Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 2, с. 127 – 133 © 2026 г. 25 января

О правомерности перехода к одномерному описанию для кольцевых поляритонных бозе-конденсатов

К. Д. Дядькин[+*], М. А. Посаженков[+×], Н. С. Воронова[+×1)]

[+]Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ" (Московский инженерно-физический институт), 115409 Москва, Россия

[*]Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

[×]Российский квантовый центр, территория Инновационного центра "Сколково", 121205 Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 октября 2025 г.
После переработки 30 ноября 2025 г.
Принята к публикации 1 декабря 2025 г.

Работа мотивирована активным всплеском исследований кольцевых бозе-конденсатов экситонных поляритонов, в том числе с искусственно созданными дефектами (барьерами). На данный момент аналитически подобные системы в основном описываются в одномерном подходе – с учетом зависимости параметра порядка конденсата только от азимутального угла. В настоящей работе проводится численное моделирование профилей поляритонного кольцевого бозе-конденсата на базе полноценного двумерного уравнения Гросса–Питаевского в стационарном случае. Получены радиальные профили волновой функции основного состояния для удерживающих кольцевых потенциалов разной глубины и ширины, при помощи которых рассчитаны эффективно-одномерные константы взаимодействия для различных плотностей частиц в конденсате. Произведено сравнение с аналитическими выражениями для линейного предела и для случая кольца большого радиуса и определены границы применимости данных упрощенных аналитических описаний.

DOI: 10.7868/S3034576626010171

1. Введение. Экситонные поляритоны – твердотельная система, в которой бозе-конденсация и сверхтекучесть могут наблюдаться вплоть до комнатных температур [1, 2]. Эти квазичастицы образуются в результате сильной связи фотонных мод в микрорезонаторе с электронными возбуждениями в полупроводнике (экситонами) и представляют интерес как для фундаментальных исследований, так и с точки зрения потенциального применения в классических и квантовых информационных технологиях, так как обладают многочисленными степенями свободы и реализуются на различных материальных платформах [3]. В последние несколько лет внимание исследователей привлекли поляритонные бозе-конденсаты в кольцевой геометрии [4]. Так, в работе [5] была предложена реализация поляритонного кубита в кольцевой геометрии с дефектом, что привело к всплеску экспериментальной активности по реализации поляритонных колец и исследованию динамики циркулирующих токов в них [6–9].

Важным свойством параметра порядка кольцевых систем является то, что на фазу θ параметра порядка накладывается условие $\oint \partial_s\theta(r,\phi,t)ds = 2\pi l$, где интегрирование ведется по замкнутому контуру при обходе по кольцу, (r,ϕ) – полярные координаты, а l – топологический заряд, который должен принимать целочисленные значения. С физической точки зрения это означает, что в системе при наличии ненулевого топологического заряда возникает циркулирующий ток. Для наблюдения возникновения тока достаточно небольшого возмущения, и при этом ток в системе сохраняется достаточно долгое время [9]. При этом важно, что стационарные поляритонные токи могут наблюдаться как в условиях большого времени жизни частиц (по сравнению с характерным временем установления стационарного режима в системе), так и в условиях поддержания когерентности за счет внешней постоянной накачки, даже если время формирования токового состояния (в динамическом равновесии) велико. Топологический заряд кольцевых систем является целым числом, причем такие состояния образуют ортогональный базис. В работах [10, 11] изучены способы управления вихрями с топологическими зарядами +1 и −1 на кольце. Предполагается, что внедрение в кольцо дефекта, приводящего к провалу плотности (так называемой

1)e-mail: nsvoronova@mephi.ru

слабой связи), может порождать смешение токов в противоположных направлениях и появлению щели между состояниями с разными циркуляциями [5, 7].

