Письма в ЖЭТФ, том 122, вып. 11, с. 724 – 731

Ярко-темные акустические пули терагерцового диапазона

С. В. Сазонов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 октября 2025 г.
После переработки 24 октября 2025 г.
Принята к публикации 24 октября 2025 г.

Исследована возможность формирования ярко-темной акустической пули терагерцового диапазона при генерации второй гармоники в парамагнитном кристалле, помещенном во внешнее магнитное поле. Такая пуля представляет собой узкий пучок двухчастотного поля упругой деформации, вдоль которого со скоростью звука распространяется темное пятно наносекундной длительности, где поле деформации отсутствует. Подчеркнута важная роль в формировании пули временной дисперсии, вызванной спин-фононным взаимодействием, и пространственной дисперсии, обусловленной дискретностью кристаллической решетки. Показано, что в условиях отсутствия фазового и группового синхронизмов формирование пули возможно при ограничениях сверху на временную длительность темного пятна и на поперечный размер акустического пучка.

DOI: 10.31857/S0370274X25120034

1. Введение. Исследование взаимодействия электромагнитного терагерцового излучения с веществом в последние десятилетия прочно вошло в круг актуальных направлений физической науки [1–14]. К настоящему времени интенсивности генерируемых в лабораторных условиях терагерцовых сигналов электромагнитной природы достигли таких значений, что в пору говорить о необходимости развития "нелинейной терагерцовой оптики" [8]. При этом в терагерцовом диапазоне частот нелинейные явления способны проявлять себя при интенсивностях, на много порядков меньших, чем в видимом и инфракрасном диапазонах [9]. Хорошо известно также об использовании электромагнитного терагерцового излучения в восстановлении изображений, системах безопасности и т.д. Немалое развитие получили исследования в области терагерцовой спектроскопии [7].

С другой стороны, с началом лазерной эпохи в 60-х гг. прошлого столетия был дан мощный толчок экспериментальным и теоретическим исследованиям по нелинейной физической акустике твердого тела [15, 16]. Одной из тенденций здесь явился поиск акустических аналогов тех явлений, которые проявили себя в оптике и лазерной физике [17]. К настоящему времени частоты генерируемых в лаборатории когерентных акустических сигналов достигли терагерцового диапазона [18]. При этом характерные длительности таких сигналов лежат в интервале от нано- до пикосекунд [19, 20].

Заметным преимуществом акустического терагерцового излучения перед терагерцовым излучением электромагнитной природы является то, что акустическое излучение способно свободно распространяться через проводящие среды. Кроме того, в отличие от электромагнитных волн, акустические волны в твердых телах могут быть как поперечными, так и продольными.

Резюмируя на этом этапе, можно сказать, что фундаментальные и прикладные исследования, связанные с нелинейной оптикой видимого, инфракрасного и терагерцового диапазонов, а также с нелинейной физической акустикой твердого тела, способны во многих отношениях эффективно дополнять друг друга.

В последнее время значительную актуальность приобрели исследования пространственно-временных (трехмерных) оптических солитонов (оптических пуль). В особенности это касается многочастотных оптических пуль. Наибольшее продвижение здесь заметно в исследованиях формирования двухчастотных оптических пуль при генерации второй гармоники [21–30]. В работе [31] теоретически предсказан новый тип оптических пуль, названных двухцветными ярко-темными пространственно-временными солитонами. Такие оптические пули представляют собой узкие пучки оптического излучения, вдоль которых распро-

[1)]e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

страняются темные пятна провалов интенсивности.

Что касается временных (одномерных) акустических солитонов, то они были ранее исследованы как теоретически, так и экспериментально во многих средах, включая парамагнитные кристаллы [32–36]. При этом речь шла о гигагерцовом частотном диапазоне. Если же говорить о пространственно-временных акустических солитонах (акустических пулях) терагерцового диапазона, то такие исследования, по-видимому, пока не проводились. Поэтому представляют немалый интерес исследования возможностей формирования терагерцовых акустических пуль в различных физических условиях.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию возможности формирования двухчастотной светло-темной акустической пули терагерцового диапазона в кристалле, содержащем примесные парамагнитные ионы.

2. Основные уравнения и темные временные солитоны. Пусть продольный акустический импульс с несущей частотой ω и комплексной огибающей Φ_1 относительной деформации распространяется вдоль оси z четвертого порядка кубического кристалла, перпендикулярно к оси x, вдоль которой направлено внешнее магнитное поле $\mathbf{B}$.

