)},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{g_1g_2} + (\Gamma + i\Delta_{\rm hfs})\rho_{g_1g_2} = \tag{14}$$
$$i\sum_n \left\{\Omega_n^{(1)*}\rho_{eg_2}e^{i(\omega_n t+\phi_n)} - \Omega_n^{(2)}\rho_{g_1e}e^{-i(\omega_n t+\phi_n)}\right\},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{eg_1} + (\gamma_{\rm opt} + i\omega_{eg_1})\rho_{eg_1} =$$
$$i\sum_n \left\{\Omega_n^{(1)}\rho_{g_1g_1} + \Omega_n^{(2)}\rho_{g_2g_1} - \Omega_n^{(1)}\rho_{ee}\right\} e^{-i(\omega_n t+\phi_n)},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{eg_2} + (\gamma_{\rm opt} + i\omega_{eg_2})\rho_{eg_2} =$$
$$i\sum_n \left\{\Omega_n^{(1)}\rho_{g_1g_2} + \Omega_n^{(2)}\rho_{g_2g_2} - \Omega_n^{(2)}\rho_{ee}\right\} e^{-i(\omega_n t+\phi_n)},$$
$$\rho_{g_2g_1} = \rho^*_{g_1g_2}, \quad \rho_{g_1e} = \rho^*_{eg_1}, \quad \rho_{g_2e} = \rho^*_{eg_2}.$$

Кроме того, учитывая сохранение полной населенности, систему уравнений (14) необходимо дополнить условием нормировки

$$\mathrm{Tr}\{\hat\rho\} = \rho_{g_1g_1} + \rho_{g_2g_2} + \rho_{ee} = 1, \tag{15}$$

которое есть следствие условия замкнутости Λ-системы (9).

Поиск точного решения уравнения (5) при взаимодействии с полем (2) (т.е. системы уравнений (14)) мы проводили в рамках фурье-анализа при разложении матрицы плотности в виде

$$\hat\rho(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat\rho^{(l)} e^{ilft}\,. \tag{16}$$

Именно таким образом нами проводились вычисления, в которых мы использовали разложение матрицы плотности $\hat\rho(t)$ по конечному числу гармоник $(2\mathcal{F}+1)$ с номерами $l = -\mathcal{F}, -\mathcal{F}+1, ..., \mathcal{F}-1, \mathcal{F}$. При этом вычисления полагались выполненными, когда дальнейшее увеличение $\mathcal{F}$ не ведет ко сколько-нибудь заметному изменению расчетных зависимостей (для расчетов в данной статье с хорошим запасом оказалось достаточно $\mathcal{F} = 50$). В качестве некоторых примеров рассмотрения спектроскопии КПН в периодически модулированном поле приведем публикации [38–41].

Однако в теоретических оценках обычно используется упрощенная модель, в которой учитываются только две резонансные частные компоненты, т.е. когда реальное полихроматическое излучение (2) заменяется двухчастотным полем, состоящим из спектральных компонент ω_{n_1} и ω_{n_2}, которые находятся в наибольшем резонансе с оптическими переходами в Λ-системе (см. рис. 1). В то время как все остальные спектральные компоненты рассматриваются только в контексте полного квадратичного штарковского сдвига атомных уровней. При этом общепринятой является точка зрения, что световой сдвиг КПН-резонанса определяется как разностной штарковский сдвиг между нижними атомными уровнями $|g_1\rangle$ и $|g_2\rangle$, который, учитывая выражения (11)–(13), можно представить в виде

$$\bar\delta_{\text{ac- St}} = \sum_n \left(\frac{\delta_n^{(1)}\left|\Omega_n^{(1)}\right|^2}{\gamma_{\rm opt}^2 + \left|\delta_n^{(1)}\right|^2} - \frac{\delta_n^{(2)}\left|\Omega_n^{(2)}\right|^2}{\gamma_{\rm opt}^2 + \left|\delta_n^{(2)}\right|^2} \right), \tag{17}$$

где суммирование ведется по всем частотным компонентам (включая две резонансные частоты с индексами $n = n_{1,2}$), а $\delta_n^{(j)}$ есть однофотонная отстройка n-й компоненты поля (2) от оптического перехода $|g_j\rangle \leftrightarrow |e\rangle$

$$\delta_n^{(j)} = \omega + n\frac{\Delta_{\rm hfs}}{N} - \omega_{eg_j}, \quad (j = 1, 2), \tag{18}$$

в которой мы пренебрегли малой вариацией частоты модуляции f относительно величины $\Delta_{\rm hfs}/N$, т.е. в (18) мы полагаем $f = \Delta_{\rm hfs}/N$.