Как упоминалось выше, поляритоны имеют конечное время жизни и их бозе-конденсат образуется в условиях динамического равновесия между накачкой и утечкой частиц. При этом даже в консервативной формулировке без накачки и потерь, когда в приближении среднего поля можно записать стандартное для разреженных бозе-газов уравнение Гросса–Питаевского (УГП) [12]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(r,\phi)\psi + g|\psi|^2\psi = E\psi, \qquad (1)$$

рассмотрение кольцевых поляритонных конденсатов представляет интерес с точки зрения принципиальной возможности переключения между состояниями с различными топологическими зарядами (различными числами намотки фазы l). В уравнении (1) $\psi(r,\phi)$ – волновая функция поляритонного конденсата, m – эффективная масса квазичастиц, $g > 0$ – константа поляритон-поляритонного взаимодействия, $V(r,\phi) = V(r) + V(\phi)$ – внешний потенциал. Нормировка волновой функции происходит на количество частиц в системе: $\int |\psi(r,\phi)|^2 d^2r = N$. Отметим, что ур. (1) хорошо описывает поляритонные системы с жестким стационарным локализующим потенциалом, которые могут быть сформированы вытравливанием образца на стадии изготовления. В случае, если профиль потенциала сформирован резервуаром оптически индуцированных экситонов, для численного моделирования применяют феноменологически модифицированное УГП, описывающее поведение волновой функции конденсата, связанное с кинетическим уравнением для питающей его популяции резервуарных частиц [13]. В этом случае, так как плотность резервуара быстро подстраивается под медленно-эволюционирующий конденсат, резервуарная динамика может быть исключена из уравнений, а модифицированное ур. (1) для поиска стационарных состояний будет содержать формально комплекснозначные потенциал и энергию (см., например, [14]).

Так как из-за наличия нелинейности $g|\psi|^2\psi$ разделение переменных в УГП (1) сделать не удается, стандартным подходом в существующих теоретических работах [15–17], рассматривающих поляритонные кольца в стационарном режиме с целью описания, например, спиновых эффектов, является отбрасывание нелинейности, разделение переменных $\psi(r,\phi) = \chi(r)\Phi(\phi)$ и решение уравнения Шредингера для радиальной волновой функции, после чего исходное уравнение (1) с восстановленной нелинейностью усредняется по радиальной функции основного состояния $\chi_0(r)$. Это приводит к эффективно одномерному уравнению для угловой волновой функции $\Phi(\phi)$ с константой взаимодействия $g_{1\mathrm{D}} = g\int |\chi_0|^4 r dr$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle \Phi'' + V(\phi)\,\Phi + g_{1\mathrm{D}}|\Phi|^2\Phi = \tilde{E}\,\Phi, \qquad (2)$$

где предполагается $\langle\chi_0|\chi_0\rangle = 1$, а условие нормировки на число частиц N накладывается на угловую функцию $\Phi(\phi)$. Зачастую такой переход от полноценного двумерного описания к эффективно-одномерному производится без существенного обоснования правомерности, помимо качественных энергетических соображений. Однако, как можно увидеть из иллюстрации на рис. 1, правомерность такого

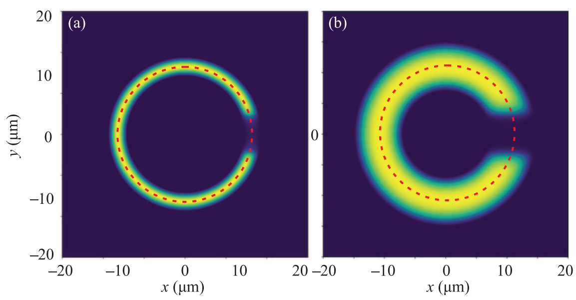

Рис. 1. (Цветной онлайн) Плотность бозе-конденсата $|\psi(r,\phi)|^2$ в основном состоянии в кольцевой геометрии с дефектом, полученная численным моделированием ур. (1) с числом частиц $N = 5\times10^4$, для колец со средним радиусом $R = 11$ мкм (показан красной штриховой линией): (a) – ширина кольца в поперечном направлении $a = 3$ мкм, (b) – $a = 8$ мкм. Высота барьера 100 мэВ, высота дефекта 5 мэВ. Цветовые шкалы отнормированы на максимум отдельно для каждой панели

перехода к одной переменной может сильно зависеть от ширины кольца. На экспериментальных профилях, представленных в работах [8, 17, 18], заметно, что и плотность, и срез фазы параметра порядка по углу могут сильно варьироваться в зависимости от выбранного радиуса.

В связи с вышесказанным, целью настоящей работы является проверка правомерности перехода к одномерному описанию в терминах угла ϕ полярной системы координат в кольцевых системах в различных допускающих аналитическое решение пределах. Для этого проводится сравнение различных аналитических описаний с результатами численного моделирования волновой функции основного состояния УГП (1) в кольцевой геометрии и вычисление энергии взаимодействия частиц для различных ширин колец и средних плотностей конденсата ρ.