В кристалл внедрены примесные парамагнитные ионы, обладающие эффективным спином $S = 1$. Ионы с таким эффективным спином наиболее эффективно взаимодействуют с продольными акустическими волнами [15]. В качестве примера можно привести ионы Fe^{+} и Co^{2+} в кристалле MgO [32]. Спин-фононное взаимодействие осуществляется здесь за счет механизма Ван Флека [15, 16]: упругий импульс создает в среде локальные градиенты внутрикристаллического электрического поля, которые вызывают квадрупольные переходы между зеемановскими подуровнями с проекциями эффективного спина на ось x. Обозначим частоту данного зеемановского расщепления как ω_0. Пусть при этом несущая частота ω основной компоненты настолько близка к ω_0, что выполняется условие квазирезонанса [37–39]

$$\tau_p^{-1},\ T_2^{*-1} \ll |\omega_0 - \omega| \ll \omega_0,\ \omega, \tag{1}$$

где τ_p – временная длительность акустического импульса, T_2^* – время, характеризующее неоднородное уширение зеемановского расщепления.

Из-за квадратичной акустической нелинейности, порождаемой ангармонизмом колебаний узлов кристаллической решетки и описываемой параметром Грюнайзена Γ, происходит генерация акустического импульса на частоте второй гармоники с комплексной огибающей Φ_2. Тогда, дополняя систему волновых уравнений, полученных в [36], членами, которые описывают динамику импульсов в поперечных относительно оси z направлениях, будем иметь

$$i\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{1}{v_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right) = -\frac{\beta_1}{2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + \alpha \Phi_1^* \Phi_2 + \frac{a_\perp^2}{2\omega a}\Delta_\perp \Phi_1, \tag{2}$$

$$i\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{1}{v_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right) = \\ = -\delta\Phi_2 - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + \alpha \Phi_1^2 + \frac{a_\perp^2}{4\omega a}\Delta_\perp \Phi_2. \tag{3}$$

Здесь и далее нижний индекс "1" обозначает принадлежность какого-либо параметра к основной частоте, а нижний индекс "2" – к частоте второй гармоники; выражения для фазовой отстройки δ, связанной с волновыми числами k_1 и k_2 соотношением $\delta = 2k_1 - k_2$, а также для групповых скоростей $v_{1,2}$ и параметров дисперсии групповых скоростей (ДГС) $\beta_{1,2}$, найденные в [36], с учетом условий (1) принимают вид

$$\delta = \frac{\omega}{a}\left[\eta - \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega} - \left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^2\right], \tag{4}$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{a}\left[1 + \eta\left(\frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega}\right)^2 + 0.5\left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^2\right],$$

$$\frac{1}{v_2} = \frac{1}{a}\left[1 + \eta + 2\left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^2\right], \tag{5}$$

$$\beta_1 = \frac{\omega}{a}\left[2\eta\frac{\omega_0}{(\omega_0 - \omega)^3} + \frac{1}{\omega_D^2}\right],$$

$$\beta_2 = -\frac{2\omega}{a}\left[\frac{2\eta}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_D^2}\right], \tag{6}$$

a и $a_\perp$ – низкочастотные скорости продольных и поперечных звуковых волн соответственно, ω_D – дебаевская частота, ассоциированная с продольными упругими волнами,

$$\eta = \frac{g^2 n}{2\hbar\omega_0\rho_m a^2}(w_- - w_+), \tag{7}$$

g – постоянная спин-фононного взаимодействия, n – концентрация парамагнитных ионов, $\hbar$ – постоянная Планка, ρ_m – равновесная плотность кристалла, w_- и w_+ – равновесные населенности квантовых состояний парамагнитного иона с $S_z = -1$ и $S_z = +1$ соответственно, α – коэффициент акустической нелинейности, определяемый выражением

$$\alpha = \Gamma/a, \tag{8}$$

$\Delta_\perp$ – поперечный по отношению к оси z лапласиан.

Последние слагаемые в квадратных скобках выражений (4)–(6) описывают пространственную дисперсию, обусловленную дискретной структурой кристалла. Предшествующие этим слагаемым члены описывают временную дисперсию, связанную со спин-фононным взаимодействием.

