Письма в ЖЭТФ, том 122, вып. 5, с. 264 – 270

Двухчастотные световые пули при отсутствии фазового и группового синхронизмов

С. В. Сазонов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Поступила в редакцию 31 июля 2025 г.
После переработки 5 августа 2025 г.
Принята к публикации 5 августа 2025 г.

Проведено аналитическое исследование возможности формирования двухчастотной световой пули в режиме генерации второй гармоники при отсутствии фазового и группового синхронизмов. Рассмотрен случай, когда частота второй гармоники приходится на нулевое значение параметра дисперсии групповой скорости. При этом аналогичный параметр на основной частоте должен быть отрицательным. Показано, что формирование двухчастотной световой пули нечувствительно к знаку отстройки групповых скоростей на основной частоте и на частоте второй гармоники. В то же время оно очень чувствительно к знаку отстройки между соответствующими показателями преломления. Фазовое и групповое рассогласования приводят к ограничениям сверху на временную длительность и поперечный размер световой пули, а также к ограничению снизу на эффективность генерации второй гармоники.

DOI: 10.31857/S0370274X25090048, EDN: FDUHMK

1. Введение. Пространственно-временные оптические солитоны, или, другими словами, световые пули, представляют собой локализованные во времени и во всех пространственных направлениях устойчивые сгустки световой энергии, способные распространяться без потерь энергии и без искажения формы на большие расстояния [1, 2]. Следуя тенденции, установившейся в последние десятилетия среди специалистов- физиков, здесь будем называть солитонами именно такие объекты, отвлекаясь от строгого определения, используемого в математической литературе. Последнее, как известно, опирается на интегрируемость соответствующих нелинейных уравнений в частных производных [3].

В однородных средах световые пули формируются в результате взаимной компенсации фокусирующей оптической нелинейности, дисперсионного и дифракционного уширений лазерного импульса [2]. Присутствие перечисленных физических механизмов является необходимым, но не достаточным условием для формирования световых пуль. Здесь, как правило, приходится накладывать дополнительные условия на характер и природу фокусирующей нелинейности для того, чтобы обсуждаемые объекты обладали свойством устойчивости [2].

Помимо световых пуль, обладающих одной несущей частотой, в научной литературе активно обсуждаются многочастотные световые пули. Например, двухчастотные световые пули могут формироваться при генерации второй гармоники (ГВГ) в анизотропных кристаллах, обладающих квадратичной оптической нелинейностью [4–12]. Хорошо известно, что для эффективной ГВГ в импульсном режиме желательно выполнение условий фазового и группового синхронизмов [5, 13]. При фазовом синхронизме (ФС) показатели преломления кристалла n_1 и n_2 на основной частоте ω и на частоте 2ω второй гармоники соответственно равны друг другу [13]. При групповом синхронизме (ГС) равны между собой соответствующие групповые скорости v_1 и v_2 [5]. В условиях реального эксперимента удовлетворить одновременно обоим условиям синхронизма практически невозможно. Как результат, снижается эффективность генерации. Кроме того, по понятным причинам ухудшаются условия формирования связанных состояний пространственно-временных солитонов на обеих несущих частотах.

Вопрос возможности формирования двухчастотных световых пуль при отсутствии фазового и группового синхронизмов рассматривался ранее в работах [14, 15] с использованием методов численного моделирования. В [14] исследовались двухчастотные локализованные оптические вихри, а в [15] – безвихревые световые пули. Однако с помощью численного моделирования очень трудно ответить на вопросы, касающиеся зависимости условий формирования об-

[1)]e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

суждаемых объектов от параметров среды и лазерных импульсов. Данное обстоятельство существенно уменьшает охват и возможности предсказания явлений при изменении указанных параметров. Здесь весьма плодотворным может оказаться проведение соответствующих аналитических исследований, чему и посвящена настоящая работа.

2. Исходные уравнения и приближенное решение в виде световой пули. Будем считать, что световой импульс распространяется вдоль оси z, перпендикулярной к оптической оси одноосного кристалла. Тогда записанная в параксиальном приближении нелинейная система уравнений для линейно-поляризованных комплексных огибающих ψ_1 и ψ_2 электрического поля имеет вид [9, 16]

$$i\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+\frac{1}{v_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)= =-\frac{\beta_1}{2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}+\alpha_1\psi_1^*\psi_2 e^{-i\delta z}+\frac{c}{2n_1\omega}\Delta_\perp\psi_1, \tag{1}$$

$$i\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial z}+\frac{1}{v_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)= =-\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}+\alpha_2\psi_1^2 e^{i\delta z}+\frac{c}{4n_2\omega}\Delta_\perp\psi_2, \tag{2}$$

