Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 4, с. 249 – 256 © 2026 г. 25 февраля

Влияние фокусировки и чирпа фемтосекундного лазерного излучения на параметры спектрально-выделенной рамановской компоненты при филаментации в воздухе

Д. В. Пушкарев[+], *Д. С. Урюпина*[+1)], *Е. В. Митина*[+], *Р. В. Волков*[+], *А. А. Коновко*[+], *А. Б. Савельев*[+*]

[+]*Физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия*

[*]*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 8 декабря 2025 г.
После переработки 18 декабря 2025 г.
Принята к публикации 22 декабря 2025 г.

Экспериментально исследованы особенности формирования уединенной рамановской компоненты, возникающей при фемтосекундной филаментации импульса ближнего инфракрасного диапазона в воздухе. Детальное внимание уделено влиянию чирпа лазерного импульса и условиям его фокусировки. Обнаружено качественное изменение частотно-угловых спектров при изменении величины и знака чирпа лазерного импульса. Установлено, что оптимальная конверсия энергии лазерного излучения в рамановскую компоненту, около 25 %, достигается для слабо сфокусированного лазерного пучка (числовая апертура NA = 0.002) и при небольшом отрицательном чирпе.

DOI: 10.31857/S0370274X26020144

1. Введение. Явление филаментации мощного фемтосекундного лазерного импульса в газах сопровождается значительным уширением спектра излучения как в коротковолновую, так и в длинноволновую области [1, 2]. Это открывает возможности для удаленной спектральной диагностики, а также для создания источников когерентного излучения с перестраиваемой длиной волны [3–6]. При этом различные спектральные компоненты распространяются в пространстве под разными углами. Это связано как с особенностями их генерации, так и с влиянием среды в процессе дальнейшего распространения. Значительную роль в формировании спектра играют фазовая самомодуляция, трансформация временной формы импульса, уширение спектра в плазме, влияние инерционного отклика молекул [1, 2, 7]. В инертных газах процессы спектрально-временной трансформации импульса открывают возможность получения ультракоротких импульсов длительностью до нескольких фемтосекунд [8–10].

В молекулярных газах возможно формирование рамановских спектральных компонент, локализованных по спектру и во времени [11, 12]. Данный эффект представляет значительный интерес, так как наблюдается заметная перекачка энергии лазерного излучения в инфракрасную (ИК) область, при этом центральная длина волны рамановской компоненты испытывает сдвиг в длинноволновую сторону с расстоянием и распространяется в приосевой области [11, 13], формируя таким образом "световую пулю". Вместе с тем, аналогия такой пули с рамановским солитоном в оптических волокнах [14] сомнительна, поскольку в ближней ИК области спектра дисперсия среды нормальная. Известные из литературы модели световой рамановской пули в филаменте не дают удовлетворительного описания эффекта [12, 15], поэтому необходимы дополнительные экспериментальные данные об особенностях формирования пули. Кроме того, важным является вопрос об управлении параметрами рамановской пули для получения желаемых характеристик (спектральных, энергетических) в заданной области пространства.

В настоящей работе приведены результаты экспериментальных исследований одноимпульсных частотно-угловых спектров лазерного импульса после филаментации в воздухе при различной фокусировке и чирпе. Особое внимание уделено параметрам уединенного рамановского максимума, ассоциируемого с формированием световой пули. Полученные данные позволяют проследить влияние концентрации плазмы, длины нелинейного взаимодействия, изменения скорости ионизации за счет разворота спектральных компонент лазерного импульса на эффективность генерации рамановской компоненты [16, 17]. Важными также являются вопросы пространственной расходимости отдельных