Как уже указывалось выше, целью нашей работы является расчет КПН-резонанса и его светового сдвига на основе точного решения системы уравнений (14) с использованием фурье-разложения (16), а также сопоставление с расчетом для разностного штарковского сдвига по формуле (17). При этом в качестве спектроскопического сигнала мы рассматриваем функциональную зависимость населенности верхнего уровня $|e\rangle$ от двухфотонной отстройки для нулевой гармоники $\rho_{ee}^{(0)}(\delta_{\rm R})$, где двухфотонная (рамановская) отстройка определяется как

$$\delta_{\rm R} = Nf - \Delta_{\rm hfs}. \tag{19}$$

Типичная форма зависимости $\rho_{ee}^{(0)}(\delta_{\rm R})$ представлена на рис. 2, которая соответствует КПН-резонансу в сигнале поглощения при прохождении света через атомную ячейку. Также в качестве параметра расчетов нам потребуется однофотонная отстройка, общая для двух резонансных компонент с индексами $n = n_{1,2}$, которая определяется следующим образом:

$$\delta_{\rm 1ph} = \omega + n_1\frac{\Delta_{\rm hfs}}{N} - \omega_{eg_1}, \tag{20}$$

в соответствии с (18).

Рассмотрим достаточно общий случай гармонической амплитудно-фазовой модуляции, когда напряженность электрического поля имеет вид:

$$E = E_0[1 + A\cos{(ft+\theta)}]e^{-i(\omega t + M\sin{ft})} + \text{c.c.}, \tag{21}$$

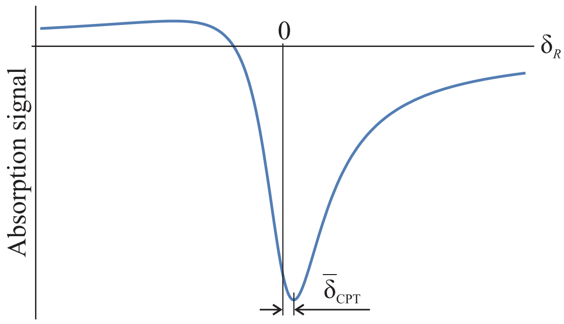

Рис. 2. (Цветной онлайн) Типичная форма линии КПН-резонанса в сигнале поглощения при прохождении света через атомную ячейку

где E_0 – амплитуда лазерного поля, A – глубина амплитудной модуляции, M – индекс фазовой модуляции, θ – относительная фаза между амплитудной и фазовой модуляцией. Для представления в виде полихроматического поля (2) разложим выражение (21) по гармоникам:

$$E = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(J_n(M)+ \quad (22)$$
$$\frac{A}{2}[J_{n-1}(M)e^{-i\theta} + J_{n+1}(M)e^{i\theta}]\big)e^{-i\omega_n t} + \text{c.c.},$$

где $J_\beta(M)$ есть функции Бесселя первого рода порядка β. Из (2), (12) и (13) находим следующее выражение для частоты Раби (вместе с фазовым множителем) n-й спектральной компоненты поля:

$$\Omega_n^{(j)} e^{-i\phi_n} = \bar{\Omega}^{(j)} \times \quad (23)$$
$$\big(J_n(M) + \frac{A}{2}\big[J_{n-1}(M)e^{-i\theta} + J_{n+1}(M)e^{i\theta}\big]\big),\ (j=1,2),$$

где $\bar{\Omega}^{(j)} = d_{eg_j} E_0/\hbar$ (где $j = 1,2$). Выражение (23) мы будем использовать для вычисления разностного штарковского сдвига $\bar{\delta}_{\text{ac-St}}$ (см. формулу (17)). Обычно на практике в резонансе с оптическими переходами $|e\rangle \leftrightarrow |g_1\rangle$ и $|e\rangle \leftrightarrow |g_2\rangle$ находятся либо компоненты поля с $n = -1, +1$ при модуляции на частоте $f \approx \Delta_{\text{hfs}}/2$ (т.е. $N = 2$), либо компоненты поля с $n = 0, +1$ (или $n = -1, 0$) при модуляции на частоте $f \approx \Delta_{\text{hfs}}$ (т.е. $N = 1$). Дипольные моменты оптических переходов в расчетах будем предполагать одинаковыми, $d_{eg_1} = d_{eg_2} = d$, т.е. $\bar{\Omega}^{(1)} = \bar{\Omega}^{(2)}$. Это имеет место, например, при спектроскопии резонансов КПН в циркулярно-поляризованном поле на D1 линии атомов щелочных металлов (Rb, Cs), когда используются зеемановские подуровни с магнитным квантовым числом $m = 0$ на нижних сверхтонких уровнях.