Ниже будем считать, что кристаллический образец при температуре жидкого гелия помещен в сильное магнитное поле, вызывающее зеемановское расщепление $\omega_0 \sim 10^{12}\,\text{с}^{-1}$. Так как выполнено квазирезонансное условие (1), то для основной несущей частоты также имеем оценку $\omega \sim 10^{12}\,\text{с}^{-1}$, что соответствует терагерцовому акустическому диапазону. Взяв для кристалла MgO $\rho_m \approx 3.5\,\text{г/см}^3$, $a = 9.1 \cdot 10^5\,\text{см/с}$ [35], а для ионов Fe^{2+} в данном кристалле при температурах жидкого гелия [32, 40] $n \sim 10^{18}\,\text{см}^{-3}$, $g \sim 10^{-13}\,\text{эрг}$, $w_- - w_+ \approx 0.5$, будем иметь $\eta \sim 10^{-5}$. В соответствии с (1) положим $|\omega_0 - \omega| \sim 10^{10}\,\text{с}^{-1}$. При этом левая часть неравенства (1) также выполняется с хорошим запасом в силу того, что $T_2^* \sim 10^{-8}\,\text{с}$ [32], а длительности импульсов, генерируемых в лабораторных условиях, достигают значений $\tau_p \sim 10^{-9}\,\text{с}$ [20]. Учитывая приведенные выше численные оценки, а также то, что $\omega_D \approx 5{\cdot}10^{13}\,\text{с}^{-1}$ [35], приходим к выводу, что обусловленная спин-фононным взаимодействием временная дисперсия превалирует над пространственной дисперсией, внося доминирующие вклады в групповую скорость и ДГС на основной частоте (см. (5) и (6)). При этом

$$\left|\frac{\beta_1}{\beta_2}\right| \sim \left|\frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega}\right| \sim 10^6.$$

В этих условиях можно пренебречь ДГС на частоте второй гармоники, полагая в (3) $\beta_2 = 0$. Тогда система (2), (3) обладает при $\Delta_\perp \Phi_1 = \Delta_\perp \Phi_2 = 0$ решениями в виде темных временных солитонов [41]:

$$\Phi_1 = \frac{\beta_1}{\alpha\tau_p}\sqrt{\frac{2}{\tau_p^2} + \mu}\,e^{i(\Omega t - qz)} \tanh\left(\frac{t - z/v_2}{\tau_p}\right), \tag{9}$$

$$\Phi_2 = \frac{\beta_1}{\alpha\tau_p^2} e^{2i(\omega t - qz)} \tanh^2\left(\frac{t - z/v_2}{\tau_p}\right), \tag{10}$$

где

$$\Omega = \frac{1}{\beta_1}\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right), \tag{11}$$

$$q = \frac{\beta_1}{\tau_p^2} + \frac{\Omega}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right). \tag{12}$$

$$\mu = \frac{\delta}{\beta_1} - \Omega^2. \tag{13}$$

Параметр μ определяется значениями фазового δ и группового Ω рассогласований (см. (4) и (11)). В идеальном случае, когда одновременно выполнены условия фазового и группового синхронизмов, имеем $\mu = 0$.

Сдвиг Ω несущей частоты основной компоненты при учете (1) и в пренебрежении пространственной дисперсией, как следует из (5) и (6), составляет

$$\Omega \approx -\frac{\omega_0 - \omega}{2}. \tag{14}$$

Таким образом, условие $|\Omega| \ll \omega$ применимости приближения медленно меняющихся огибающих выполняется с хорошим запасом (см. (1)).

Временная длительность τ_p темного двухцветного солитона выступает здесь в роли свободного параметра.

3. Ярко-темные двухчастотные пули. Для построения приближенного решения уравнений (2) и (3) в виде ярко-темной световой пули используем метод усредненного лагранжиана (УЛ) типа Ритца–Уизема [42, 43]. Системе уравнений (2), (3) при $\beta_2 = 0$ соответствует плотность лагранжиана

$$L = L_1 + L_2 + L_{\text{int}}, \tag{15}$$

где

$$L_1 = \frac{i}{2}\left(\Phi_1^*\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \Phi_1\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial z}\right) + \frac{i}{2v_1}\left(\Phi_1\frac{\partial t}{+}\Phi_1\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial t}\right) - $$
$$- \frac{\beta_1}{2}\left|\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right|^2 + \frac{a_\perp^2}{2a\omega}|\nabla_\perp\Phi_1|^2, \tag{16}$$

$$L_2 = \frac{i}{4}\left(\Phi_2^*\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - \Phi_2\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial z}\right) + \frac{i}{4v_2}\left(\Phi_2^*\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} - \Phi_2\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial t}\right) +$$
$$+ \frac{\delta}{2}|\Phi_2|^2 + \frac{a_\perp^2}{8a\omega}|\nabla_\perp\Phi_2|^2, \tag{17}$$

$$L_{\text{int}} = -\frac{\alpha}{2}(\Phi_1^{*2}\Phi_2 + \Phi_1^2\Phi_2^*), \tag{18}$$

$\nabla_\perp$ – поперечный градиент.

В соответствии с (9) и (10) для учета поперечной динамики компонент двухчастотного солитона выберем пробные решения в виде

$$\Phi_1 = \frac{\beta_1 Q}{\alpha}\sqrt{2Q^2 + \mu}\,e^{i(\Omega t - a\omega\varphi/a_\perp^2)} \tanh\left[Q\left(t - \frac{z}{v_2}\right)\right], \tag{19}$$

$$\Phi_2 = \frac{\beta_1 Q^2}{\alpha} e^{2i(\Omega t - a\omega\varphi/a_\perp^2)} \tanh^2\left[Q\left(t - \frac{z}{v_2}\right)\right]. \tag{20}$$

где Q и φ – “медленная” и “быстрая” функции координат соответственно [43].