[1)]e-mail: dasha_uryupina@mail.ru

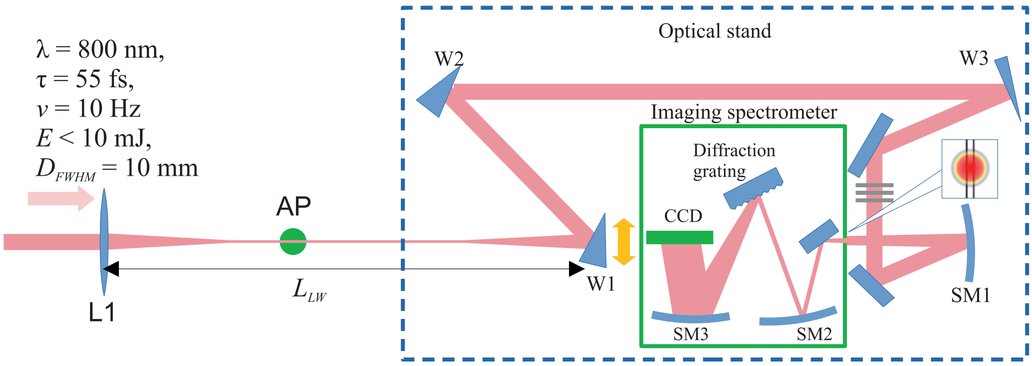

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема экспериментальной установки. L1 – линза, фокусирующая излучение; W1, W2, W3 – клинья; AP – акустический детектор; SM1, SM2, SM3 – сферические зеркала; CCD – ПЗС камера

спектральных компонент и взаимодействия между различными частотными компонентами.

2. Экспериментальная установка. Наиболее полный ответ на поставленные вопросы дает измерение частотно-угловых спектров (ЧУС) излучения [18, 19]. Данный метод позволяет сделать выводы об энергетических и угловых соотношениях между различными спектральными компонентами [20], дисперсионных свойствах среды, в которой распространяется импульс [21–23], оценить степень расходимости излучения.

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Лазерное излучение Ti:Sa системы с центральной длиной волны $\lambda = 810$ нм, длительностью спектрально ограниченного импульса $\tau = 55$ фс, частотой следования $\nu = 10$ Гц и энергией до 20 мДж проходило по вакуумной системе и попадало на атмосферную трассу длиной 48 м. Диаметр пучка по полувысоте составлял 10 мм.

В начале трассы устанавливалась линза (L1 на рис. 1) для создания филамента в условиях дополнительной фокусировки. Использовались линзы с фокусными расстояниями $F_{L1} = 2.67$ м, 4 м, 6 м, 10 м. Энергия лазерного импульса для каждой фокусировки подбиралась так, чтобы наблюдался полностью сформировавшийся одиночный филамент с развившейся конической эмиссией, и составляла, в среднем, 3–4 мДж. Длительность лазерного импульса варьировалась его чирпированием с помощью изменения расстояния между решетками оптического компрессора. Энергия импульса при этом оставалась фиксированной.

Для регистрации ЧУС импульса после филаментации в воздухе была собрана мобильная оптическая схема, позволяющая в одном лазерном импульсе регистрировать участок спектра излучения протяженностью 250 нм (680–930 нм). Оптическая схема располагалась за филаментом на расстоянии L_{LW} от линзы L1. Это расстояние выбиралось как минимальное расстояние, на котором лазерное излучение уже не повреждает поверхность первого клина (W1). Для фокусных расстояний $F_{L1} = 2.67$ м, 4 м, 6 м, 10 м это расстояние соответственно составляло $L_{LW} = 5.55$, 7.03, 9.15, 12.25 м.

Излучение филамента отражалось первым кварцевым клином (W1) на второй кварцевый клин (W2). После отражения от двух клиньев интенсивность излучения уменьшалась примерно на 3 порядка, что позволяло избежать повреждения оптики и регистрирующих приборов, расположенных далее в оптическом тракте. Отраженное от клиньев W2 и W3 излучение, проходя через систему зеркал и оптические фильтры, фокусировалось на щели изображающего спектрометра Solar M150i с помощью сферического зеркала SM1. При этом в плоскости щели спектрометра формировался пространственный Фурье-образ падающего пучка. Пропущенный щелью срез излучения по углам раскладывался в спектр и переносился на ПЗС-камеру (TheImagingSource 33gx249). Таким образом, на ПЗС-матрице формировалось изображение, вдоль одной оси которого изменялись длины волн, а вдоль другой – углы, под которыми компоненты излучения с этими длинами волн распространялись.

Для определения параметров филамента параллельно с измерениями ЧУС излучения проводились акустические измерения (AP на рис. 1). Разработанный нами метод позволяет разрешить поперечную пространственную структуру множественного филамента и оценить размер и плотность поглощенной энергии в филаменте [24]. Пьезоприемник на основе пленки PVDF с шириной полосы приема до 10 МГц ставился вблизи филамента на расстоянии 2–5 мм. Диаметр рабочей области пьезоприемника был равен