2. Аналитические предельные случаи в системах с кольцевой геометрией. Все дальнейшие расчеты будут проводиться для потенциала конечной прямоугольной ямы в радиальном направлении:

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r \in [R_1, R_2] \\ V_0, & r \notin [R_1, R_2] \end{cases}, \tag{3}$$

где $R_{1,2} = R \mp a/2$, a – ширина кольца, R – его средний радиус. Для общности рассмотрены потенциалы разной глубины V_0. Отметим, что в работе [16] для аналитического описания применялся гармонический потенциал $V(r) = A(r-R)^2/2$ в предположении очень узких колец ($R \gg a$), тогда как в более поздней экспериментальной работе [17] использовался потенциал бесконечного прямоугольного ящика.

Для проверки правомерности перехода к одномерному описанию и сравнению с предельными случаями, описываемыми аналитически, будем использовать самый простой и доступный для вычислений случай, а именно основное состояние системы в отсутствие потенциала в азимутальном направлении: $V(\phi) = 0$ (т.е. кольцо без барьера). Вначале рассмотрим пределы, допускающие аналитические решения.

Линейный предел. Рассмотрим потенциал (3) и поставим задачу без взаимодействия:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi^2}\right) + V(r)\psi = E\psi, \tag{4}$$

где $\psi = \chi(r)\Phi(\phi)$. Для основного состояния в отсутствие потенциала в азимутальном направлении имеем $\Phi(\phi) = \text{const}$. Считая, что радиальная волновая функция $\chi(r)$ нормирована на единицу, тогда как угловая часть содержит в себе нормировку на число частиц N, получим $\Phi(\phi) = \sqrt{N/2\pi}$.

Решение радиальной задачи имеет вид:

$$\chi(r) = \begin{cases} I_0(\rho\sqrt{1-\epsilon}), & \text{при } 0 < r \le R_1, \\ B\,J_0(\rho\sqrt{\epsilon}) + C\,Y_0(\rho\sqrt{\epsilon}), & \text{при } R_1 < r \le R_2, \\ D\,K_0(\rho\sqrt{1-\epsilon}), & \text{при } r > R_2, \end{cases} \tag{5}$$

где $\rho = r/r_0$, $r_0 = \sqrt{\hbar^2/2mV_0}$, $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода, $Y_0(x)$ – функция Неймана, $I_0(x)$ – функция Инфельда, $K_0(x)$ – функция Макдональда. Безразмерные энергии $\epsilon = E/V_0$ и константы B, C, D находятся из условий сшивки волновой функции на границах ямы. Общая нормировочная константа находится из условия $\int_0^\infty |\chi(r)|^2 r dr = 1$. В пределе $V_0 \to \infty$ основное состояние системы может быть аппроксимировано элементарными функциями [17]:

$$\chi_0^{\text{inf}}(r) = \sqrt{\frac{2}{aR}}\sin\frac{\pi(r-R_1)}{a}. \tag{6}$$

В работе [16] для очень узких колец, образованных гармоническим потенциалом $A(r-R)^2/2$, использовалась волновая функция основного состояния

$$\chi_0^{\text{harm}}(r) \propto e^{-\sqrt{mA/\hbar^2}(r-R)^2/2}. \tag{7}$$

Аналитическое решение (5), умноженное на $\sqrt{N/2\pi}$, показано на рис. 2 для разных геометрий кольца штриховыми линиями. Далее мы будем называть это решение линейным пределом, верным для разреженного случая. Согласно предположениям работ [15–17], такой предел должен хорошо описывать поведение волновой функции нелинейной задачи в случае узкого кольца, когда величина размерного квантования системы сильно превышает энергетические масштабы взаимодействия. В этом пределе нелинейное слагаемое в уравнении (2) при усреднении по волновой функции дает энергию взаимодействия $g_{1\text{D}}N^2/2\pi$ (эта величина имеет смысл энергии μN, где $\mu \approx g\rho$ – химический потенциал двумерной системы).