Здесь β_1 и β_2 – параметры дисперсии групповых скоростей (ДГС) в кристалле, $\alpha_1 = 4\pi\omega\chi^{(2)}(2\omega,-\omega)/cn_1$, $\alpha_2 = 4\pi\omega\chi^{(2)}(\omega,\omega)/cn_2$, $\chi^{(2)}(\omega_1,\omega_2)$ – зависящая от частоты нелинейная восприимчивость второго порядка рассматриваемого кристалла, c – скорость света в вакууме, t – время, $\Delta_\perp$ – поперечный лапласиан, параметр фазового рассогласования δ определяется соотношением

$$\delta=\frac{2\omega}{c}(n_2-n_1). \tag{3}$$

Здесь и везде в настоящей работе нижний индекс "1" относится к параметрам на основной частоте, а нижний индекс "2" – к параметрам на частоте второй гармоники.

Условие $v_1\neq v_2$ соответствует нарушению ГС. Мнимыми экспонентами в (1) и (2), зависящими явно от z, учитывается нарушение ФС ($\delta\neq 0$ или $n_1\neq n_2$ (см. (3))). От данных экспонент удобно избавиться посредством фазового преобразования [17]

$$\psi_1=\Phi_1,\quad \psi_2=\Phi_2 e^{i\delta z}. \tag{4}$$

Тогда система (1), (2) перепишется в автономном виде

$$i\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}+\frac{1}{v_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right)=-\frac{\beta_1}{2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}+\alpha_1\Phi_1^*\Phi_2+\frac{c}{2n_1\omega}\Delta_\perp\Phi_1, \tag{5}$$

$$i\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}+\frac{1}{v_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\right)= =\delta\Phi_2-\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}+\alpha_2\Phi_1^2+\frac{c}{4n_2\omega}\Delta_\perp\Phi_2. \tag{6}$$

Следуя работам [5, 18], примем, что параметр ДГС на частоте второй гармоники равен нулю. Этому условию можно удовлетворить в ближнем инфракрасном диапазоне широкого класса кристаллов [19]. Таким образом, ниже будем считать, что

$$\beta_1\equiv\beta,\quad \beta_2=0. \tag{7}$$

Кроме того, полагая на первом этапе исследования $\Delta_\perp\Phi_{1,2}=0$, придем к системе уравнений, обладающей решением типа одномерного (временного) двухчастотного солитона. Данное решение имеет вид [20]

$$\Phi_1=\frac{|\beta|}{\tau_p}\sqrt{\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\sigma+\frac{1}{\tau_p^2}\right)}e^{i(\Omega t+qz)}\operatorname{sech}\left(\frac{t-z/v_2}{\tau_p}\right), \tag{8}$$

$$\Phi_2=-\frac{\beta}{\alpha_1\tau_p^2}e^{2i(\Omega t+qz)}\operatorname{sech}^2\left(\frac{t-z/v_2}{\tau_p}\right), \tag{9}$$

где

$$\Omega=\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right),\quad q=\frac{\beta}{2\tau_p^2}-\frac{\Omega}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right), \tag{10}$$

а также введен параметр рассогласования (ПР) σ, определенный соотношением

$$\sigma=\Omega^2+\delta/\beta. \tag{11}$$

Характерная длительность солитона τ_p в данном решении является свободным параметром. При этом отклонения от ФС и ГС учитываются ненулевыми значениями параметров δ и Ω соответственно, входящими в ПР (см. (11)).

Для учета поперечной динамики ($\Delta_\perp\Phi_{1,2}\neq 0$) двухчастотного солитона используем метод усредненного лагранжиана (УЛ) типа Ритца–Уизема [21–23].

Системе (5), (6) при условиях (7) соответствует плотность лагранжиана

$$L=L_1+\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}L_2+L_{\text{int}}, \tag{12}$$

где

$$L_1=\frac{i}{2}\left(\Phi_1^*\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}-\Phi_1\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial z}\right)+ +\frac{i}{2v_1}\left(\Phi_1^*\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial t}-\Phi_1\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial t}\right)- -\frac{\beta}{2}\left|\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right|^2+\frac{c}{2n_1\omega}|\nabla_\perp\Phi_1|^2, \tag{13}$$

$$L_2 = \frac{i}{2}\left(\Phi_2^*\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \Phi_2\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial z}\right) + $$
$$+ \frac{i}{2v_2}\left(\Phi_2^*\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \Phi_2\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial t}\right) - $$
$$- \delta|\Phi_2|^2 + \frac{c}{4n_2\omega}|\nabla_\perp \Phi_2|^2, \qquad (14)$$

$$L_{\text{int}} = -\frac{\alpha_1}{2}(\Phi_1^{*2}\Phi_2 + \Phi_1^2\Phi_2^*). \qquad (15)$$