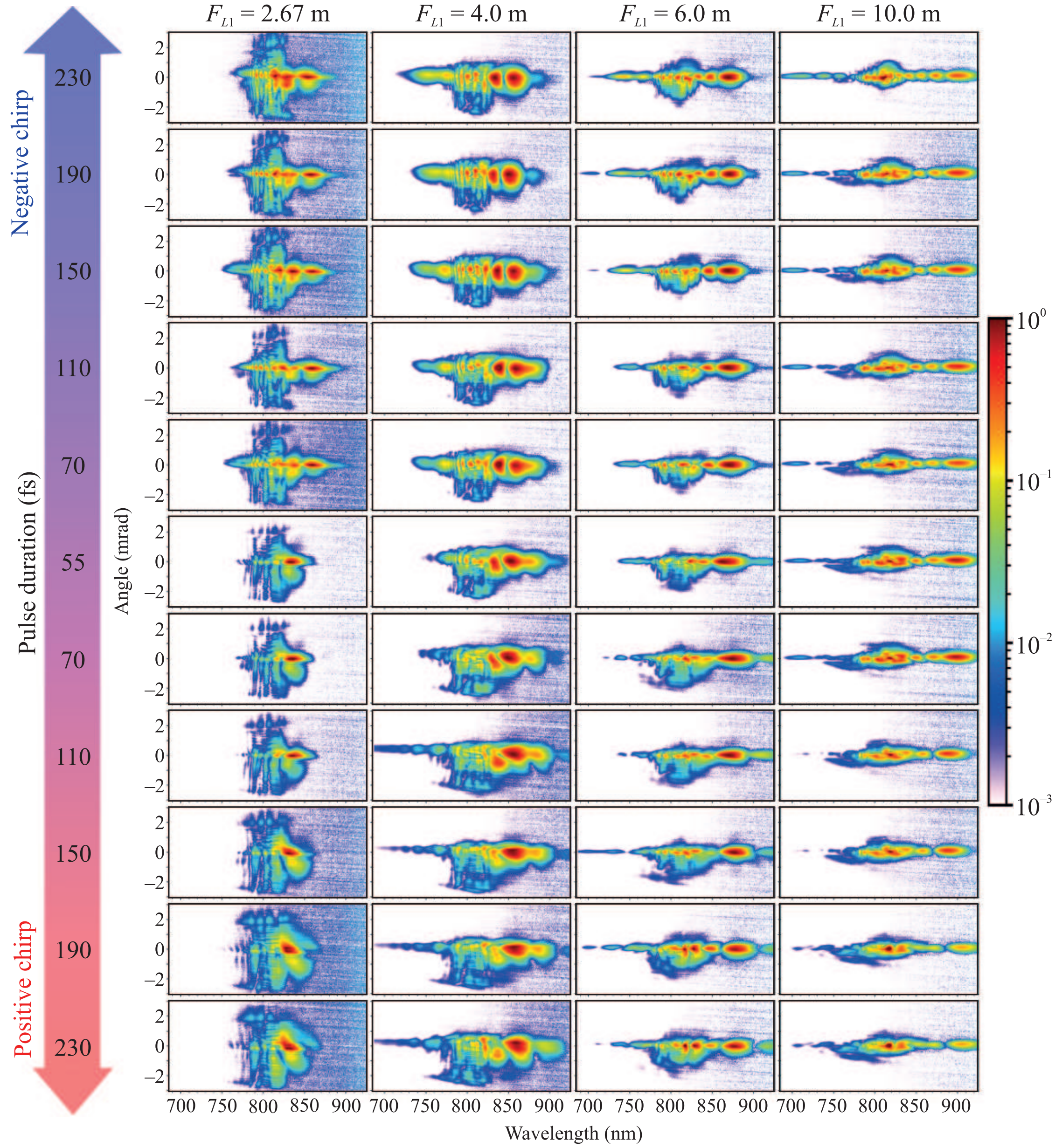

Рис. 2. (Цветной онлайн) ЧУС излучения, полученные при разной длительности импульса (достигаемой за счет его чирпирования) в различных условиях фокусировки

6 мм. Сигнал с акустического детектора подавался на вход высокоскоростного двухканального аналого-цифрового преобразователя (ЛА-н1USB, 8 бит, максимальная частота дискретизации 1 ГГц, произведено ООО "Руднев–Шиляев"). По величине амплитуды и ширины пиков оценивались диаметр теплового источника, объемная и линейная плотности энергии, поглощенной плазмой филамента.

3. Результаты эксперимента. На рисунке 2 представлены ЧУС излучения, зарегистрированные при различных условиях фокусировки и для различных значений чирпа лазерного импульса. По горизонтали отложено фокусное расстояние линзы L1, а по вертикали – длительность лазерного импульса в начале экспериментальной трассы непосредственно перед фокусирующей линзой L1.