В соответствии с методом УЛ пробные решения (19) и (20) следует подставить в (15)–(18) и проинтегрировать в неограниченных пределах по времени. Здесь будем иметь расходящиеся интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tanh^2\zeta d\zeta$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tanh^2\zeta d\zeta$. Соответствующая регуляризация производится с помощью замен [44] $\tanh^2\zeta = 1-\mathrm{sech}^2\zeta \to -\mathrm{sech}^2\zeta$, $\tanh^4\zeta \to -2\mathrm{sech}^2\zeta + \mathrm{sech}^4\zeta$. В результате данных замен мы отбрасываем яркий фон и учитываем динамику в направлении распространения провалов интенсивности обеих компонент солитона.

В дифракционных слагаемых, содержащих поперечные градиенты от "медленной" переменной Q, будем оставлять только отмеченные выше расходящиеся интегралы с их последующей регуляризацией. В результате придем к УЛ вида

$$\Lambda = (u^3+u)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (u^3+u)\frac{(\nabla_\perp\varphi}{2} - \\ - \frac{a_\perp^2}{a\omega}\left[\frac{\Omega}{v_1}\left(\frac{3}{5}u^3+u\right) + \left(\frac{2\Omega}{v_2}-\frac{\delta}{2}\right)u^3 + \\ + \frac{9}{50}\mu\beta_1 u^5 + \frac{\beta_1}{2}\Omega^2 u\right] + \Lambda_D, \tag{21}$$

где

$$u = \sqrt{\frac{10}{3\mu}}Q, \tag{22}$$

а дифракционная часть Λ_D лагранжиана определяется выражением

$$\Lambda_D = \left(\frac{a_\perp^2}{a\omega}\right)^2 \frac{(\nabla_\perp u)^2}{10}\left[14u + \frac{25}{u(3u^2+5)}\right]. \tag{23}$$

При этом $\Lambda \equiv -\sqrt{\frac{10}{3}}\frac{a_\perp^2}{2a\omega}\frac{\alpha^2}{\mu^{3/2}\beta_1^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Ldt$.

Уравнения Эйлера–Лагранжа относительно переменных u и φ, соответствующие лагранжиану (21), (23), имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial z} + \nabla_\perp(\rho\nabla_\perp\varphi) = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{(\nabla_\perp\varphi)^2}{2} - \frac{a_\perp^2}{a\omega}\left[\frac{3}{10}\mu\beta_1 u^2 + \frac{\Omega}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)\right] = \\ = \left(\frac{a_\perp^2}{a\omega}\right)^2 G, \tag{25}$$

где

$$\rho = u^3 + u, \tag{26}$$

$$G = A(u)\left[\frac{\Delta_\perp\rho}{\rho} - B(u)\frac{(\nabla_\perp\rho)^2}{2\rho^2}\right], \tag{27}$$

а функции $A(u)$ и $B(u)$ с хорошей точностью аппроксимируются выражениями

$$A(u) = \frac{5+7u^2}{2+9u^2},\quad B(u) = 1 + \frac{2.4u^2}{1+9u^4}.$$

Чтобы перейти к решению системы (24)–(27), надо выразить переменную u через ρ, используя кубическое уравнение (26). Заметим, что обсуждаемые переменные, как следует из (26), являются монотонными функциями друг друга: с возрастанием (убыванием) u растет (убывает) ρ, и наоборот. Следовательно, уравнение (26) обладает единственным вещественным корнем. Соответствующая данному корню формула Кардано является весьма громоздкой. Поэтому мы не будем ее здесь использовать. Вместо нее используем аппроксимирующее выражение вида

$$u = \frac{\rho}{(1+\rho)^{2/3}}. \tag{28}$$

Анализ показывает, что вычисления, проведенные с помощью (28), с точностью до десятых долей процента совпадают со значениями корня уравнения (26) на всем интервале положительных значений переменной ρ. Например, при $\rho \ll 1$ и $\rho \gg 1$ из (28) имеем соответственно $u = \rho$ и $u = \rho^{1/3}$, что вполне согласуется с (26).