Кольцо большого радиуса и нелинейный предел. Другой предел, позволяющий получить аналитическое выражение для радиальной волновой функции, – кольцо большого радиуса. В этом пределе в УГП (1) в предположении отсутствия потенциала в азимутальном направлении волновая функция основного состояния должна быть однородна по углу $\psi(r,\phi) = \psi(r)$, а слагаемым в лапласиане, содержащим $1/r$, можно пренебречь. В результате из задачи полностью пропадает кривизна кольца:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + V(r)\psi(r) + g|\psi(r)|^2\psi(r) = E\psi(r), \tag{8}$$

причем за пределами конфайнмента система находится в линейном режиме даже в случае значительного числа частиц.

Уравнение (8) подстановкой $\psi(r) = \sqrt{\rho_0}f(r)$, $f(r) \le 1$, при $R_1 \le r \le R_2$ можно свести к уравнению вида

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1+y)(1+k^2y^2) \tag{9}$$

с $k^2 = 1/(2E/g\rho_0 - 1)$, решением которого является эллиптическая функция Якоби $\text{sn}(x,k)$:

$$\psi(r) = \sqrt{\rho_0}\,\text{sn}\left(\frac{r+\delta}{\xi}\sqrt{1-\frac{g\rho_0}{2E}}, \sqrt{\frac{1}{2E/g\rho_0-1}}\right), \tag{10}$$

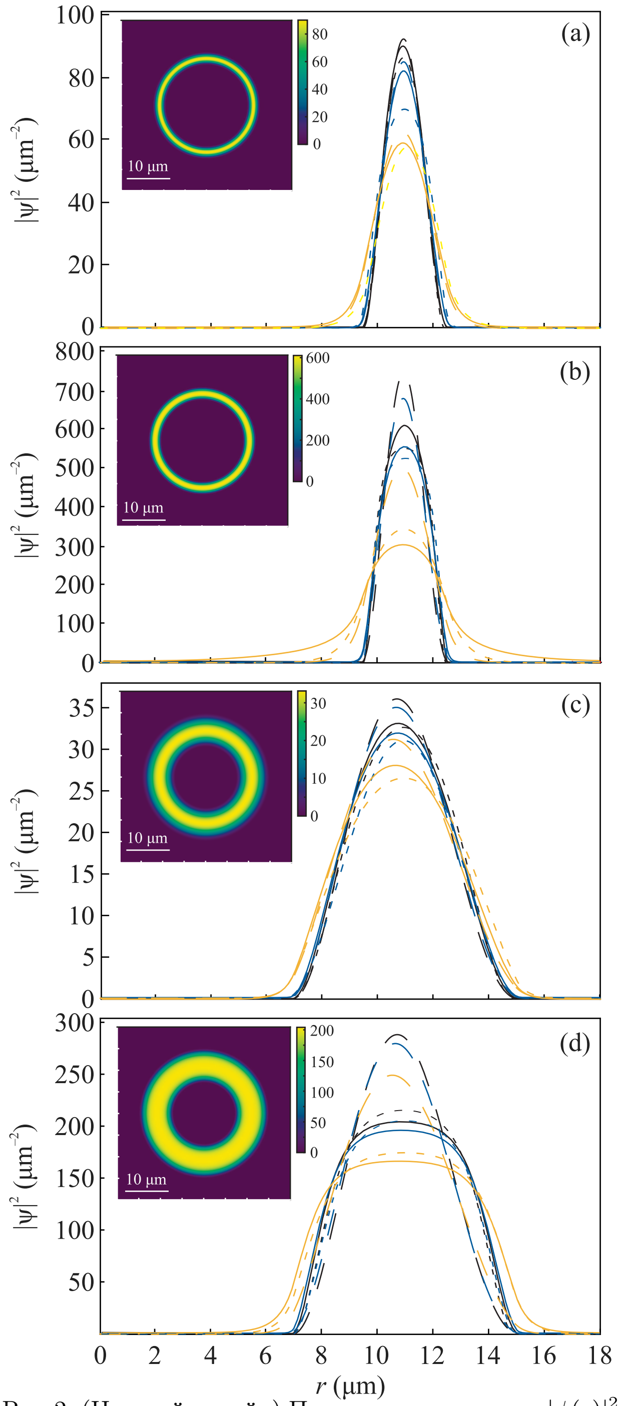

Рис. 2. (Цветной онлайн) Плотность конденсата $|\psi(r)|^2$ в основном состоянии для различных V_0: 100 (черный), 10 (синий), 0.8 мэВ (желтый) при (a), (b) – $a = 3$ мкм, (c), (d) – $a = 8$ мкм. Сплошные линии: результат численного моделирования ур. (1), штриховые: аналитический линейный предел (5), пунктирные: аналитический предел кольца большого радиуса (10). Средняя плотность частиц: (a) – 50; (b) – 400; (d) – 15; (c) – 150 мкм$^{-2}$. На вставках показан результат 2D-численного моделирования при $V_0 = 100$ мэВ