Для режимов распространения с различными фокусными расстояниями, при отрицательных чирпах (см. рис. 2, верхние строки) справедлива динамика обогащения спектра локальными максимумами как в синей, так и в красной части спектра, однако доля энергии, содержащаяся в красных компонентах, значительно выше. Такой вид спектра хорошо согласуется со спектром, наблюдаемым при распространении лазерного импульса в условиях задержанного керровского отклика [7]. При смещении в сторону положительного чирпа (см. рис. 2, нижние строки) при всех фокусных расстояниях происходит заметное изменение ЧУС. Многопиковая структура в красной области спектра становится менее выраженной, и формируется уединенный яркий максимум, несущий значительную долю общей энергии импульса. С уменьшением фокусного расстояния данное изменение в спектре становится более резким. Спектрально-выделенная рамановская компонента наиболее ярко проявляется на ЧУС, полученных при фокусировке линзами с фокусным расстоянием 4 и 6 м. Ранее работе [11] появление данной спектральной компоненты было связано с образованием рамановской пули. Было показано, что эта компонента распространяется по оси импульса, сохраняет свою длительность и испытывает постепенный сдвиг по частоте в ИК область.

Объяснение наблюдаемому эффекту качественного изменения вида ЧУС при переходе от отрицательного чирпа к положительному можно дать, принимая во внимание взаимодействие излучения с плазмой. При нулевом и положительном чирпах излучение с бóльшими длинами волн распространяется на переднем фронте импульса и почти не взаимодействует с плазмой. Одновременно с этим генерация рамановских компонент при комбинационном рассеянии может происходить эффективно. Напротив, при отрицательных чирпах длинноволновая часть лазерного импульса испытывает влияние плазмы, созданной предшествующими (состоящими из коротковолновых компонент) слоями импульса. С уменьшением фокусного расстояния ($F_{L1} = 2.67$ и 4 м) концентрация плазмы возрастает (см. рис. 3), что приводит к более резким, скачкообразным изменениям при переходе от положительного к отрицательному чирпу.

Эффект укорочения импульса за счет дисперсии среды в наших экспериментальных условиях не оказывает заметного влияния. В самом деле, дисперсия групповых скоростей для воздуха составляет порядка ~ 20 фс^2/м [25]. Соответственно, вносимый ею чирп составлял около 200 фс^2 для $F_{L1} = 10$ м, и был еще меньше для меньших фокусных расстояний. Чирп исходного импульса, вносимый компрессором лазерной системы, значительно превосходил это значение. Также на рис. 2 видно, что наиболее резкие качественные изменения при переходе от положительного к отрицательному чирпу наблюдаются

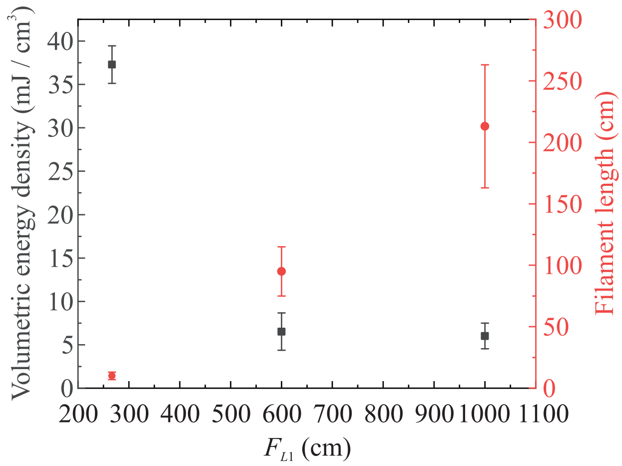

Рис. 3. (Цветной онлайн) Результаты акустического исследования филаментов. По левой оси черными квадратами представлена объемная плотность поглощенной энергии (связана с концентрацией электронов в плазме филамента), по правой оси красными кругами – длина плазменного канала филамента. Зависимости получены для нулевого чирпа лазерного импульса

при $F_{L1} = 2.67$ м, для которого влияние дисперсии воздуха минимально.