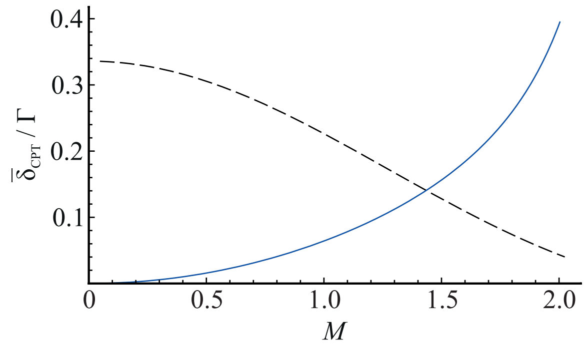

Рис. 3. (Цветной онлайн) Сравнение зависимости полевого сдвига резонанса КПН и штарковского сдвига частоты перехода от индекса фазовой модуляции M. Синяя сплошная линия соответствует точному решению для сдвига вершины КПН-резонанса, черная штриховая линия соответствует штарковскому сдвигу частоты реперного перехода $\bar{\delta}_{\text{ac-St}}$ (см. формулу (17)). Резонансные гармоники: $n_1 = -1$ и $n_2 = 0$ (т.е. $N = 1$). Числовые параметры: $\gamma_1/\gamma_{\text{sp}} = \gamma_2/\gamma_{\text{sp}} = 1/2$, $\gamma_{\text{opt}}/\gamma_{\text{sp}} = 50$, $\Gamma/\gamma_{\text{sp}} = 10^{-4}$, $\Delta_{\text{hfs}}/\gamma_{\text{sp}} = 1189$, $\delta_{\text{1-ph}} = 0$, $\Omega^{(1)}/\gamma_{\text{sp}} = \Omega^{(2)}/\gamma_{\text{sp}} = 0.2$, $A = 0$

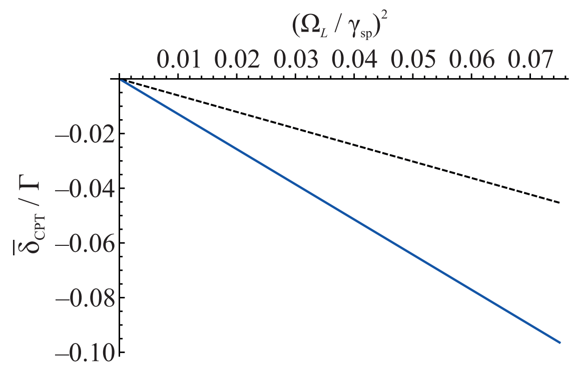

Рис. 4. (Цветной онлайн) Сравнение зависимости полевого сдвига резонанса КПН и штарковского сдвига частоты перехода от интенсивности ($\propto \Omega_L^2$). Синяя сплошная линия соответствует точному решению для сдвига вершины КПН-резонанса, черная штриховая линия соответствует штарковскому сдвигу частоты реперного перехода $\bar{\delta}_{\text{ac-St}}$ (см. формулу (17)). Резонансные гармоники: $n_1 = -1$ и $n_2 = +1$ (т.е. $N = 2$). Числовые параметры: $\gamma_1/\gamma_{\text{sp}} = \gamma_2/\gamma_{\text{sp}} = 1/2$, $\gamma_{\text{opt}}/\gamma_{\text{sp}} = 50$, $\Gamma/\gamma_{\text{sp}} = 10^{-4}$, $\Delta_{\text{hfs}}/\gamma_{\text{sp}} = 1189$, $\delta_{\text{1ph}} = 0$, $M = 2.5$, $A = 0.4$, $\theta = \pi/6$

В случае поля (21) для значений $N = 1,2$ на рис. 3 и 4 приведено сопоставление зависимости для сдвига экстремума КПН-резонанса $\bar{\delta}_{\text{CPT}}$ (см. рис. 2) от индекса фазовой модуляции M и от интенсивности поля $I \propto |\Omega_L|^2$ (где $\Omega_L = dE_0/\hbar$), рассчитанного точным образом, со штарковским сдвигом $\bar{\delta}_{\text{ac-St}}$. Как хорошо видно, имеет место весьма существенное отличие между точными вычислениями и формулой (17). Данные расчеты наглядно показывают, что широко распространенная точка зрения, согласно которой световой сдвиг КПН-резонанса определяется обычными штарковскими сдвигами нижних уровней, является фундаментально некорректной.