где ρ_0 – плотность частиц в максимуме, длина залечивания $\xi = \sqrt{\hbar^2/2mE}$, а константа δ и энергия E, играющая роль химического потенциала, находятся из условий сшивки на границах ямы (3) с затухающими решениями $\propto \exp\{\pm\sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}r\}$, с учетом нормировки на число частиц N при интегрировании по двумерному пространству.

Решения (10) показаны на рис. 2 пунктирными линиями. В случае усреднения уравнения (8) по волновой функции основного состояния будем получать энергию взаимодействия, равную $g\int|\psi(r)|^4 2\pi r dr$.

Отметим также, что при рассмотрении гармонической ловушки для очень узких колец ($R \gg a$) для аналитического описания сильно-нелинейного предела допустимо приближение Томаса–Ферми:

$$|\psi_{\mathrm{TF}}^{\mathrm{harm}}(r)|^2 = \frac{1}{g}\left[\mu - \frac{A(r-R)^2}{2}\right], \qquad (11)$$

где μ определяется из условия нормировки на число частиц N. Это приближение является заведомо более грубым, чем аналитическое решение ур. (8), которое верно для любых ширин кольца и нелинейностей в случае, если радиус кольца достаточно велик.

3. Численный расчет энергии взаимодействия в кольцевом бозе-конденсате. Теперь перейдем к точному расчету волновой функции основного состояния уравнения (1) и соответствующей ей эффективной энергии взаимодействия.

Моделирование проводилось на базе метода мнимого времени в предположении, что потенциал в азимутальном направлении отсутствует, т.е. в основном состоянии волновая функция однородна по углу: $\psi_{\mathrm{gr}}(r,\phi) = \psi(r)$, а нормировка подразумевает интегрирование по r и ϕ. С учетом данных соображений энергия взаимодействия при усреднении УГП (1) по функции $\psi(r)$ имеет вид

$$g\int|\psi(r)|^4 r dr d\phi = g\int|\psi(x,y)|^4 dxdy \qquad (12)$$

с численно найденной двумерной волновой функцией основного состояния $\psi(x,y)$. Расчет энергии взаимодействия (12) для сравнения с аналитическими пределами производился методом Симпсона. Мера сходимости метода мнимого времени была выбрана в виде $|E_{t_{n-1}} - E_{t_n}| < \varepsilon$, где E_{t_i} – энергия на i-м шаге, ε – ошибка метода, которая стремится к 0 с увеличением числа итераций.

Все расчеты проводились для константы поляритон-поляритонного взаимодействия $g = 2.5$ мкэВ мкм^2 и эффективной поляритонной массы $m = 9.2 \times 10^{-5} m_e$ (где m_e – масса свободного электрона). С целью охвата типичных глубин экспериментально реализуемых поляритонных ловушек, высота конечного барьера V_0 варьировалась от 0.8 мэВ (слабое удержание) до 100 мэВ (жесткий кольцевой конфайнмент, соответствующий вытравленному потенциалу). Для расчета энергии взаимодействия в различных пределах были рассмотрены два случая, а именно случаи узкого и широкого колец. Средний радиус в обоих случаях брался равным $R = 11$ мкм. Для случая узкого кольца ширина кольца $a = 3$ мкм (см. рис. 1a), т.е. мы имеем дело с ситуацией $a \ll R$, для которой в случае большого числа частиц может быть применено приближение (11). Во втором случае для широкого кольца ($a = 8$ мкм, см. рис. 1b) имеем $a \sim R$. Также варьировалась средняя плотность поляритонов. При изменении числа частиц в системе N, используемого в условии нормировки волновой функции, были реализованы как разреженный, так и плотный режимы: для узкого кольца ρ менялось в пределах от 50 до 400 мкм$^{-2}$, для широкого – от 15 до 150 мкм$^{-2}$.

