Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 4, с. 271 – 277 © 2026 г. 25 февраля

Эффект квантовой интерференции вероятностей магнитного дипольного и электрического квадрупольного резонансных переходов в ЭПР-спектроскопии примесных ионов $^{63}Cu^{2+}$ в BaF_2

Р. Б. Зарипов, В. Ф. Тарасов[1], В. А. Уланов

Казанский физико-технический институт им. Е. К. Завойского – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки "Федеральный исследовательский центр "Казанский научный центр Российской академии наук", 420029 Казань, Россия

Поступила в редакцию 5 декабря 2025 г.
После переработки 18 декабря 2025 г.
Принята к публикации 20 декабря 2025 г.

В спектрах электронного парамагнитного резонанса одиночных ионов и димерных ассоциатов примесных ионов меди в монокристалле BaF_2 обнаружено аномальное изменение относительной амплитуды резонансных линий на спектрах при изменении ориентации внешнего магнитного поля относительно кристаллографических осей. Предполагается,что эффект вызван квантовой интерференцией амплитуд вероятностей магнитных дипольных и электрических квадрупольных резонансных переходов, одновременно возбуждаемых между электронными спиновыми состояниями димерного ассоциата.

DOI: 10.31857/S0370274X26020172

Введение. Квантовая интерференция амплитуд вероятностей резонансных переходов при взаимодействии электромагнитных волн с электронными системами атомов и ионов лежит в основе нескольких физических эффектов. Вероятно, самым первым экспериментально обнаруженным и самым известным является эффект Ханле [1, 2]. Квантовая интерференция наблюдалась при измерении люминесценции с участием двух электронных уровней, причем, возбужденный уровень являлся двукратно вырожденным в нулевом магнитном поле. Если обозначить эффективный оператор связи электромагнитной волны с одним из возбужденных уровней H_i $(i = 1, 2)$, то интенсивность резонансной люминесценции при переходе с возбужденного состояния $|e\rangle$ в основное $|g\rangle$ будет пропорциональна квадрату модуля суммы матричных элементов переходов

$$I_H \sim |\langle\psi_1|\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2|\psi_2\rangle|^2. \quad (1)$$

Если внешнее магнитное поле снимает вырождение уровней благодаря эффекту Зеемана, квантовая интерференция исчезает, и люминесценция с каждого возбужденного подуровня будет происходить независимо. Тогда суммарная интенсивность будет равна

$$I_0 \sim |\langle\psi_1|\widehat{H}_1|\psi_2\rangle|^2 + |\psi_1\widehat{H}_2|\psi_2|^2. \quad (2)$$

Это приводит к заметному изменению параметров люминесценции, известному как эффект Ханле. Квантовая интерференция может наблюдаться и в конечном магнитном поле, когда один из уровней, участвующих в резонансном переходе, становится вырожденным при пересечении электронных уровней в многоуровневой системе [3, 4].

Квантовая интерференция резонансных переходов возможна при возбуждении электромагнитной волной резонансных переходов между двумя синглетными электронными уровнями в случае, если между ними одновременно возможны магнитный дипольный и электрический дипольный резонансные переходы. Правила отбора для магнитного дипольного излучения разрешают переходы между состояниями одинаковой четности, а для электрического излучения – между состояниями противоположной четности. Поэтому одновременное возбуждение обоих типов переходов между двумя электронными уровнями возможно только для активных центров, не обладающих инверсионной симметрией [5]. В этих условиях осциллирующая электрическая компонента может вызвать электрические дипольные переходы с изменением величины электрического дипольного момента, а магнитная компонента волны вызывает магнитные дипольные переходы, приводящие к изменению величины магнитного дипольного момента. При квантово-механическом описании резонансных переходов вероятность перехода пропорциональна квадрату модуля матричного элемента возмущающего поля (возмущения), вызывающего переход. При наличии двух возмущающих полей ампли-

[1]e-mail: tarasov@kfti.knc.ru

туды вероятностей переходов складываются, и вероятность определяется квадратом модуля суммы амплитуд вероятностей. Если обозначить эффективные операторы связи магнитной и электрической компонент электромагнитной волны с электрическим и магнитным дипольными моментами активного центра H_{MD} и H_{ED}, соответственно, то интенсивность резонансного взаимодействия будет пропорциональна [6, 7]

$$I_{MDED} \sim |\langle\psi_1|\widehat{H}_{MD} + \widehat{H}_{ED}|\psi_2\rangle|^2. \quad (3)$$