Правой частью уравнения (25) учитываются эффекты дифракции. Очевидно, $A(u)$ и $B(u)$ в выражении (27) являются медленными функциями координат. С хорошей точностью мы можем считать их здесь постоянными. Тогда, совершая замену $u \to \sqrt{\frac{10}{3\mu}}\tau_p^{-1}$ (см. (9), (10), (19), (20) и (22)), запишем

$$A = \frac{14+3\mu\tau_p^2}{3(15+\mu\tau_p^2)},\quad B = 1 + \frac{8\mu\tau_p^2}{100+\mu^2\tau_p^4}. \tag{29}$$

Уравнение непрерывности (25) обладает хорошо известным аксиально-симметричным автомодельным решением [45]

$$\rho = \rho\left(\frac{R_0}{R}\right)e^{-r^2/R^2},\quad \varphi = f + \frac{r^2}{2}\frac{R'}{R}, \tag{30}$$

где r – расстояние от оси симметрии солитона до точки наблюдения в плоскости, перпендикулярной к оси z, R – характерный поперечный радиус солитона, зависящий от координаты z, R – некоторое равновесное значение данного радиуса (см. ниже), f – пока неизвестная функция координаты z, параметр ρ_0 связан с центральной временной длительностью τ_p световой пули уравнением (26) при заменах в нем $\rho \to \rho_0$ и $u \to \sqrt{\frac{10}{3\mu}}\tau_p^{-1}$, штрих сверху здесь и ниже обозначает производную по координате z.

При подстановке (30) в (25) в левой части используем приосевое приближение [46], учитывая, что вблизи оси аксиальной симметрии импульса $e^{-r^2/R^2} \approx 1 - r^2/R^2$. Тогда, приравнивая друг другу в левой и правой частях коэффициенты при r^0 и r^2, с учетом (28) придем к уравнениям вида

$$f' = \frac{a_\perp^2}{a\omega}\frac{\beta_1}{\tau_p^2}\left[\frac{R_0^3(1+\rho_0)}{\rho_0 R_0^2 R + R^3}\right]^{4/3} - \\ - \frac{4}{3}\left(\frac{a_\perp^2}{a\omega}\right)^2 \frac{14+3\mu\tau_p^2}{15+\mu\tau_p^2}\frac{1}{R^2}, \quad (31)$$

$$R'' = -\frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{4a_\perp^2}{3a\omega}\frac{\beta_1}{\tau_p^2}R_0^4(1+\rho_0)^{4/3} \times \\ \times \frac{\rho_0 R_0^2 + 3R^2}{(\rho_0 R_0^2 R + R^3)^{7/3}} + \frac{4}{3}\left(\frac{a_\perp^2}{a\omega}\right)^2 \frac{M}{R^3}, \quad (32)$$

где

$$M = \frac{14+3\mu\tau_p^2}{15+\mu\tau_p^2}\frac{84+(\mu\tau_p^2-4)^2}{100+\mu^2\tau_p^4}.$$

Уравнение (32) формально совпадает с уравнением движения ньютоновской частицы единичной массы во внешнем консервативном поле, описываемом потенциальной энергией $U(R)$. Акустической пуле соответствует наличие устойчивого положения равновесия воображаемой частицы. Данное положение соответствует минимуму функции $U(R)$ при равновесном значении радиуса R_0. Таким образом, имеем два условия

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)_{R=R_0} > 0. \quad (33)$$

Из первого условия (33) находим связь между поперечным радиусом R_0 акустического пучка и центральной длительностью τ_p темного пятна

$$R_0 = 0.39\frac{a_\perp}{a}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta_1}}F(\sqrt{\mu}\tau_p)\tau_p, \quad (34)$$

где $\lambda = 2\pi a/\omega$ – длина волны, соответствующая частоте ω, $F(\sqrt{\mu}\tau_p) = \sqrt{\frac{15M}{14}\frac{1+\rho_0}{3+\rho_0}}$ – безразмерная функция, слабо зависящая от $\sqrt{\mu}\tau_p$; при этом $F(0) = 1$ и $F(\infty) = 1.04$.

Использование второго условия (33) приводит к ограничению сверху временной длительности темного пятна

$$\tau_p < \tau_{\max} = \frac{1.74}{\sqrt{\mu}}. \quad (35)$$

Учитывая, что $F(1.74) = 0.810$, отсюда и из (34) будем иметь

$$R_0 < R_{\max} = 0.31\frac{a_\perp}{a}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta_1\mu}}. \quad (36)$$

Очевидно, условия (35) и (36) следует дополнить неравенствами

$$\beta_1 > 0, \quad \mu > 0. \quad (37)$$

Согласно первому неравенству (37), ярко-темная двухчастотная акустическая пуля способна сформироваться при нормальной ДГС на основной частоте, как это имеет место и в случае ярко-темной оптической пули [31].

Второе неравенство (37) говорит о том, что для формирования рассматриваемой здесь ярко-темной пули рассогласование фазовых скоростей должно превалировать над рассогласованием групповых скоростей (см. (4), (11) и (13)). При этом как минимум необходимо, чтобы параметр был положительным.