Графики радиальных срезов волновой функции для узкого и широкого колец, полученные методом мнимого времени, приведены на рис. 2. Как можно видеть, для всех рассмотренных геометрий аналитическое решение (10) в приближении кольца большого радиуса, включая случай широкого кольца (рис. 2c–d), показывает лучшее совпадение с численным решением по сравнению с линейным пределом, в особенности для больших глубин потенциала V_0 ($\sim 10-100$ мэВ). Как видно из рис. 2, выбор линейного предела (6) в качестве аппроксимации радиальной волновой функции оправдан только в случае узких колец и малого числа частиц (рис. 2a), тогда как во всех остальных конфигурациях решение в линейном пределе сильно отличается от численного решения. Предел (10) при рассмотрении широких и неглубоких удерживающих потенциалов, в силу пренебрежения кривизной кольца, обнаруживает смещение профиля волновой функции от центра кольца (профиль симметричен относительно среднего радиуса R) по сравнению с точным решением и аналитическим решением в линейном пределе.

Наконец, был произведен расчет средней энергии взаимодействия (в пересчете на одну частицу) в основном состоянии на кольце без барьера в зависимости от плотности частиц. Результаты, рассчитанные для аналитического линейного предела (5), предела кольца большого радиуса (10) и посредством численного моделирования по формуле (12), показаны на рис. 3a для узкого и рис. 3b для широкого колец. Видно, что в обоих случаях энергия взаимодействия на частицу, рассчитанная усреднением по радиальной волновой функции линейной задачи (штриховые линии разных цветов отвечают различным V_0), с увеличением плотности начинает давать сильно завышенные результаты. Для узкого кольца (см. рис. 3a) также показаны результаты расчета при помощи аппроксимации (6) (для бесконечной ямы), а также аналитических решений в линейном (7) и сильно нелинейном (11) пределах для гармонической ловушки. Можно сделать вывод, что аналитические описания, применяемые на настоящий момент в литературе, посвященной поляритонным кольцевым конденсатам, могут считаться верными для узких колец лишь для малых плотностей $\rho \lesssim 100$ мкм$^{-2}$,

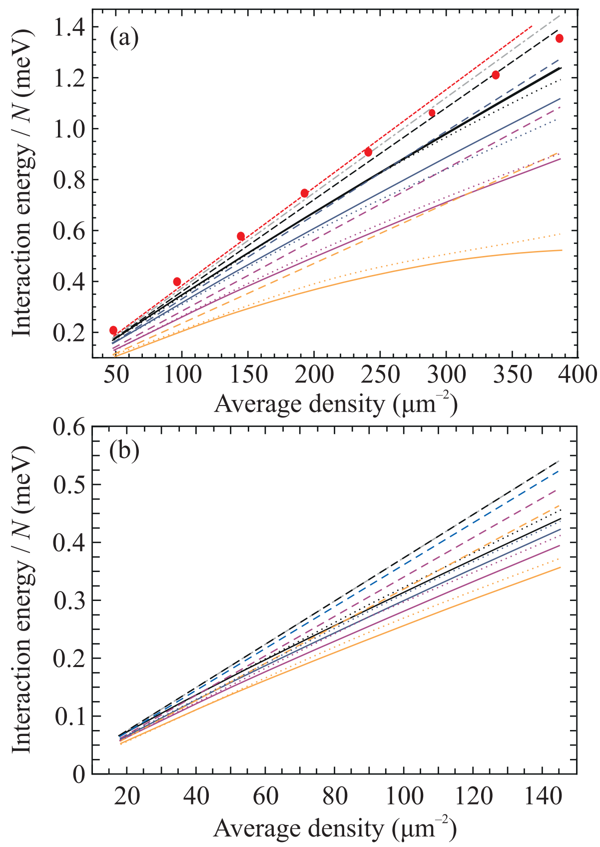

Рис. 3. (Цветной онлайн) График зависимости энергии взаимодействия (на одну частицу) от плотности частиц в системе (a) – для узкого, (b) – для широкого кольца для различных глубин конфайнмента V_0: 100 мэВ (черный цвет), 10 мэВ (синий), 2 мэВ (фиолетовый), 0.8 мэВ (желтый). Штриховые линии показывают расчет в линейном пределе с волновой функцией (5), пунктирные – в пределе кольца большого радиуса (10), сплошные линии – численный расчет. На панели (a) для сравнения показаны результаты расчета с волновыми функциями (6) (серый штрих-пунктир), (7) (красный пунктир) и (11) (красные кружки)