В соответствии с методом УЛ, а также выражениями (8) и (9) запишем пробные решения в виде

$$\Phi_1 = |\beta|Q\sqrt{\frac{\sigma + Q^2}{\alpha_1\alpha_2}}e^{i(\Omega t - n_1\omega\varphi/c)}\text{sech}[Q(t - z/v_2)], \qquad (16)$$

$$\Phi_2 = -\frac{\beta}{\alpha_1}Q^2 e^{2i(\Omega t - n_1\omega\varphi/c)}\text{sech}^2[Q(t - z/v_2)]. \qquad (17)$$

Так как в одномерном случае $Q = 1/\tau_p = \text{const}$, $\varphi \sim z$, то при учете высших пространственных измерений, следуя [22], будем считать Q и φ "медленной" и "быстрой" функциями координат соответственно.

Пробное решение (16), (17) выбрано, исходя из точного одномерного решения (8)–(10). Таким образом, предполагается, что трехмерное решение в виде световой пули несет в себе некоторые свойства одномерного солитонного решения. А именно, в трехмерном случае функциональная связь между амплитудами и временной длительностью компонент двухчастотной световой пули имеет такой же вид, как и в случае одномерного солитона. Разница состоит в том, что в трехмерном случае амплитуды и длительность уже не являются постоянными, а зависят от координат. В частности, такое предположение при выборе пробного решения согласуется с использованным здесь параксиальным приближением [2]. Отметим, что такой подход позволил получить с помощью метода УЛ множество физически разумных результатов [8, 22, 23].

Так как ниже мы будем искать решения в виде локализованных во всех направлениях сгустков световой энергии, то, двигаясь от центра сгустков к их периферийным участкам, будем иметь $Q \to 0$. Тогда из (16) в силу того, что $\alpha_1\alpha_2 > 0$, приходим к условию $\sigma > 0$.

Подставляя (16) и (17) в (12)–(15), после интегрирования по времени с учетом (10) и (11) получим УЛ вида

$$\Lambda \equiv \frac{c}{2n_1\omega\beta^2}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\sigma^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} L dt = \Lambda_R + \Lambda_D, \qquad (18)$$

где рефракционная Λ_R и дифракционная Λ_D части УЛ имеют соответственно вид

$$\Lambda_R = \left(u + \frac{5}{3}u^3\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(u + \frac{5}{3}u^3\right)\frac{(\nabla_\perp\varphi)^2}{2} + \frac{c\beta}{2n_1\omega} \times$$
$$\times\left\{\sigma u^5 + \left[\sigma - 5\frac{\Omega}{\beta}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)\right]\frac{u^3}{3} - \frac{\Omega}{\beta}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)u\right\}. \qquad (19)$$

$$\Lambda_D = \left(\frac{\pi^2}{12} + 1\right)\left(\frac{c}{n_1\omega}\right)^2(5u^2 + 1)\frac{(\nabla_\perp u)^2}{6u}. \qquad (20)$$

Здесь, $u = Q/\sqrt{\sigma}$, $\nabla_\perp$ – оператор поперечного градиента.

При получении (18)–(20) учтено, что значения показателей преломления n_1 и n_2 обычно очень близки друг к другу, так что выполняется неравенство $|n_1 - n_2| \ll 1$ [13]. Как было сказано выше, поперечная динамика лазерных импульсов учитывается здесь в параксиальном приближении. По этой причине в слагаемых УЛ, которыми учитывается поперечная динамика, положено приближенно $n_2 \approx n_1$. Кроме того, в скобках выражения для дифракционной части УЛ мы пренебрегли малым переменным слагаемым $\sim u^2/(1 + u^2)$ и учли приближенное равенство $(\pi^2/12 + 1)/(7\pi^2/60 + 8) \approx 0.199 \approx 1/5$.

Если пренебречь Λ_D в сравнении с Λ_R, поперечная динамика импульса будет учитываться в приближении геометрической оптики [22] вторым слагаемым в правой части выражения (19) $\sim (\nabla_\perp\varphi)^2$. Однако роль дифракции в формировании световой пули принципиальна, и ей нельзя пренебрегать.