В этом случае в результирующей вероятности перехода появляются слагаемые, пропорциональные произведению магнитного и электрического вкладов. Знак этого произведения зависит от фазовых соотношений между электрической и магнитной компонентами. При изменении направления волнового вектора электромагнитной волны или направления внешнего магнитного поля изменяется знак этого произведения, что приводит к изменению эффективности взаимодействия электромагнитной волны с активным центром. Во многих случаях изменение величины оптического поглощения или поляризации люминесценции при инверсии направления распространения волны проявляется в магнитно и/или электрически упорядоченных средах, в которых оптически активными являются $3d$-ионы переходных металлов, образующие кристаллическую решетку [8–13]. На примесных 4-f ионах в парамагнетиках также наблюдалась эффекты интерференции магнитных и электрических дипольных переходов. Это проявилось во влиянии направления распространения бегущей электромагнитной волны на спектры люминесценции при оптическом возбуждении [14, 15], амплитуду сигналов фотонного эха [16] и интенсивность резонансных переходов в электронном парамагнитном резонансе (ЭПР) [17].

В данной работе мы сообщаем о новом эффекте квантовой интерференции вероятностей магнитных дипольных и электрических квадрупольных переходов, обнаруженном при ЭПР-спектроскопии примесных ионов Cu^{2+} в монокристалле BaF_2.

Образец и методика измерений. Измерения проводились на монокристаллическом образце BaF_2, моноизотопно легированном ионами $^{63}Cu^{2+}$. Особенностью этого материала является присутствие одиночных ионов и димерных ассоциатов меди в примерно одинаковой концентрации [18, 19]. Примесные ионы меди замещают в кубической кристаллической решетке BaF_2 ионы Ba^{2+}, располагающиеся в центре куба, состоящего из 8 ионов F^-. Однако ориентационные зависимости спектров ЭПР, измеренные для этих центров в [18, 19], показали, что вследствие эффекта Яна–Теллера происходит смещение примесных ионов меди от центра куба в направлении оси четвертого порядка кубической кристаллической решетки BaF_2. Поэтому для обоих центров имеются по 3 магнитно неэквивалентных центра тетрагональной симметрии с главными магнитными z-осями, направленными вдоль осей 4-го порядка. Два электронных уровня одиночного иона Cu^{2+} со спином $S = 1/2$ в нулевом магнитном поле двукратно вырождены, а в магнитном поле расщепляются пропорционально величине магнитного поля. Димерный ассоциат описывается полным эффективным спином $S = 1$. В нулевом магнитном поле тонкая структура уровней состоит из синглета $S_z = 0$ и дублета $S_z = \pm 1$ с расщеплением между ними $D = 1095$ МГц [18, 19]. В магнитном поле $\mathbf{B}_0$ уровни $S_z = +1$ и $S_z = -1$ также расщепляются. При $\mathbf{B}_0 \| z$ это расщепление пропорционально B_0. Схематически такая зависимость энергии электронных уровней от магнитного поля приведена на рис. 1. Для одиночного иона в спек-

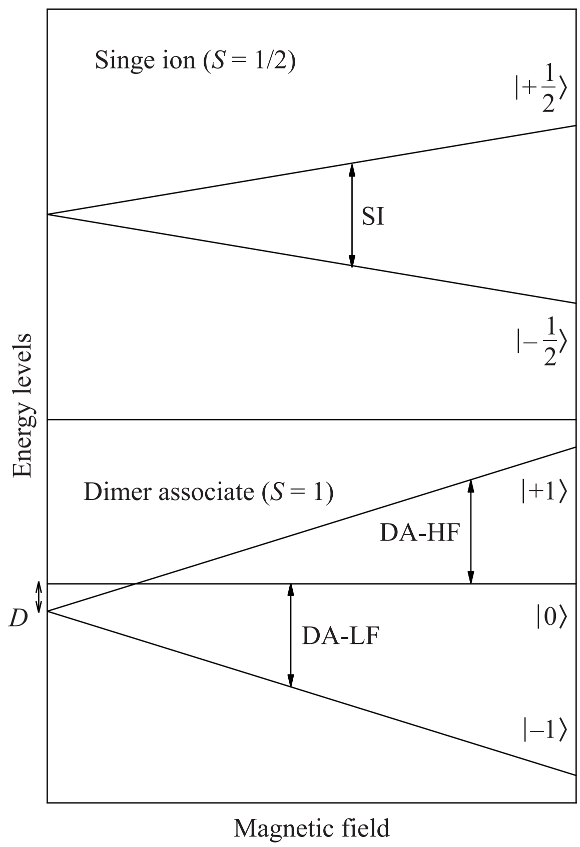

Рис. 1. Схема электронных уровней одиночного иона Cu^{2+} с эффективным спином $S = 1/2$ и димерного ассоциата с эффективным спином $S = 1$. Стрелками показаны резонансные переходы, наблюдаемые в ЭПР-спектроскопии