Угловая расходимость излучения вблизи несущей длины волны (~ 810 нм) соответствует разбросу угловых векторов, задаваемых фокусирующей линзой, и составляет примерно 3.7, 2.5, 1.6 и 1 мрад для используемых линз. В то же время угловая ширина рамановской компоненты на всех ЧУС ýже угловой расходимости остальной части спектра, и в случае мягкой фокусировки (от 4 до 10 м) уменьшается с увеличением фокусного расстояния линзы. При более жесткой фокусировке ($F = 2.67$ м, $\mathrm{NA} = 0.004$) наблюдается еще меньшая угловая расходимость рамановской компоненты. Отметим, что в диапазоне числовых апертур от 0.003 до 0.005 происходит переход от режима нелинейного схлопывания излучения к режиму с преобладающей геометрической фокусировкой [26, 27]. В данном случае наблюдается заметное повышение пиковой интенсивности излучения и концентрации электронов в плазме, а также укорочение длины филамента (см. данные, полученные на основе акустических измерений, на рис. 3). Объяснение зарегистрированного нами уменьшения угловой расходимости рамановских компонент при острых фокусировках требует разработки полной теоретической модели их формирования.

На рисунке 4а представлены зависимости положения спектрального максимума рамановской компоненты от чирпа при разных фокусировках. Видно, что при всех значениях чирпа максимальный сдвиг

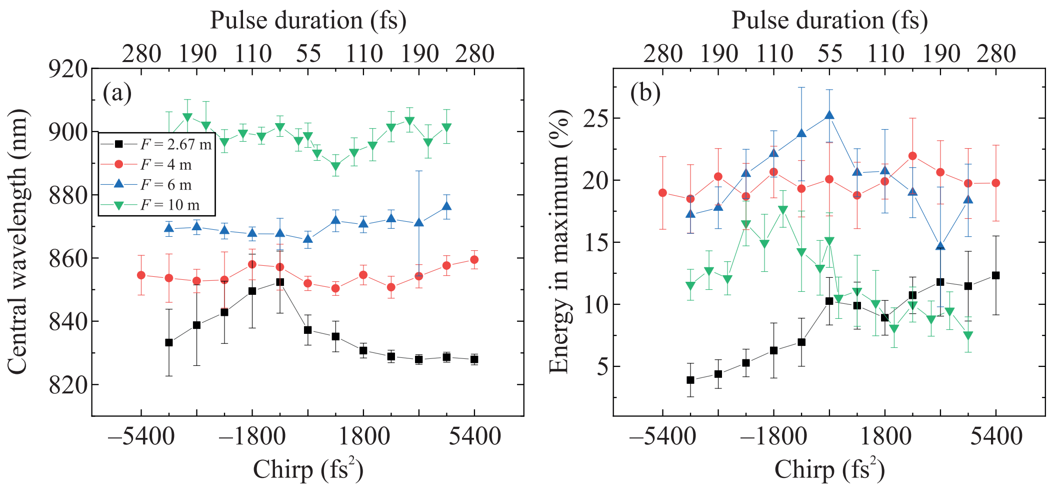

Рис. 4. (Цветной онлайн) (a) – Значение центральной длины волны спектрально-выделенной рамановской компоненты в зависимости от чирпа лазерного импульса; (b) – доля энергии, содержащаяся в рамановской компоненте, в зависимости от чирпа лазерного импульса

центральной длины волны этой компоненты достигается при наиболее мягкой фокусировке ($F_{L1} = 10$ м), т.е. при наибольшей длине филамента. Максимум при отрицательных чирпах при фокусировке линзой с фокусным расстоянием 2.67 м может быть связан с плавным повышением пиковой мощности импульса и удлинением плазменного канала филамента при уменьшении длительности импульса. При этом при приближении к нулевому чирпу происходит "переключение" режима взаимодействия за счет изменения порядка следования спектральных компонент, а эффективная длина формирования рамановской компоненты уменьшается за счет дифракции излучения на плазме. При использовании линз с бóльшим фокусным расстоянием относительные изменения центральной длины волны ИК максимума за счет изменения чирпа оказываются не столь значительными.

На рисунке 4b представлена зависимость доли энергии лазерного импульса в ИК максимуме в зависимости от чирпа при разных фокусировках. Эта величина оценивалась как отношение интеграла по области ЧУС, занимаемой этим максимумом (выделялась по уровню $1/e^2$ от амплитуды максимума), к интегралу по всему спектру. Оба интеграла вычислялись в предположении аксиальной симметрии излучения после одиночного филамента (спектральная плотность энергии домножалась на расстояние до оси ЧУС). Для каждого значения чирпа и фокусного расстояния обрабатывалась выборка из ~50 ЧУС. Максимальная конверсия в этот максимум (25 %) наблюдается в случае линзы с фокусным расстоянием 6 м при небольшом отрицательном чирпе. При более мягкой фокусировке линзой $F_{L1} = 10$ м и при более жесткой фокусировке линзой $F_{L1} = 2.67$ м конверсия значительно уменьшается, что говорит о существовании оптимальной фокусировки для формирования рамановской пули.