Записывая теперь уравнения Эйлера–Лагранжа относительно переменных φ и u с использованием (19) и (20), а также введя новую переменную ρ, связанную с u соотношением

$$u^3 + \frac{3}{5}u = \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}\rho, \qquad (21)$$

придем к системе двух уравнений, формально совпадающих с уравнениями двумерного течения квантовой бозе-жидкости [24], где роль времени играет координата :

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \nabla_\perp(\rho\nabla_\perp\varphi) = 0, \qquad (22)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{(\nabla_\perp\varphi)^2}{2} + \frac{c\beta}{2n_1\omega}\sigma u^2 = $$
$$= \frac{c}{n_1\omega}\Omega\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) + \frac{\pi^2 + 12}{18}\left(\frac{c}{n_1\omega}\right)^2 G. \qquad (23)$$

Здесь

$$G = 0.5\frac{5u^2+3}{5u^2+1}\left[\frac{\Delta_\perp\rho}{\rho} - \frac{(5u^2+3)(15u_1^2+1)}{3(5u^2+1)^2}\frac{(\nabla_\perp\rho)^2}{2\rho^2}\right],$$

$\Delta_\perp$ – поперечный лапласиан.

Множитель перед $(\nabla_\perp\rho)^2/2\rho^2$ в квадратных скобках данного выражения на всем интервале положительных значений переменной u с хорошей точностью равен единице. Учитывая также то, что здесь дифракция учитывается в параксиальном приближении, в множителе перед квадратными скобками совершим замену $u \to u_0$, где

$$u_0 = (\sqrt{\sigma}\tau_p)^{-1}, \tag{24}$$

а τ_p – временная длительность солитона на его центральной оси (см. (8)).

В результате запишем

$$G = \frac{5u_0^2+3}{5u_0^2+1}\frac{\Delta_\perp\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \tag{25}$$

В одномерном случае, когда $\nabla_\perp\varphi = \nabla_\perp\rho = 0$ из (22)–(25) и (10) находим $\varphi = -\frac{c}{n_1\omega}qz$. Тогда отсюда, а также из (16) и (17) приходим к точным одномерным решениям (8), (9). Данное обстоятельство является важным аргументом в пользу используемого здесь метода УЛ.

Чтобы перейти к решению системы (22), (23) и (25), надо выразить переменную u через ρ, используя кубическое уравнение (21). Во-первых, заметим, что обсуждаемые переменные, как следует из (21), являются монотонными функциями друг друга: с возрастанием (убыванием) u растет (убывает) ρ и наоборот. Поэтому уравнение (21) обладает единственным вещественным корнем. Соответствующая данному корню формула Кардано является весьма громоздкой. Поэтому мы не будем ее здесь использовать. Вместо нее используем аппроксимирующее выражение вида

$$u = \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{\rho}{(1+\rho)^{2/3}}. \tag{26}$$

Анализ показывает, что вычисления, проведенные с помощью (26), с точностью до десятых долей процента совпадают со значениями корня уравнения (21) на всем интервале положительных значений переменной ρ. Например, при $\rho \ll 1$ и $\rho \gg 1$ из (26) имеем соответственно $u = \sqrt{3/5}\rho$ и $u = \sqrt{3/5}\rho^{1/3}$, что вполне согласуется с (21).

Легко видеть, что система (22), (23), (24) с учетом (26) может быть записана в виде одного уравнения

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{c}{n_1\omega b}\Delta_\perp\psi + \frac{3}{5}\beta\sigma b\frac{|\psi|^4}{(1+|\psi|^2)^{4/3}}\psi \tag{27}$$

для комплексной функции ψ, связанной с ρ и φ соотношением

$$\psi = \sqrt{\rho}\exp\left[i\frac{n_1\omega b}{2c}\varphi + ib\Omega\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)z\right]. \tag{28}$$

Здесь $b = \frac{3}{2\sqrt{\pi^2+12}}\sqrt{\frac{5u_0^2+1}{5u_0^2+3}}$.