трах ЭПР регистрируется один переход (SI), соответствующий резонансному значению магнитного поля при данной рабочей частоте спектрометра, а для димерного ассоциата регистрируются переходы DA-LF и DA-HF в более низком, и более высоком магнитных полях, соответственно. Измерения проводились в стационарном режиме с модуляцией магнитного поля на частоте 100 кГц при амплитуде 0.1 мТл на спектрометре ЭПР ELEXSYS E-580, работающем в Q-диапазоне частот (длина волны $\lambda \sim 8$ мм) с использованием цилиндрического коммерческого резонатора ER 5106 QT-W, работающего в TE_{012} моде. При измерении ориентационной зависимости спектров вращение образца проводилось вокруг кристаллографической оси второго порядка, которая принималась за x-ось парамагнитных центров. Магнитная компонента микроволнового поля $\mathbf{B}_1$ была направлена вдоль оси вращения. Постоянное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ было направлено перпендикулярно оси вращения. Образец имел размеры примерно $1 \times 1 \times 1$ мм^3. Методика приготовления образцов BaF_2, легированных медью, подробно изложена в [20].

Экспериментальные результаты и обсуждение. Резонансные переходы на спектрах ЭПР, принадлежащие одиночному иону и димерному ассоциату, легко идентифицируются по характерным сверхтонкой и суперсверхтонкой структурам (СТС и ССТС) спектров. Ядерный спин изотопа ^{63}Cu $I^{\mathrm{Cu}} = 3/2$. Поэтому СТС одиночного иона содержит $(2I + 1) = 4$ линии, соответствующие разрешенным переходам между электронно-ядерными уровнями с равными I_z. СТС димерного ассоциата образуется в результате взаимодействия двух электронных спинов с двумя ядрами меди, и СТС должна состоять из 16 разрешенных переходов, которые группируются в 7 линий, соответствующих суммарному ядерному спину димера $I = 3$ с относительной интенсивностью 1:2:3:4:3:2:1. Смещенный из центра куба одиночный ион меди эффективно взаимодействует с 4 ядрами фтора, расположенными на одной грани, а электронные спины димерного ассоциата взаимодействуют с 8 ядрами. Значительная разница СТС и ССТС спектров ЭПР одиночного иона и димерного ассоциата позволяет однозначно определить тип парамагнитного центра. На рисунке 2 приведены спектры ЭПР BaF_2:Cu, записанные при различных ориентациях кристалла относительно внешнего магнитного поля. Цифры в левой части спектров показывают отклонение направления магнитного поля от z-оси парамагнитных центров. Стик-спектры (DA-LF) и (DA-HF) в нижней части рис. 2 соответствуют СТС низкополевого и высокополевого резонансных переходов димерного ассоциата. Спектры (SI) соответствуют СТС одиночного иона. Смещение спектра SI в более низкое поле относительно среднего значения для двух спектров DA объясняется небольшой разницей в значениях продольного g-фактора для одиночного иона $g_{\parallel}^{SI} = 2.511$ и димерного ассоциата $g_{\parallel}^{DA} = 2.490$ [18, 19]. На рисунке 2 видно, что амплитуда линий низкополевого спектра димерного ассоциата DA-LF превышает амплитуду линий высокополевого спектра DA-HF. Причем, разница в амплитуде линий DA-LF и DA-HF сильно зависит от ориентации магнитного поля. На рисунке 3a представлена ориентационная зависимость амплитуд линий (разницы между максимумом и минимумом производной линии резонансного поглощения) для трех резонансных линий, помеченных звездочками на спектре, соответствующем ориентации $-1°$ на рис. 2. На рисунке 3b представлены отношения амплитуд линий димерного ассоциата и одиночного иона. Видно, что при отклонении z-оси парамагнитных центров от направления магнитного поля это отношение увеличи-