Для выяснения причины столь сильного расхождения нами дополнительно были сделаны расчеты для двух вариантов полихроматического поля из девяти частотных компонент с $-4 \le n \le +4$, соответствующего частоте модуляции $f \approx \Delta_{\rm hfs}/2$ (т.е. $N = 2$). При этом вещественные амплитуды в обоих случаях остаются неизменными, в то время как фазы спектральных компонент изменяются. В качестве конкретного примера мы использовали следующий набор вещественных амплитуд, которые выбраны достаточно произвольным образом:

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{-4} = 0.15E_0,\ \mathcal{E}_{-3} = 0.4E_0,\ \mathcal{E}_{-2} = 0.5E_0, \\ &\mathcal{E}_{-1} = 1.0E_0,\ \mathcal{E}_0 = 0.2E_0,\ \mathcal{E}_{+1} = 0.7E_0, \\ &\mathcal{E}_{+2} = 0.6E_0,\ \mathcal{E}_{+3} = 0.35E_0,\ \mathcal{E}_{+4} = 0.2E_0. \end{aligned} \tag{24}$$

При этом рассматривались два фазовых набора, первый из которых соответствует одинаковой нулевой фазе для всех частот:

$$\phi_n = 0, \quad (n = -4, -3, ..., +3, +4), \tag{25}$$

в то время как во втором наборе фазы частотных гармоник уже отличаются друг от друга:

$$\begin{gathered} \phi_{-4} = -2\pi/5,\ \ \phi_{-3} = -\pi/8,\ \ \phi_{-2} = -2\pi/7, \\ \phi_{-1} = -4\pi/3,\ \ \phi_0 = 0,\ \ \phi_{+1} = \pi/4, \\ \phi_{+2} = 3\pi/8,\ \ \phi_{+3} = 7\pi/4,\ \ \phi_{+4} = \pi/5. \end{gathered} \tag{26}$$

Поскольку выражение (17) не зависит от фаз частотных компонент, то штарковский сдвиг $\bar{\delta}_{\text{ac-St}}$ является одинаковым для фазовых наборов (25) и (26). Однако, как хорошо видно из рис. 5, расчетные сдвиги КПН-резонансов $\bar{\delta}_{\rm CPT}$ от интенсивности поля $I \propto |\Omega_L|^2$ (где $\Omega_L = dE_0/\hbar$) для фазовых наборов (25) и (26) существенно отличаются друг от друга, а также и от формулы (17). Данные расчеты показывают, что в формировании полного светового сдвига КПН-резонанса $\bar{\delta}_{\rm CPT}$, помимо разностного штарковского сдвига уровней $\bar{\delta}_{\text{ac-St}}$, существенную роль играют также парные биения на частоте $\Delta_{\rm hfs}$ между различными гармониками, индексы которых отличаются на величину N, т.е. между частотными компонентами ω_n и ω_{n+N}. Очевидно, что такие биения зависят от относительных фаз спектральных компонент поля, что и проявилось в зависимостях на рис. 5. Таким образом, даже если у нас есть