тогда как для широких колец оказываются неверными вовсе. В том числе, при уменьшении глубины конфайнмента они оказываются неверными даже в ультра-разреженном режиме $\rho \sim 10$ мкм$^{-2}$ (см. желтые линии на рис. 3). Также можно заметить, что значения энергии взаимодействия, рассчитанные аналитически в пределе кольца большого радиуса (10) (пунктирные линии разных цветов на рис. 3) во всем диапазоне рассматриваемых плотностей хорошо описывают поведение энергии взаимодействия, полученной численно, даже для случая широкого кольца $R \sim a$. При этом для жестких конфайнментов, отвечающих вытравленным ловушкам, расчет с волновой функцией (10) незначительно занижает значения энергии взаимодействия, а с уменьшением глубины конфайнмента, когда V_0 имеет порядок единиц или долей мэВ, результат расчета при помощи аппроксимации (10) начинает завышать значения эффективного взаимодействия. Отметим также, что с понижением V_0 и в численном расчете, и в расчете с волновой функцией (10), зависимость энергии взаимодействия от плотности частиц демонстрирует заметное отклонение от линейной.

4. Заключение. В работе проводилось аналитическое и численное решение стационарного уравнения Гросса–Питаевского для кольцевых поляритонных конденсатов с целью исследовать правомерность используемого в современной литературе способа перехода от двумерного описания к одномерному для кольцевых систем экситонных поляритонов методом временного исключения из УГП нелинейности с последующим разделением переменных, а также поиска наиболее релевантных конфигураций радиальной волновой функции с учетом нелинейности задачи. Для конфигурации с удерживающим кольцевым потенциалом (как жестким, релевантным для вытравленных колец, так и для ловушек небольшой глубины) было проведено сравнение радиальных профилей плотности конденсата в основном состоянии на кольце без барьера с исключением нелинейности (линейный предел), а также в аналитическом пределе кольца большого радиуса с профилями, полученными в результате численного моделирования. При помощи полученных волновых функций производился расчет средней энергии взаимодействия конденсата в основном состоянии. Было показано, что вопреки имеющемуся в литературе утверждению о применимости линейного приближения для перехода от 2D-описания к одномерной задаче в терминах угла ϕ для узких колец с жестким конфайнментом, данное приближение достоверно работает для узких колец лишь в случае очень низких плотностей и глубоких конфайнментов, а для широких колец и для удерживающих потенциалов небольшой глубины оказывается применимым только при плотностях меньше или порядка десяти поляритонов на квадратный микрон. Можно предположить, что в случае более сложных конфигураций (в том числе, при добавлении на кольцо барьера, что приводит к неоднородности по углу), линейное приближение будет совершенно неприменимо. С другой стороны, было показано, что аналитический предел кольца большого радиуса обеспечивает хорошее совпадение с результатами численного моделирования для всех рассмотренных геометрий, демонстрируя отклонение в сторону завышения энергии взаимодействия при уменьшении глубины удерживающего потенциала.

Интересно, что для менее глубоких кольцевых конфайнментов, характерных для оптической схемы создания ловушек, энергия взаимодействия частиц с ростом плотности не может быть аппроксимирована линейным законом $\propto g\rho$, так как за счет проникновения волновой функции под невысокий барьер средняя плотность частиц на кольце начинает заметно отличаться от полной плотности частиц. Отдельно отметим, что при учете утечки и накачки частиц через экситонный резервуар, приводящих при рассмотрении задачи о стационарных состояниях конденсата к УГП с неэрмитовым потенциалом (см., например, работу [14]), исключение нелинейности в радиальной задаче приведет к еще большему отклонению профилей радиальной волновой функции от реальных. Рассмотрение задачи с неэрмитовыми потенциалами выходит за рамки данной работы.

Авторы благодарны А. М. Грудининой за обсуждения.