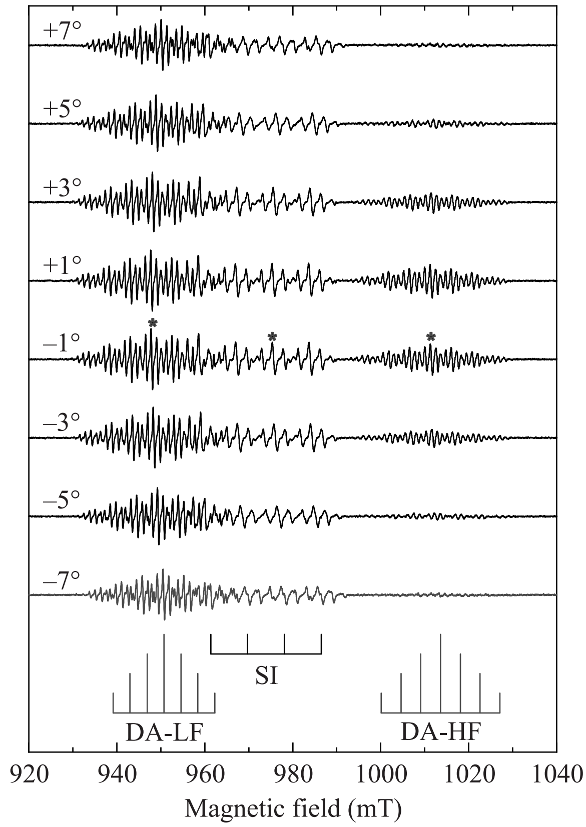

Рис. 2. Спектры ЭПР примесных центров $^{63}Cu^{2+}$ в BaF_2. Цифры в левой части спектров показывают отклонение направления магнитного поля от z-оси центров. Частота спектрометра 34.1467 ГГц, микроволновая мощность 0.1 мВт. $T = 80$ К

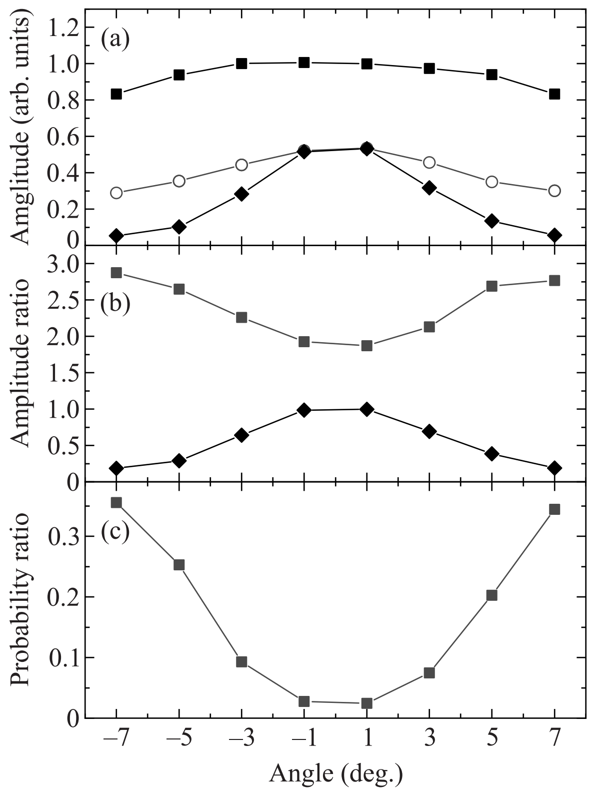

Рис. 3. (a) – Зависимость амплитуды спектральных линий димерного ассоциата и одиночного иона Cu^{2+} в BaF_2 от угла между направлением магнитного поля и z-осью парамагнитных центров. Значки – эксперимент, линии соединяют значки между собой. Заполненные квадраты и ромбы соответствуют переходам димерного ассоциата DA-LF и DA-LF соответственно. Пустые круги соответствуют спектру SI одиночного иона; (b) – отношение амплитуд DA-LF/SI (квадраты) и DA-HF/SI (ромбы); (c) – отношение вероятностей электрического квадрупольного и магнитного дипольного переходов P_{EQ}/P_{MD}

вается и уменьшается для DA-LF и DA-HF спектров, соответственно.

Обычно в ЭПР рассматривают взаимодействие электронного магнитного момента с осциллирующей на резонансной частоте магнитной компонентой микроволнового поля $\mathbf{B}_1$. При этом для линейно поляризованного микроволнового поля ($\mathbf{B}_1 \| x$) вероятность магнитного дипольного перехода

$$P_{MD} \sim |\langle\psi_1|g\mu_B B_1 \mathbf{S}_x|\psi_2\rangle = I_{MD}^2 |\langle\psi_1|\mathbf{S}_x|\psi_2\rangle|^2, \quad (4)$$