Уравнение (27) формально похоже на квантовомеханическое уравнение Шредингера, описывающее поведение ансамбля взаимодействующих между собой бозе-частиц в приближении самосогласованного поля [25]. Как видно из этого уравнения, при $\beta < 0$ имеем притягивающий потенциал между взаимодействующими частицами, что приводит к коллапсированию облака плотности вероятности $|\psi|^2$. На языке, описывающем сгусток световой энергии, это означает его самофокусировку. В случае большого значения ПР σ, когда $u_0 \ll 1$ (см. (24)), имеем $\rho = |\psi|^2 \ll 1$. В этом случае нелинейный член в уравнении (27) $\sim|\psi|^4\psi$. Хорошо известно, что такой тип нелинейности способствует необратимой самофокусировке [2]. Однако в процессе развития самофокусировки идет возрастание величины $|\psi|^2$, сопровождающееся ростом пиковых интенсивностей обеих компонент импульса и сокращением их временных длительностей. На развитой стадии самофокусировки имеем $|\psi|^2 \gg 1$. В этом случае нелинейный член в уравнении (27) $\sim|\psi|^{4/3}\psi$. Такого типа нелинейность соответствует случаю выполнения условий ФС и ГС и успешно компенсируется дифракционным уширением светового сгустка [8].

Таким образом, простой качественный анализ на основе уравнения (27) показывает, что процесс самофокусировки на развитой стадии затормаживается дифракционной расходимостью. Это способно привести к формированию двухчастотной световой пули.

Проведенные выше рассуждения показали, что временная длительность световой пули должна быть ограничена сверху, а интенсивности ее компонент имеют нижние пределы. Очевидно, укорочение длительности светового импульса способствует уширению его спектра. Данное обстоятельство, в свою очередь, приводит к тому, что для части частотных компонент спектра выполняются условия ФС и ГС. Благодаря этим спектральным компонентам и может сформироваться двухчастотная световая пуля.

Для проведения количественного анализа вернемся к системе (22), (23), (25).

Уравнение непрерывности (22) обладает хорошо известным аксиально-симметричным автомодельным решением [26]

$$\rho = \rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 e^{-r^2/2R^2}, \quad \varphi = f + \frac{r^2}{2}\frac{R'}{R}, \tag{29}$$

где r – расстояние от оси симметрии импульса до точки наблюдения в плоскости, перпендикулярной к оси z, R – характерный поперечный радиус импульса, зависящий от координаты z, R_0 – некоторое равновесное значение данного радиуса (см. ниже), f – пока неизвестная функция координаты z, параметр ρ_0 связан с u_0 уравнением (21) при заменах в нем $\rho \to \rho_0$ и $u \to u_0$, штрих сверху здесь и ниже обозначает производную по координате z.

При подстановке (29) в интеграл Коши–Бернулли (23) в его левой части используем приосевое приближение [27], учитывая, что вблизи оси аксиальной симметрии импульса $e^{-r^2/2R^2} \approx 1 - r^2/2R^2$. Тогда, приравнивая друг другу в левой и правой частях коэффициенты при r^0 и r^2, с учетом (26) придем к уравнениям вида

$$f' = \frac{c\Omega}{2n_1\omega}\left(\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_2}\right) - \frac{3c\beta}{10n_1\omega}\sigma\rho_0^2\frac{R_0^2}{(R^3+\rho_0R_0^2R)^{4/3}} - \frac{1}{24}\left(\frac{c}{n_1\omega b}\right)^2\frac{1}{R^2}, \tag{30}$$

$$R'' = -\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{c}{5n_1\omega}\beta\sigma\rho_0^2R_0^4\frac{\rho_0R_0^2+3R^2}{(R^3+\rho_0R_0^2R)^{7/3}} + \frac{1}{48}\left(\frac{c}{n_1\omega b}\right)^2\frac{1}{R^3}. \tag{31}$$

Уравнение (31) формально совпадает с уравнением движения ньютоновской частицы единичной массы во внешнем консервативном поле, описываемом потенциальной энергией $U(R)$. Устойчивой световой пуле соответствует наличие устойчивого положения равновесия воображаемой частицы. Данное положение соответствует минимуму функции $U(R)$ при равновесном значении радиуса R_0. Таким образом, имеем два условия

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{R=R_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)_{R=R_0} > 0. \tag{32}$$

Отсюда, а также из (31), (26), (24) и (11) можно придти к условиям устойчивого распространения двухчастотной световой пули. Объединяя данные условия с полученными выше результатами, в рамках принятых приближений будем иметь:

$$\beta = -|\beta| < 0, \quad \sigma = \Omega^2 - \frac{\delta}{|\beta|} > 0, \tag{33}$$

$$R_0 = 0.40\sqrt{\frac{\lambda}{n_1|\beta|}}\tau_p, \tag{34}$$

$$\tau_p < \tau_{\max} = \frac{1.78}{\sqrt{\sigma}}, \tag{35}$$

$$R_0 < R_{\max} = 0.71\sqrt{\frac{\lambda}{n_1|\beta|\sigma}}, \tag{36}$$

где λ – длина волны, соответствующая основной частоте ω.