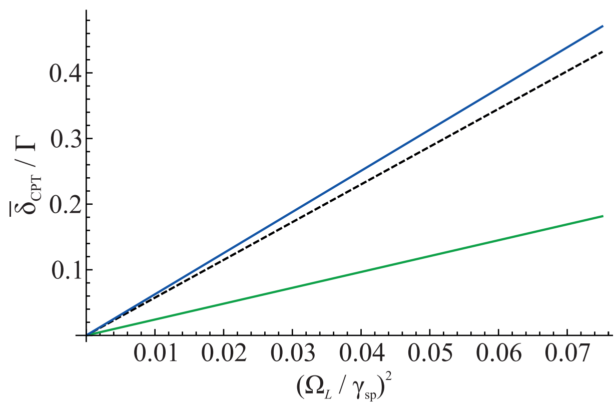

Рис. 5. (Цветной онлайн) Сравнение зависимости полевого сдвига резонанса КПН и штарковского сдвига частоты перехода от интенсивности ($\propto \Omega_L^2$). Синяя сплошная линяя соответствует точному решению для сдвига вершины КПН-резонанса с фазами (25), зеленая штрих-пунктирная линия соответствует точному решению для сдвига вершины с фазами (26), черная штриховая линия соответствует штарковскому сдвигу частоты реперного перехода $\bar{\delta}_{\text{ac-St}}$ (см. формулу (17)). Резонансные гармоники: $n_1 = -1$ и $n_2 = +1$ (т.е. $N = 2$). Числовые параметры: $\gamma_1/\gamma_{\rm sp} = \gamma_2/\gamma_{\rm sp} = 1/2$, $\gamma_{\rm opt}/\gamma_{\rm sp} = 50$, $\Gamma/\gamma_{\rm sp} = 10^{-4}$, $\Delta_{\rm hfs}/\gamma_{\rm sp} = 1189$, $\delta_{\rm 1ph} = 0$

детальная информация об амплитудах спектральных компонент модулированного излучения (например, с помощью спектр-анализатора), то этого, в общем случае, абсолютно недостаточно для определения светового сдвига КПН-резонанса, если при этом отсутствует информация о соотношении фаз между различными частотными компонентами поля. Отметим, что этот результат коррелирует с результатом работы [42], в которой в рамках теории возмущения (по слабому световому полю) исследовались темные резонансы во флуоресценции газа трехуровневых атомов под воздействием полихроматического поля лазера с частотно-сдвинутой обратной связью (frequency shifted feedback (FSF) laser), который является одним из источников излучения частотной гребенки [43], но применения в атомных КПН часах не получил. Спектр FSF лазера существенно отличается от спектров, получаемых в VCSELs или с помощью электрооптических модуляторов. В частности, для FSF лазера реализуется специфическая зависимость $\phi_n = \alpha n^2$ для фаз частотных компонент в (2) и в [42] было показано, что сдвиг резонанса зависит от параметра α.

Кроме того, следует особо отметить, что заметные отличия сдвига вершины КПН-резонанса $\bar{\delta}_{\rm CPT}$ от формулы для разностного штарковского сдвига (17) возникают только в случае существенного различия между двумя резонансными гармониками: $|\Omega^{(1)}_{n_1}| \neq |\Omega^{(2)}_{n_2}|$. В случае же их равенства, $|\Omega^{(1)}_{n_1}| = |\Omega^{(2)}_{n_2}|$, наблюдается практически тождественное совпадение ($\bar{\delta}_{\rm CPT} = \bar{\delta}_{\text{ac-St}}$) и отсутствие чувствительности к соотношению фаз между различными спектральными компонентами поля. При этом во всех вышеприведенных расчетах (см. рис. 3–5) нами намеренно рассматривался точный однофотонный резонанс для двух резонансных компонент ($\delta_{\rm 1ph} = 0$), чтобы подавить асимметрию формы линии КПН-резонанса (см., например, [32, 34]) в случае, когда одновременно $\delta_{\rm 1ph} \neq 0$ и $|\Omega^{(1)}_{n_1}| \neq |\Omega^{(2)}_{n_2}|$. Это подчеркивает принципиальную важность наших результатов при использовании миниатюрных лазерных диодов VCSEL, спектр которых обычно является существенно асимметричным и весьма непредсказуемым для различных образцов и различных производителей, что может заметно сказываться на сдвиге КПН-резонанса при модуляции тока инжекции как на частоте $f = \Delta_{\rm hfs}$, так и $f = \Delta_{\rm hfs}/2$. На контрасте с VCSEL, электрооптические модуляторы формируют достаточно симметричный спектр, с хорошей точностью соответствующий чисто фазовой модуляции (см. выражения (21)–(23) для $A = 0$), для которой в случае частоты модуляции $f = \Delta_{\rm hfs}/2$ световой сдвиг КПН-резонанса хорошо описывается формулой (17).