Финансирование работы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда # 24-22-00426, https://rscf.ru/project/24-22-00426/.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymańska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and Le Si Dang, “Bose-Einstein condensation of exciton polaritons”, Nature **443** (7110), 409 (2006).
2. I. Carusotto and C. Ciuti, “Quantum fluids of light”, Rev. Mod. Phys. **85**, 299 (2013).
3. A. V. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Malpuech, and F. P. Laussy, *Microcavities* (Oxford University Press, Oxford, 2017).

4. A. Kavokin, T. C. Liew, C. Schneider, P. G. Lagoudakis, S. Klembt, and S. Höfling, "Polariton condensates for classical and quantum computing", Nat. Rev. Phys. **4**(7), 435 (2022).
5. Y. Xue, I. Chestnov, E. Sedov, E. Kiktenko, A. K. Fedorov, S. Schumacher, X. Ma, and A. Kavokin, "Split-ring polariton condensates as macroscopic two-level quantum systems", Phys. Rev. Research **3**(1), 013099 (2021).
6. J. Barrat, R. Cherbunin, E. Sedov, E. Aladinskaia, A. Liubomirov, V. Litvyak, M. Petrov, X. Zhou, Z. Hatzopoulos, A. Kavokin, and P. G. Savvidis, "Stochastic circular persistent currents of exciton polaritons", Sci. Rep. **14**(1), 12953 (2024).
7. J. Barrat, A. F. Tzortzakakis, M. Niu, X. Zhou, G. G. Paschos, D. Petrosyan, and P. G. Savvidis, "Qubit analog with polariton superfluid in an annular trap", Sci. Adv. **10**, eado4042 (2024).
8. N. Voronova, A. Grudinina, R. Panico, D. Trypogeorgos, M. De Giorgi, K. Baldwin, L. Pfeiffer, D. Sanvitto, and D. Ballarini, "Exciton-polariton ring Josephson junction", Nat. Commun. **16**, 466 (2025).
9. Q. Yao, P. Comaron, H. Alnatah, J. Beaumariage, S. Mukherjee, K. West, L. Pfeiffer, K. Baldwin, M. Szymańska, and D. W. Snoke, "Persistent, controllable circulation of a polariton ring condensate", Optica **12**, 991 (2025).
10. B. Berger, D. Schmidt, X. Ma, S. Schumacher, C. Schneider, S. Höfling, and M. Aßmann, "Formation dynamics of exciton-polariton vortices created by nonresonant annular pumping", Phys. Rev. B **101**(24), 245309 (2020).
11. X. Ma, B. Berger, M. Aßmann, R. Driben, T. Meier, C. Schneider, S. Höfling, and S. Schumacher, "Realization of all-optical vortex switching in exciton-polariton condensates", Nat. Commun. **11**(1), 897 (2020).
12. L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein condensation and superfluidity* (Oxford University Press, Oxford, 2016).
13. M. Wouters and I. Carusotto, "Excitations in a Nonequilibrium Bose- Einstein Condensate of Exciton Polaritons", Phys. Rev. Lett. **99**, 140402 (2007).
14. A. K. Bochin, A. V. Nalitov, "Nonequilibrium polariton condensation in biannular optically induced traps", Opt. Mater. Expr. **13**(2), 295 (2023).
15. D. R. Gulevich, D. V. Skryabin, A. P. Alodjants, and I. A. Shelykh, "Topological spin Meissner effect in spinor exciton-polariton condensate: Constant amplitude solutions, half-vortices, and symmetry breaking", Phys. Rev. B **94**, 115407 (2016).
16. V. Kozin, I. Shelykh, A. Nalitov, and I. Iorsh, "Topological metamaterials based on polariton rings", Phys. Rev. B **98**, 125115 (2018).
17. S. Mukherjee, V. K. Kozin, A. V. Nalitov, I. A. Shelykh, Z. Sun, D. M. Myers, B. Ozden, J. Beaumariage, M. Steger, L. N. Pfeiffer, K. West, and D. W. Snoke, "Dynamics of spin polarization in tilted polariton rings", Phys. Rev. B **103**, 165306 (2021).
18. E. Sedov, V. Lukoshkin, V. Kalevich, Z. Hatzopoulos, P. Savvidis, and A. Kavokin, "Persistent Currents in Half-Moon Polariton Condensates", ACS Photon. **7**, 1163 (2020).