Выражения для огибающих электрического поля компонент аксиально-симметричной световой пули при $R = R_0$ имеют вид (16) и (17), где

$$Q = \frac{1}{\tau_p}e^{-r^2/2R_0^2}. \tag{37}$$

При этом фаза в этих выражениях, как следует из (30), (29), (26), (24) и формулы для b, определяется соотношением

$$\frac{n_1\omega}{c}\varphi = \left[\frac{\Omega}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right) + \frac{|\beta|}{2\tau_p^2} - 0.06\frac{1+0.6\sigma\tau_p^2}{1+0.2\sigma\tau_p^2}\frac{\lambda}{n_1R_0^2}\right]z. \tag{38}$$

Поперечный радиус R_0 световой пули связан с временной длительностью τ_p ее основной компоненты соотношением (34). При этом временная длительность играет роль свободного параметра, подчиняющегося условию (35).

Из (16), (17) и (37) для отношения пиковых значений интенсивностей $I_2 = \frac{c}{2\pi n_2}|\Phi_2^{\max}|^2$ и $I_1 = \frac{c}{2\pi n_1}|\Phi_1^{\max}|^2$ имеем $\frac{I_2}{I_1} = \frac{(I_2/I_1)_{\sigma+0}}{1+\sigma\tau_p^2} < \left(\frac{I_2}{I_1}\right)_{\sigma=0}$, где $(I_2/I_1)_{\sigma=0} = n_1\alpha_2/n_2\alpha_1 \approx \alpha_2/\alpha_1$ – отношение пиковых интенсивностей в отсутствие фазовой и групповой отстроек. Как и следовало ожидать, данное отношение меньше, чем при выполнении условий ФС и ГС. Используя теперь (35), будем иметь минимальное значение отношения пиковых интенсивностей:

$$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)_{\min} = 0.24\left(\frac{I_2}{I_1}\right)_{\sigma=0}. \tag{39}$$

При меньших отношениях пиковых интенсивностей двухчастотная световая пуля сформироваться не может. Таким образом, для реализации возможности формирования двухчастотной световой пули эффективность ГВГ должна быть достаточно высокой.

3. Обсуждение результатов. Заметим, что при удалении от центральной оси световой пули, где $r = 0$, к периферийным областям временные длительности ее основной компоненты и компоненты на частоте второй гармоники возрастают по закону $\sim e^{r^2/2R_0^2}$. При этом, как видно из (16), (17) и (37), на центральной оси временная длительность основной компоненты вдвое больше временной длительности составляющей световой пули на частоте второй гармоники. Из этих же соотношений следует, что при наличии фазовой и групповой отстроек ($\sigma \neq 0$) компонента световой пули на частоте второй гармоники сильнее, чем основная компонента, локализована и в поперечном направлении. Поэтому под временной длительностью и поперечным радиусом двухчастотной световой пули можно понимать соответствующие параметры ее компоненты на основной частоте.

Решение (16), (17), (34), (37), (38) в виде двухчастотной световой пули при наличии фазовой и групповой отстроек находится в согласии с принятым при выводе системы (5), (6) приближением медленно меняющихся амплитуд (ММА), если выполнено условие $\Omega \ll \omega$. Приняв, что в ближнем инфракрасном диапазоне $\omega \sim 10^{15}\,\text{с}^{-1}$, а относительное отличие групповых скоростей v_1 и v_2 друг от друга порядка одного процента и $v_{1,2} \sim c$, приходим к выводу, что абсолютное значение параметра β ДГС порядка $10^{-26}\,\text{с}^2/\text{см}$. Такая значительная величина может быть достигнута путем внедрения в кристалл квазирезонансных примесей [28, 29]. В этих условиях из (10) имеем $\Omega \sim 10^{13}\,\text{с}^{-1}$.

Из первого выражения (10) и второго условия (33) следует, что возможность формирования двухчастотной световой пули нечувствительна к знаку отстройки групповых скоростей на основной частоте и на частоте второй гармоники. В то же время она весьма чувствительна к знаку отстройки между соответствующими показателями преломления (см. (3) и второе условие (33)).