4. Обсуждение результатов. Спектральные особенности, связанные с генерацией рамановской пули, наблюдались в ранних работах по фемтосекундной лазерной филаментации [28, 29]. Было показано [28], что изменения в спектре обусловлены рамановскими переходами на вращательных уровнях молекул азота и кислорода. Позже были предприняты попытки объяснить наблюдаемые спектральные особенности в численном моделировании. Авторы работы [30] на основе решения трехмерного нелинейного уравнения в приближении огибающей лазерного импульса с учетом дифракции, дисперсии групповых скоростей, керровской нелинейности, вынужденного комбинационного рассеяния и ионизации провели подробное исследование влияния длительности лазерного импульса на процесс формирования филамента и спектр формирующегося излучения. Было показано снижение эффективности генерации рамановской компоненты как при увеличении длительности импульса, так и при уменьшении. В случае длинных импульсов спектральной ширины импульса не хватает для возбуждения вращательных переходов молекул. При длительности импульса менее нескольких пикосекунд время взаимодействия оказывается короче времени возбуждения вращательных переходов в молекулах [30]. В работе [11] впервые экспериментально было показано, что временная огибающая рамановской компоненты может поддерживать свою форму при распространении. Подобное поведение характерно для распространения рамановского солитона. Данный эффект хорошо изучен в волокнах и используется в волоконно-оптических линиях связи для устойчивой передачи сигналов на большие расстояния. Временная форма импульса сохраняется за счет баланса дисперсии и керровской фазовой самомодуляции [14]. В случае филамента физические причины поддержания временной формы рамановской компоненты в спектре остаются вопросом дискуссии. В численном моделировании на основе решения однонаправленного уравнения Максвелла [12] была показана возможность формирования световой пули, состоящей примерно из десяти циклов светового поля на длине волны рамановского ИК излучения. Пуля поддерживала свою пространственно-временную форму на расстоянии около полуметра при формировании филамента пучком с диаметром 1 мм в коллимированной геометрии. Несущая частота пули смещалась в ИК область по мере распространения в соответствии с поведением, характерным для рамановского солитона. Однако, полученные спектральные соотношения между энергией излучения, содержащегося в рамановской компоненте, и энергией излучения вблизи центральной длины волны не соответствовали экспериментально наблюдаемым. Авторы работы [15] указывают на необходимость учета эффекта Керра следующего порядка и включают в расчеты не только n_2, но и n_4. Такая модификация исходных уравнений позволяет согласовать спектральные амплитуды различных частот, наблюдаемые в эксперименте. Однако, сложность определения нелинейных добавок в зависимости от интенсивности излучения в филаменте, учет временной динамики нарастания нелинейности и концентрации плазмы, по-прежнему оставляют вопросы о создании оптимальных экспериментальных условий для формирования в ближнем ИК-диапазоне рамановской пули, несущей значительную энергию и поддерживающей свою длительность и пространственную стабильность на значительном расстоянии. Также в обеих работах отмечается, что эта ограниченная световая структура может продолжать распространяться вперед на значительные расстояния в постфиламенте, т.е. после окончания плазменного канала филамента.

Поскольку изменением жесткости фокусировки пучка и чирпированием импульса нами осуществлялось управление концентрацией электронов в плазме филамента и его длиной, а также угловым спектром всех компонент электромагнитного поля, то полученные нами экспериментальные данные важны при верификации теоретических моделей (оценке вклада нестационарной нелинейности, нелинейностей высших порядков, и т.д.).

5. Заключение. Нами впервые показано, что формирование уединенной рамановской компоненты в спектрах излучения фемтосекундного лазерного филамента в воздухе существенно зависит от выбора числовой апертуры линзы, фокусирующей лазерное излучение в среду, и от чирпа лазерного импульса. Оптимальная конверсия энергии лазерного излучения в данную спектральную компоненту составляет около 25 % и достигается при фокусном расстоянии линзы 6 м и слабом отрицательном чирпе. Данная спектральная компонента распространяется на оси лазерного импульса, и ее сдвиг в ближнюю ИК область спектра возрастает по мере увеличения фокусного расстояния линзы.