Пренебрегая в первых выражениях (5) и (6) слагаемыми, отвечающими за пространственную дисперсию, а также используя (1) и (4), перепишем условия (35)–(37) соответственно в виде

$$\tau_p < \tau_{\max} = \frac{3.48}{\sqrt{1-\sigma}(\omega_0-\omega)}, \quad (38)$$

$$R_0 < R_{\max} = 0.17\lambda\frac{a_\perp}{a}\sqrt{\frac{1-\omega/\omega_0}{\eta(1-\sigma)}}, \quad (39)$$

$$\omega < \omega_0, \quad \sigma \equiv 2\frac{\omega_0(\omega_0-\omega)}{\eta\omega_D^2} < 1. \quad (40)$$

Приближенные аналитические выражения для огибающих основной компоненты ярко-темной пули и компоненты на частоте второй гармоники при $R = R_0$ имеют вид (19) и (20) соответственно, где, как видно из (22), (26) и (28) с учетом замены $u \to \to \sqrt{\frac{10}{3\mu}}\tau_p^{-1}$,

$$Q = \frac{1}{\tau_p}\frac{(1+\kappa\tau_p^2)\exp(-r^2/R_0^2)}{[\kappa^{3/2}\tau_p^3 + (1+\kappa\tau_p^2)\exp(-r^2/R_0^2)]^{2/3}}, \quad (41)$$

$$\frac{a\omega}{a_\perp^2}\varphi = \left[\frac{\beta_1}{\tau_p^2} + \frac{\Omega}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right) - \frac{4}{5\pi}\frac{7+5\kappa\tau_p^2}{9+2\kappa\tau_p^2}\frac{\lambda}{R_0^2}\right]z. \quad (42)$$

Рассогласование фазовых и групповых скоростей здесь учитывается параметром $\kappa = 3\mu/10$.

Описываемая выражениями (19), (20), (39) и (40), ярко-темная акустическая пуля представляет собой двухчастотный узкий акустический пучок терагерцового диапазона с поперечным диаметром $2R_0$, вдоль которого распространяется пятно с временной длительностью τ_p. Внутри этого пятна деформация кристалла отсутствует.

Последнее слагаемое в квадратных скобках выражения (42) возникает благодаря эффектам дифракции и исчезает при использовании одномерного приближения $R_0 \to \infty$. Заметим, что в этом случае выражение (42) для фазы солитона в точности совпадает с фазой одномерного темного солитона (9), (10). Данное обстоятельство является существенным аргументом в пользу использованного здесь метода УЛ.

4. Обсуждение результатов и заключительные замечания. Параметр σ, определенный соотношением (40), выражает собой отношение вклада пространственной дисперсии в зависимость фазовой скорости акустического излучения от частоты к соответствующему вкладу от временной дисперсии, обусловленной спин-фононным взаимодействием. Условие $\sigma < 1$ говорит о доминировании временной дисперсии. Однако данное доминирование должно быть относительно небольшим. Действительно, полагая в (38) $\sigma \ll 1$, придем к условию, практически противоречащему левой части неравенства (1). Подставив во второе выражение (40) приведенные выше оценочные значения входящих в него параметров, найдем $\sigma \sim 1$. Если взять $\sigma = 0.9$, из (38) будем иметь $\tau_{\max} \approx 10/(\omega_0 - \omega)$, что уже удовлетворительным образом согласуется с левой частью неравенства (1). Полагая здесь, как и ранее, $\omega_0 - \omega \sim 10^{10}\,\text{с}^{-1}$, получим $\tau_{\max} \sim 10^{-9}\,$с. Данная оценка согласуется с приведенной выше оценкой для длительности пятна в ярко-темном солитоне. В этих же условиях из (39) находим $R_{\max} \sim 10\lambda$, что неплохо согласуется с принятым здесь учетом дифракции в параксиальном приближении. Так как длина акустической волны при рассматриваемых частотах терагерцового диапазона $\lambda \sim 10^{-5}\,$см, то $R_{\max} \sim 1\,$мкм.

Таким образом, значение параметра σ должно быть достаточно близким к единице. Это говорит о том, что для формирования двухчастотной ярко-темной акустической пули необходимо присутствие как временной, так и пространственной дисперсии. Условия близости параметра σ к единице можно добиться, подбирая соответствующим образом частотную отстройку $\omega_0 - \omega$, находясь при этом в согласии с условиями (1) и (40).