Взяв при длине волны $\lambda \sim 1\,\text{мкм}$ ($\omega \sim 10^{15}\,\text{с}^{-1}$) $|n_1 - n_2| \sim 0.01$ [30], получим оценку $|\delta| \sim 10^3\,\text{см}^{-1}$. Тогда при принятом выше значении $|\beta| \sim 10^{-26}\,\text{с}^2/\text{см}$ будем иметь $|\delta/\beta| \sim 10^{29}\,\text{с}^{-2}$, что на два–три порядка превышает значение Ω^2 для приведенной выше оценки $\Omega \sim 10^{13}\,\text{с}^{-1}$. При таких условиях основной вклад в ПР σ вносит фазовое рассогласование. Поэтому с хорошей точностью запишем $\sigma = -\delta/|\beta|$. Тогда из (3) и второго условия (33) приходим к выводу, что для формирования световой пули в рассмотренных выше условиях необходимо выполнение неравенства $\delta < 0$ или $n_2 < n_1$. Этот вывод четко коррелирует с результатом работы [15], где на основе численного моделирования была отмечена именно такая асимметрия. Неравенство $n_2 < n_1$ может быть выполнено, например, в случае взаимно ортогональной ориентации плоскостей поляризации импульсов на основной частоте и на частоте второй гармоники. В случае одноосного кристалла импульс на основной частоте поляризован в плоскости обыкновенной волны, а импульс на частоте второй гармоники – в плоскости необыкновенной волны [13].

Заметим, что с уменьшением временной длительности световой пули возрастают аддитивные нелинейные добавки к волновым числам обеих составляющих световой пули (см. (16), (17), а также второе слагаемое в квадратных скобках (38)). Как показано в [15], область устойчивости световой пули расширяется в сторону увеличения данных добавок. Неравенство (35) согласуется с этим выводом работы [15].

При приведенных выше оценках из (35) и (36) находим $\tau_{\max} \sim 10\,\text{фс}$, $R_{\max} \sim 10\,\text{мкм}$. Данные оценки показывают, что компоненты световой пули содержат порядка нескольких оптических колебаний, а их поперечные диаметры (апертуры) достигают значений порядка нескольких длин волн. Такие параметры лежат вблизи границ корректности принятого здесь приближения ММА, а также параксиального приближения.

Пусть теперь с хорошей точностью выполнено условие ФС. Тогда $\sigma = \Omega^2$. В этом случае при $\Omega \sim 10^{13}\,\text{с}^{-1}$ из (35) и (36) имеем $\tau_{\max} \sim 100\,\text{фс}$, $R_{\max} \sim 100\,\text{мкм}$. В этом случае использованные выше условия для базовых приближений выполняются с достаточно хорошим запасом.

Взяв для типичного нелинейного кристалла $\chi^{(2)} \sim 10^{-8}$ СГСЭ [30], будем иметь $\alpha_1 \sim \alpha_2 \sim 10^2$ СГСЭ. Тогда из (16), (17), (37) и приведенных выше оценок при доминировании фазового и группового рассогласований для пиковых интенсивностей имеем соответственно $I_1 \sim I_2 \sim 10^{12}\,\text{Вт/см}^2$ и $I_1 \sim I_2 \sim 10^9\,\text{Вт/см}^2$. При этом для соответствующих мощностей $P_{1,2}$ имеем оценки $P_{1,2} \sim I_{1,2}R_0^2 \sim 10^6\,\text{Вт}$ и $P_{1,2} \sim 10^5\,\text{Вт}$. Оценка мощности, приведенная для случая доминирования фазовой отстройки, наводит на мысль о желательности провести оценку влияния в этом случае, помимо квадратичной, еще и керровской нелинейности. Что касается энергий световых пуль, то в обоих случаях они одного порядка и составляют ∼10 наноджоулей.

4. Заключение. Таким образом, нарушение условий ФС и ГС приводит, с одной стороны, к снижению эффективности процесса ГВГ. С другой стороны, эффективность генерации должна оставаться достаточно высокой для того, чтобы могла сформироваться двухчастотная световая пуля. Минимальное отношение интенсивности компоненты на частоте второй гармоники к интенсивности основной компоненты определяется выражением (39). Данное отношение равно примерно одной четвертой части от соответствующего отношения при выполнении условий ФС и ГС.

Важными представляются условия (33), (35) и (36), выполнение которых необходимо для формирования двухчастотной световой пули. Проведенные выше оценки показывают, что при доминировании фазовой отстройки обе компоненты световой пули могут вмещать внутри себя всего несколько длин волн. Как результат, обе компоненты являются широкополосными в спектральном смысле. Благодаря этому обстоятельству условия ФС и ГС могут выполняться для части их спектральных компонент, что влечет за собой возможность формирования двухчастотной световой пули.