В заключение, в настоящей работе были исследованы световые сдвиги КПН-резонансов в периодически модулированном лазерном поле, когда частота модуляции f варьируется вблизи дробной частоты сверхтонкого расщепления в основном состоянии атомов $\Delta_{\rm hfs}/N$ (где $N = 1, 2, 3, ...$). На основе точных численных расчетов с использованием фурье-анализа было показано, что широко распространенная точка зрения, согласно которой сдвиг КПН-резонанса определяется обычным квадратичным штарковским сдвигом нижних атомных уровней, является, в общем случае, существенно некорректной. Это обусловлено тем, что в общем случае дополнительный вклад в световой сдвиг КПН-резонанса, который обусловлен биениями на частоте $\Delta_{\rm hfs}$ между различными нерезонансными частотными компонентами, может быть сопоставим (или даже доминировать) по отношению к величине стандартного штарковского сдвига. Более того, эти биения являются фазово-чувствительными. Поэтому, даже наличие детальной информации о спектральном составе модулированного излучения (например, с помощью спектр-анализатора), абсолютно не является достаточным для определения светового сдвига КПН-резонанса.

Полученные нами результаты однозначно говорят о том, что требуется дальнейшее детальное исследование (как теоретическое, так и экспериментальное) светового сдвига в атомных КПН часах, использующих периодически модулированное лазерное излучение. Особенно это касается миниатюрных лазерных диодов VCSEL, спектр которых являет собой сложный вид амплитудно-частотной модуляции.

В целом, результаты данной работы являются важными для атомных КПН часов и магнитометров, а также атомных интерферометров, основанных на двухфотонных переходах в атомах щелочных металлов.

Финансирование работы. Данная работа была поддержана Российским научным фондом (грант # 25-42-00093). В. И. Юдин был также поддержан Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (грант # FSUS-2025-0011).

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. J. Kitching, S. Knappe, M. Vukicevic, L. Hollberg, R. Wynands, and W. Weidmann, IEEE Trans. Instrum. Meas. **49**, 1313 (2000).
2. R. Lutwak, A. Rashed, M. Varghese et al. (Collaboration), in Proceeding of Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting, p. 19 (2001); https://www.researchgate.net/publication/235080171.
3. J. Kitching, S. Knappe, and L. Hollberg, Appl. Phys. Lett. **81**, 553 (2002).
4. M. Stahler, R. Wynands, S. Knappe, J. Kitching, L. Hollberg, A. Taichenachev, and V. Yudin, Opt. Lett. **27**, 1472 (2002).
5. S. Knappe, V. Shah, P. D. D. Schwindt, L. Hollberg, J. Kitching, L.-A. Liew, and J. Moreland, Appl. Phys. Lett. **85**, 1460 (2004).
6. J. Vanier, Appl. Phys. B **81**, 421 (2005).
7. M. J. Mescher, R. Lutwak and M. Varghese, *An ultra-low-power physics package for a chip-scale atomic clock*, The 13th International Conferenceon Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems, v. 1, June 2005, p. 311; DOI: 10.1109/SENSOR.2005.1496419.
8. S. Knappe, P. D. D. Schwindt, V. Shah, L. Hollberg, J. Kitching, L. Liew, and J. Moreland, Opt. Express **13**, 1249 (2005).
9. Z. Wang, Chin. Phys. B **23**, 030601 (2014).
10. J. Kitching, Appl. Phys. Rev. **5**, 031302 (2018).
11. G. D. Martinez, C. Li, A. Staron, J. Kitching, C. Raman, and W. R. McGehee, Nat. Commun. **14**, 3501 (2023).
12. P. Cash, W. Krzewick, P. MacHado, K. R. Overstreet, M. Silveira, M. Stanczyk, D. Taylor, and X. Zhang, Microsemi Chip Scale Atomic Clock (CSAC) technical status, applications, and future plans, 2018 European