Что касается групповой скорости и параметра ДГС, соответствующих основной частоте ярко-темной акустической пули, то здесь временная дисперсия значительно превалирует над пространственной дисперсией, обусловленной дискретностью кристаллической решетки. Из первого выражения (5) и приведенных выше оценок входящих в него параметров видно, что присутствие примесных парамагнитных ионов, привносящих временную дисперсию, способно на 10 процентов уменьшить групповую скорость основной компоненты акустической пули. В то же время, как видно из второго выражения (5) и при тех же численных оценках параметров, групповая скорость на частоте второй гармоники практически равна скорости низкочастотного продольного звука. Согласно выражениям (19) и (20), скорость обеих компонент ярко-темной акустической пули определяется линейной групповой скоростью v_2 на частоте второй гармоники. Как результат проведенного выше анализа, в (19) и (20) можно с хорошей точностью положить $v_2 = a$. Тогда пространственный размер темного пятна $l \approx a\tau_p \sim 10\,$мкм, что примерно на порядок превосходит поперечный размер ярко-темной акустической пули.

Пренебрегая, как было отмечено выше, последним слагаемым в квадратных скобках выражения (6), для ДГС на основной частоте будем иметь $\beta_1 \sim \sim 10^{-17}\,\text{с}^2/\text{см}$.

Дистанция, на которой способна сформироваться рассматриваемая в настоящей работе акустическая пуля, по порядку величины равна дисперсионной длине $l_d \sim \tau_p^2/\beta_1$. Подставив сюда приведенные выше численные оценки τ_p и β_1 , будем иметь $l_d \sim 0.1\,$см.

Для приведенных выше числовых оценок имеем $\kappa\tau_{\max}^2 \sim 1$. Тогда, как видно из (41), на центральной оси ярко-темной акустической пули $Q \sim 1/\tau_p$. Следовательно, для амплитудных значений относительных деформаций из (19) и (20) получим $|\Phi_{1,2}| \sim \beta_1/\alpha\tau_p^2$. Используя (8) при параметре Грюнайзена для кристалла оксида магния $\Gamma = 6.8$ [35], будем иметь $|\Phi_{1,2}| \sim 10^{-5}\text{–}10^{-6}$, что вполне реализуемо в экспериментальных условиях.

Важно подчеркнуть, что теоретически предсказанная здесь двухчастотная ярко-темная акустическая пуля может быть обнаружена экспериментально именно в терагерцовом ультразвуковом диапазоне. Это, в свою очередь, поддерживает мысль о желательности взаимного дополнения в проведении исследований нелинейных явлений при взаимодействии с веществом терагерцовых волн электромагнитной и акустической природы.

Финансирование работы. Работа финансировалась за счет средств государственного задания Национального исследовательского центра "Курчатовский институт".