Относительно высокие интенсивности составляющих световой пули наводят на мысль о необходимости наряду с квадратичной нелинейностью учета в некоторых случаях нелинейности третьего порядка.

Здесь исследован случай равенства нулю параметра ДГС на частоте второй гармоники. Как правило, для большинства кристаллов это условие может быть выполнено в инфракрасном частотном диапазоне. Представляет немалый интерес аналитическое решение общей задачи, когда отличны от нуля параметры ДГС на обеих частотах.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств государственного задания Национального исследовательского центра "Курчатовский институт". Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

---

1. Y. Silberberg, Opt. Lett. **15**, 1282 (1990).
2. Ю.,С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, М. (2005) [Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, N.Y. (2003)].
3. A. C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1985).
4. X. Liu, L. J. Qian, and F. W. Wise, Phys. Rev. Lett. **82**, 4631 (1999).
5. А. П. Сухоруков, *Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике*, Наука, М. (1988).
6. H. Sakaguchi and B. A. Malomed, Opt. Soc. Am. B **29**, 2741 (2012).
7. I. N. Towers, B. A. Malomed, and F. W. Wise, Phys. Rev. Lett. **90**, 1239021 (2003).
8. S. V. Sazonov, M. S. Mamaikin, M. V. Komissarova, and I. G. Zakharova, Phys. Rev. E **96**, 022208 (2017).
9. A. A. Kanashov and A. M. Rubenchik, Physica D **4**, 122 (1981).
10. D. Mihalache, D. Mazilu, L.-C. Crasovan, I. Towers, B. A. Malomed, A. V. Buryak, L. Torner, and F. Lederer, Phys. Rev. E **66**, 016613 (2002).
11. D. Mihalache, D. Mazilu, B. A. Malomed, F. Lederer, L.-C. Crasovan, Y. V. Kartashov, and L. Torner, Phys. Rev. E **74**, 047601 (2006).
12. N.-C. Panoiu, R. M. Osgood, Jr., B. A. Malomed, F. Lederer, D. Mazilu, and D. Mihalache, Phys. Rev. E **71**, 036615 (2005).
13. И. Р. Шен, *Принципы нелинейной оптики*, Наука, М. (1989) [Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, John Wiley & Sons, N.Y. (1984).
14. D. Mihalache, D. Mazilu, L.-C. Crasovan, I. Towers, B. A. Malomed, A. V. Buryak, L. Torner, and F. Lederer, Phys. Rev. E **66**, 016613 (2002).
15. D. Mihalache, D. Mazilu, B. A. Malomed, F. Lederer, L.-C. Crasovan, Y. V. Kartashov, and L. Torner, Phys. Rev. E **74**, 047601 (2006).
16. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, М. (1988).
17. K. Hayata and M. Koshiba, Phys. Rev. Lett. **71**, 3275 (1993).
18. С. В. Сазонов, М. В. Комиссарова, Письма в ЖЭТФ **111**, 355 (2020) [S. V. Sazonov and M. V. Komissarova, JETP Lett. **111**, 320 (2020)].
19. F. Zernike, Jr, J. Opt. Soc. Am. **54**, 1215 (1964).
20. S. V. Sazonov, Laser Phys. Lett. **22**, 025205 (2025).
21. D. Anderson, Phys. Rev. A **27**, 3135 (1983).
22. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, ЖЭТФ **92**, 1612 (1987) [S. K. Zhdanov and B. A. Trubnikov, Sov. Phys. JETP **65**, 904 (1987)].
23. D. Anderson, M. Desaix, M. Lisak, and M. L. Quorida-Teixeiro, J. Opt. Soc. Am. B **9**, 1358 (1992).
24. Д. Р. Тилли, Дж. Тилли, *Сверхтекучесть и сверхпроводимость*, Мир, М. (1977) [D. R. Tilley and J. Tilley, *Superfluidity and Superconductivity*, Van Nostrand Reinhold, N. Y. (1974)].
25. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
26. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Физматлит, М. (2001), 496 с.
27. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН **93**, 19 (1967) [S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov, and R. V. Khokhlov, Sov. Phys.-Uspekhi **10**, 609 (1968)].
28. S. V. Sazonov, Laser Phys. Lett. **22**, 045211 (2025).
29. С. В. Сазонов, Квантовая электроника **55**, 9 (2025).
30. D. N. Nikogosyan, *Nonlinear Optics Crystals*: A Complete Survey, Springer, N.Y. (2005).