Frequency and Time Forum (EFTF), Turin, Italy (2018), p. 65.
13. B. L. S. Marlow and D. R. Scherer, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control **68**(6), 2007 (2021).
14. https://www.microsemi.com.
15. https://www.accubeat.com.
16. N. F. Ramsey, *Application of Atomic Clocks*, in: H. Figger, C. Zimmermann, D. Meschede (editors), *Laser Physics at the Limits*, Springer, Berlin, Heidelberg (2002).
17. L. Maleki and J. Prestage, Metrologia **42**, S145 (2005).
18. F. Riehle, *Frequency Standards: Basics and Application*, Wiley-VCH, Weinheim (2005).
19. T. N. Bandi, BEMS Reports **9**, 1 (2023).
20. M. Adel Hafiz, G. Coget, M. Petersen, C. E. Calosso, S. Guérandel, E. de Clercq, and R. Boudot, Appl. Phys. Lett. **112**, 244102 (2018).
21. M. N. Skvortsov, S. M. Ignatovich, V. I. Vishnyakov et al. (Collaboration), Quantum Electron. **50**, 576 (2020).
22. P. Yun, R. Boudot, and E. de Clercq, Phys. Rev. Appl. **19**, 024012 (2023).
23. G. Alzetta, A. Gozzini, M. Moi, and G. Orriols, Il Nuovo Cimento B **36**, 5 (1976).
24. B. D. Agap'ev, M. B. Gornyi, B. G. Matisov, and Yu. V. Rozhdestvenskii, Phys.-Uspekhi **36**, 763 (1993).
25. E. Arimondo, Prog. Opt. **35**, 257 (1996).
26. F. Levi, A. Godone, and J. Vanier, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control **47**, 466 (2000).
27. J. W. Pollock, V. I. Yudin, M. Shuker, M. Yu. Basalaev, A. V. Taichenachev, X. Liu, J. Kitching, and E. A. Donley, Phys. Rev. A **98**, 053424 (2018).
28. V. I. Yudin, M. Yu. Basalaev, A. V. Taichenachev et al. (Collaboration), Phys. Rev. Appl. **14**, 024001 (2020).
29. M. Abdel Hafiz, R. Vicarini, N. Passilly et al. (Collaboration), Phys. Rev. Appl. **14**, 034015 (2020).
30. D. S. Chuchelov, E. A. Tsygankov, M. I. Vaskovskaya, S. A. Zibrov, V. L. Velichansky, S. V. Petropavlovsky, and V. P. Yakovlev, J. Phys.: Conf. Ser. **1686**, 012029 (2020).
31. J. W. Pollock, V. I. Yudin, A. V. Taichenachev, M. Yu. Basalaev, D. V. Kovalenko, A. Hansen, J. Kitching, and W. R. McGehee, Appl. Phys. Lett. **120**, 154001 (2022).
32. V. I. Yudin, M. Yu. Basalaev, A. V. Taichenachev, O. N. Prudnikov, D. A. Radnatarov, S. M. Kobtsev, S. M. Ignatovich, and M. N. Skvortsov, Phys. Rev. A **108**, 013103 (2023).
33. D. A. Radnatarov, S. M. Kobtsev, V. A. Andryushkov, M. Yu. Basalaev, A. V. Taichenachev, M. D. Radchenko, and V. I. Yudin, JETP Lett. **117**, 504 (2023).
34. E. A. Tsygankov, D. S. Chuchelov, M. I. Vaskovskaya, V. V. Vassiliev, S. A. Zibrov, and V. L. Velichansky, Phys. Rev. A **109**, 053703 (2024).
35. A. V. Taichenachev, V. I. Yudin, R. Wynands, M. Stahler, J. Kitching, and L. Hollberg, Phys. Rev. A **67**, 033810 (2003).
36. Y. Yano, W. Gao, S. Goka, and M. Kajita, Phys. Rev. A **90**, 013826 (2014).
37. К. А. Баранцев, Г. В. Волошин, А. С. Курапцев, А. Н. Литвинов, И. М. Соколов, ЖЭТФ **163**, 162 (2023).
38. H. Wanare, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **41**, 125502 (2008).
39. V. I. Yudin, A. V. Taichenachev, and M. Yu. Basalaev, Phys. Rev. A **93**, 013820 (2016).
40. V. I. Yudin, A. V. Taichenachev, M. Yu. Basalaev, and D. V. Kovalenko, Opt. Express **25**, 2742 (2017).
41. D. S. Chuchelov, V. V. Vassiliev, M. I. Vaskovskaya, V. L. Velichansky, E. A. Tsygankov, S. A. Zibrov, S. V. Petropavlovsky, and V. P. Yakovlev, Phys. Scr. **93**, 114002 (2018).
42. V. I. Romanenko, A. V. Romanenko, L. P. Yatsenko, G. A. Kazakov, A. N. Litvinov, B. G. Matisovand, and Yu. V. Rozhdestvensky, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **43**, 215402 (2010).
43. L. P. Yatsenko, B. W. Shore, and K. Bergmann, Opt. Commun. **236**, 183 (2004).