Экспериментально показано, что при формировании филамента фемтосекундным лазерным импульсом с отрицательным чирпом спектр излучения содержит набор отдельных спектральных компонент, тогда как в случае положительного чирпа формируется уединенный яркий максимум, несущий значительную долю общей энергии импульса. Переход от уединенного максимума к их последовательности в ИК части спектра при переходе к отрицательным чирпам объясняется изменением порядка следования спектральных компонент и наиболее явно проявляется при острых фокусировках, что может быть связано с более высокой концентрацией плазмы.

Финансирование работы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда # 25-49-00154, https://rscf.ru/project/25-49-00154/ и Государственного фонда естественных наук Китая (National Natural Science Foundation of China (NSFC)) – (project # W2412044). Работа выполнена с использованием оборудования, закупленного при поддержке национального проекта "Наука и университеты".

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. A. Couairon and A. Mysyrowicz, "Femtosecond filamentation in transparent media", Phys. Rep. **441**(2–4), 47 (2007).
2. L. Bergé, S. Skupin, R. Nuter, J. Kasparian, and J.-P. Wolf, "Ultrashort filaments of light in weakly ionized, optically transparent media", Rep. Prog. Phys. **70**(10), 1633 (2007).
3. Д. В. Пушкарев, Л. В. Селезнев, Г. Э. Ризаев, Д. С. Урюпина, Н. А. Жидовцев, О. Г. Косарева, А. Б. Савельев-Трофимов, "Формирование O-образной структуры в красном крыле частотно-