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

---

1. P. Y. Han and X.-C. Zhang, Meas. Sci. Technol. **12**, 1747 (2001).

2. B. Fergusson and X.-C. Zhang, Nature Mater. **1**, 26 (2002).
3. J. Hebling, G. Almasi, and I. Z. Cosma, Opt. Express **10**, 1161 (2002).
4. А. Г. Степанов, А. А. Мельников, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, Письма в ЖЭТФ **85**, 279 (2007) [A. G. Stepanov, A. A. Mel'nikov, V. O. Kompanets, and S. V. Chekalin, JETP Lett. **85**, 227 (2007)].
5. G. Kh. Kitaeva, Laser Phys. Lett. **5**, 559 (2008).
6. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **96**, 281 (2012) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **96**, 263 (2012)].
7. А. Н. Бугай, ЭЧАЯ **50**, 185 (2019) [A. N. Bugay, Physics Part. Nucl. **50**, 210 (2019)].
8. M. Melnik , I. Vorontsova , S. Putilin, A. Tcypkin, and S. Kozlov, Sci. Rep. **9**, 9146 (2019).
9. A. N. Tcypkin, M. V. Melnik, M. O. Zhukova, I. O. Vorontsova, S. E. Putilin, S. A. Kozlov, and X.-Ch. Zhang, Opt. Express **27**, 10419 (2019).
10. А. А. Дроздов, С. А. Козлов, Известия РАН. Сер. физическая **86**, 907 (2022) [A. A. Drozdov and S. A. Kozlov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **86**, 760 (2024)].
11. Б. В. Румянцев, А. В. Пушкин, Д. З. Сулейманова, Н. А. Жидовцев, Ф. В. Потемкин, Письма в ЖЭТФ **117**, 571 (2023) [B. V. Rumyantsev, A. V. Pushkin, D. Z. Suleimanova, N. A. Zhidovtsev, and F. V. Ptemkin, JETP Lett. **117**, 566 (2023)].
12. С. Ю. Стремоухов, Известия РАН. Сер. физическая **88**, 941 (2024) [S. Yu. Stremoukhov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **88**, 896 (2024)].
13. А. А. Калинович, С. В. Сазонов, Известия РАН. Сер. физическая **88**, 60 (2024) [A. A. Kalinovich and S. V. Sazonov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **88**, 49 (2024)].
14. А. В. Митрофанов, М. В. Рожко, М. М. Назаров, Н. В. Якушкин, А. А. Воронин, А. Б. Федотов, Д. А. Сидоров-Бирюков, Письма в ЖЭТФ **119**, 166 (2024) [A. V. Mitrofanov, M. V. Rozhko, M. M. Nazarov, N. V. Yakushkina, A. A. Voronina, A. B. Fedotov, and D. A. Sidorov-Biryukov, JETP Lett. **119**, 166 (2024)].
15. Дж. Такер, В. Рэмптон, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, М. (1975) [J. W. Tucker and V. W. Rampton, *Microwave Ultrasonics in Solid State Physics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1972)].
16. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловаров, Б. М. Хабибуллин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, М. (1977).
17. Ф. В. Бункин, Ю. А. Кравцов, Г. А. Ляхов, УФН **149**, 391 (1986) [F. V. Bunkin, Yu. A. Kravtsov, and G. A. Lyakhov, Soviet Phys.-Uspekhi **29**, 607 (1986)].
18. А. П. Абрамов, И. Н. Абрамова, И. Я. Герловин, И. К. Разумова, ФТТ **27**, 18 (1985).
19. С. А. Ахманов, В. Э. Гусев, УФН **162**, 3 (1992) [S. A. Akhmanov and V. E. Gusev, Phys.-Uspekhi **35**, 153 (1992)].
20. В. Э. Гусев, А. А. Карабутов, *Лазерная оптоакустика*, Наука, М. (1991), 304 с.
21. A. A. Kanashov and A. M. Rubenchik, Physica D **4**, 122 (1981).
22. X. Liu, L. J. Qian, and F. W. Wise, Phys. Rev. Lett. **82**, 4631 (1999).
23. X. Liu, K. Beckwitt, and F. Wise, Phys. Rev. E **62**, 1328 (2000).
24. R. Šuminas, G. Tamosauskas, G. Valiulis, and A. Dubietis, Opt. Lett. **41**, 2097 (2016).
25. H. Leblond, D. Kremer, and D. Mihalache, Phys. Rev. A **80**, 053812 (2009).
26. D. Mihalache, D. Mazilu, L.-C. Crasovan, L. Torner, B. A. Malomed, and F. Lederer, Phys. Rev. E **62**, 7340 (2000).
27. P. Y. P. Chen and B. A. Malomed, Opt. Commun. **282**, 3804 (2009).
28. H. Sakaguchi and B. A. Malomed, Opt. Soc. Am. B **29**, 2741 (2012).
29. B. A. Malomed, P. Drummond, H. He, A. Berntson, D. Anderson, and M. Lisak, Phys. Rev. E **56**, 4725 (1997).
30. S. V. Sazonov, M. S. Mamaikin, M. V. Komissarova, and I. G. Zakharova, Phys. Rev. E **96**, 022208 (2017).
31. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **121**, 273 (2025) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **121**, 262 (2025)].
32. N. S. Shiren, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
33. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2270 (1971) [G. A. Denisenko, JETP **33**, 1220 (1971)].
34. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974) [V. V. Samartsev, B. P. Smolyakov, and R. Z. Sharipov, JETP Lett. **20**, 296 (1974)].
35. H.-Y. Hao and H. J. Maris. Phys. Rev. B **64**, 064302 (2001).
36. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **121**, 484 (2025) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **121**, 463 (2025)].
37. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, Квантовая электроника **30**, 1014 (2000) [A. M. Basharov and A. I. Maimistov, Quantum Electron. **30**, 1014 (2000)].
38. А. И. Маймистов, Квантовая электроника **22**, 936 (1995) [A. I. Maimistov, Quantum Electron. **25**, 904 (1995)].
39. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, Оптика и спектроскопия **88**, 428 (2000) [A. M. Basharov and A. I. Maimistov, Opt. Spectrosc. **88**, 380 (2000)].
40. G. D. Watkins and E. R. Feher, Bull. Am. Phys. Soc. (Ser. 2) **7**, 29 (1962).
41. S. V. Sazonov, Laser Phys. Lett. **22**, 025205 (2025).
42. D. Anderson, Phys. Rev. A **27**, 3135 (1983).

43. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, ЖЭТФ **92**, 1612 (1987) [S. K. Zhdanov and B. A. Trubnikov, Sov. Phys. JETP **65**, 904 (1987)].
44. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **125**, 1409 (2004) [S. V. Sazonov, JETP **98**, 1237 (2004)].
45. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Физматлит, М. (2001), 496 с.
46. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН **93**, 19 (1967) [S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov, and R. V. Khokhlov, Sov. Phys.-Uspekhi **10**, 609 (1968)].