углового спектра при филаментации на протяженной атмосферной трассе", Письма в ЖЭТФ **119**(8), 593 (2024).
4. S. L. Chin, H. L. Xu, Q. Luo et al. (Collaboration), "Filamentation "remote" sensing of chemical and biological agents/pollutants using only one femtosecond laser source", Appl. Phys. B **95**, 1 (2009).
5. H. Xu, G. Méjean, W. Liu, Y. Kamali, J.-F. Daigle, A. Azarm, P. T. Simard, P. Mathieu, G. Roy, J.-R. Simard, and S. L. Chin, "Remote detection of similar biological materials using femtosecond filament-induced breakdown spectroscopy", Appl. Phys. B **87**, 151 (2007).
6. H. Xu, Y. Cheng, S. L. Chin, and H. Sun, "Femtosecond laser ionization and fragmentation of molecules for environmental sensing", Laser Photonics Rev. **9**, 275 (2015).
7. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов* (Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988), с. 312 [S. A. Akhmanov, V. A. Vysloukh, and A. S. Chirkin, *Optics of Femtosecond Laser Pulses* (Nauka, Moscow, 1988)] [in Russian].
8. C. P. Hauri, W. Kornelis, F. Helbing, A. Heinrich, A. Couairon, A. Mysyrowicz, J. Biegert, and U. Keller, "Generation of intense, carrier-envelope phase-locked few-cycle laser pulses through filamentation", Appl. Phys. B **79**(6), 673 (2004).
9. A. Couairon, J. Biegert, C. P. Hauri, W. Kornelis, F. W. Helbing, U. Keller, and A. Mysyrowicz, "Selfcompression of ultra-short laser pulses down to one optical cycle by filamentation", J. Mod. Opt. **53**(1–2), 75 (2006).
10. D. Uryupina, M. Kurilova, A. Mazhorova, N. Panov, R. Volkov, S. Gorgutsa, O. Kosareva, A. Savel'ev, and S. L. Chin, "Few-cycle optical pulse production from collimated femtosecond laser beam filamentation", J. Opt. Soc. Am. B **27**(4), 667 (2010).
11. D. Uryupina, N. Panov, M. Kurilova, A. Mazhorova, R. Volkov, S. Gorgutsa, O. Kosareva, and A. Savel'ev, "3D raman bullet formed under filamentation of femtosecond laser pulses in air and nitrogen", Appl. Phys. B **110**(1), 123 (2013).
12. N. A. Panov, D. E. Shipilo, V. A. Andreeva, D. S. Uryupina, A. B. Savel'ev, O. G. Kosareva, and S. L. Chin, "Robust near-infrared light bullet in 800-nm femtosecond light filaments in air", Appl. Phys. B **120**(3), 383 (2015).
13. Y. Chen, F. Th'eberge, C. Marceau, H. Xu, N. Aközbek, O. Kosareva, and S. L. Chin, "Observation of filamentation-induced continuous self-frequency down shift in air", Appl. Phys. B **91**(2), 219 (2008).
14. G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics*, in *Optics and Photonics*, 5th ed., (Academic Press, San Diego, San Francisco, N.Y., Boston, London, Sydney, Tokyo, 2013).
15. A. Mitrofanov, A. Voronin, D. Sidorov-Biryukov, G. Andriukaitis, T. Flöry, A. Pugžlys, A. Fedotov, J. Mikhailova, V. Y. Panchenko, A. Baltuška, and A. Zheltikov, "Post-filament self-trapping of ultrashort laser pulses", Opt. Lett. **39**(16), 4659 (2014).
16. F. Théberge, W. Liu, P. T. Simard, A. Becker, and S. L. Chin, "Plasma density inside a femtosecond laser filament in air: Strong dependence on external focusing", Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics **74**(3), 036406 (2006).
17. I. S. Golubtsov, V. P. Kandidov, and O. G. Kosareva, "Initial phase modulation of a high-power femtosecond laser pulse as a tool for controlling its filamentation and generation of a supercontinuum in air", Quantum Electron. **33**(6), 525 (2003).
18. D. Pushkarev, A. Bulygin, N. Zhidovtsev, D. Uryupina, R. Volkov, Y. Geints, and A. Savelev, "Anomalous infrared conical emission during ordered multifilamentation in gases", Opt. Lett. **50**(1), 13 (2025).
19. D. V. Pushkarev, N. A. Zhidovtsev, D. S. Uryupina, E. V. Mitina, R. V. Volkov, and A. B. Savel?ev, "Threedomain stabilization of femtosecond filament red-shifted light bullet in air by means of beam amplitude modulation", Optics and Laser Technology **180**, 111438 (2025).
20. N. Panov, M. Kurilova, D. Uryupina, M. Volkov, A. Mazhorova, R. Volkov, O. Kosareva, and A. Savel'ev, "Four-wave mixing in molecular gases under filamentation of the collimated femtosecond beam", Laser Phys. Lett. **11**(12), 125302 (2014).
21. M. A. Porras and P. Di Trapani, "Localized and stationary light wave modes in dispersive media", Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics **69**(6), 066606 (2004).
22. M. A. Porras, A. Dubietis, E. Kučinskas, F. Bragheri, V. Degiorgio, A. Couairon, D. Faccio, and P. Di Trapani, "From x-to o-shaped spatiotemporal spectra of light filaments in water", Opt. Lett. **30**(24), 3398 (2005).
23. S. V. Chekalin, E. O. Smetanina, A. Spirkov, V. O. Kompanets, and V. P. Kandidov, "Filamentation of a phase-modulated pulse under conditions of normal, anomalous and zero group velocity dispersion", Quantum Electron. **44**(6), 577 (2014).
24. D. Uryupina, A. Bychkov, D. Pushkarev, E. Mitina, A. Savel'ev, O. Kosareva, N. Panov, A. Karabutov, and E. Cherepetskaya, "Laser optoacoustic diagnostics of femtosecond filaments in air using wideband piezoelectric transducers", Laser Phys. Lett. **13**(9), 095401 (2016).
25. N. Aközbek, M. Scalora, C. M. Bowden, and S. L. Chin, "Transition from linear- to nonlinear-focusing regime in filamentation", Opt. Commun. **191**(3–6), 353 (2001).
26. K. Lim, M. Durand, M. Baudelet, and M. Richardson, "Transition from linear- to nonlinear-focusing regime in filamentation", Sci. Rep. **4**, 7217 (2014).
27. Y. E. Geints, D. V. Mokrousova, D. V. Pushkarev, G. E. Rizaev, L. V. Seleznev, I. Y. Geints, A. A. Ionin,

and A. A. Zemlyanov, "Energy limit for linear-to-nonlinear femtosecond laser pulse focusing in air", Optics & Laser Technology **143**, 107377 (2021).

28. E. T. J. Nibbering, G. Grillon, M. A. Franco, B. S. Prade, and A. Mysyrowicz, "Determination of the inertial contribution to the nonlinear refractive index of air, N2, and O2 by use of unfocused high-intensity femtosecond laser pulses", J. Opt. Soc. Am. B **14**(3), 650 (1997).
29. A. C. Bernstein, J.-C. Diels, T. S. Luk, T. R. Nelson, A. McPherson, and S. M. Cameron, "Time-resolved measurements of self-focusing pulses in air", Opt. Lett. **28**(23), 2354 (2003).
30. J. Peñano, P. Sprangle, B. Hafizi, A. Ting, D. Gordon, and C. Kapetanakos, "Propagation of ultra-short, intense laser pulses in air", Phys, Plasmas **11**(5), 2865 (2004).