где $I_{MD} = g\mu_B B_1$, g – эффективный g-фактор, μ_B – магнетон Бора. Спиновые матрицы для одиночного иона ($S = 1/2$) и димерного ассоциата ($S = 1$) определяются как [21]

$$\mathbf{S}_x^{1/2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_x^{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В соответствии с этим вероятности двух переходов между состояниями $|0\rangle$ и $|\pm 1\rangle$ димерного ассоциата должны быть равны, и должна сохраняться пропорциональность между вероятностями переходов одиночного иона и димерного ассоциата. Однако, в рассматриваемом случае это не так. Мы полагаем, что зависимость отношения амплитуд линий от ориентации образца в магнитном поле связана с возбуждением в спиновой системе димерного ассоциата резонансных переходов между квадрупольными степенями свободы спиновой системы, вызванными осциллирующим градиентом электрической компоненты микроволнового поля $\nabla\mathbf{E}_1$. Ранее влияние квадрупольных резонансных переходов на спектры ЭПР, записывавшиеся при температуре $T = 20$ K в этом же образце в условиях частичного насыщения резонансных переходов, обсуждалось в работе [20]. В данной работе измерения проводились при $T = 80$ K в режиме линейного отклика в отсутствие насыщения.

Известно, что для полного описания динамики высокоспиновой ($S > 1/2$) системы необходимо учитывать квадратичные по спину операторы, соответствующие квадрупольному моменту [22–26]. В работе [26] эти операторы приведены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{xxyy} &= \mathbf{S}_x\mathbf{S}_x - \mathbf{S}_y\mathbf{S}_y; \\ \mathbf{Q}_{zz} &= \mathbf{S}_z\mathbf{S}_z - 2/3\mathbf{F}; \\ \mathbf{Q}_{xy} &= \mathbf{S}_x\mathbf{S}_y + \mathbf{S}_y\mathbf{S}_x; \\ \mathbf{Q}_{xz} &= \mathbf{S}_x\mathbf{S}_z + \mathbf{S}_z\mathbf{S}_x; \\ \mathbf{Q}_{yz} &= \mathbf{S}_y\mathbf{S}_z + \mathbf{S}_z\mathbf{S}_y, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{F}$ – единичный оператор.

Вероятность резонансных переходов между состояниями электрического квадрупольного момента с изменением магнитного квантового числа $\Delta m = \pm 1$ в общем виде можно записать как [27]

$$P_{EQ} \sim |\langle\psi_1|eQG_{xz}\mathbf{Q}_{xz}|\psi_2\rangle|^2 = I_{EQ}^2 |\langle\psi_1|\mathbf{Q}_{xz}|\psi_2\rangle|^2, \quad (7)$$

где $I_{EQ} = eQG_{xz}$, e – заряд электрона, Q – квадрупольный момент, $G_{xz} = \nabla E_1$ – величина градиента микроволнового электрического поля E_1. Спиновая матрица для $\mathbf{Q}_{xz}$ [21]

$$\mathbf{Q}_{xz} = \mathbf{Q}_{zx} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Здесь элементы матрицы имеют разные знаки. Если рассматривать только электрические квадрупольные переходы, то вероятности переходов между состояниями $|0\rangle$ и $|\pm 1\rangle$ должны быть равны. Разница в величине вероятности переходов возникает, если имеется квантовая интерференция амплитуд вероятностей магнитных дипольных и электрических квадрупольных переходов. Тогда полная вероятность переходов может быть записана в виде

$$P_{MDEQ} \sim |\langle \psi_1 | I_{MD}\mathbf{S}_x + I_{EQ}\mathbf{Q}_{xz} | \psi_2 \rangle|^2. \qquad (9)$$

Здесь квадрупольный член имеет разные знаки для электрических квадрупольных переходов между состояниями $|0\rangle \leftrightarrow |0\rangle$ и $|\pm 1\rangle$. Поэтому возникающий вследствие интерференции перекрестный член в вероятности переходов будет иметь разный знак для переходов $|0\rangle \leftrightarrow |+1\rangle$ и $|0\rangle \leftrightarrow |-1\rangle$. В результате, амплитуды резонансных линий в спектрах DA-LF и DA-HF будут различными.

При измерениях исследуемый образец располагался на оси цилиндрического резонатора ER 5106 QT-W в пучности магнитной компоненты микроволнового поля B_1. В этом резонаторе электрическое поле $\mathbf{E}_1$ имеет вихревую структуру [28]. На оси резонатора $E_1 = 0$, в то же время $\nabla \mathbf{E}_1 \neq 0$. Этот градиент возбуждает между спиновыми уровнями высокоспинового ($S = 1$) димерного ассоциата электрические квадрупольные переходы. При вращении образца в резонаторе направление $\mathbf{B}_1$ остается ортогональным как z-оси центров, так и полю $\mathbf{B}_0$. Небольшое изменение амплитуды резонансных линий на спектрах одиночного иона, где интерференция отсутствует, вызвано анизотропией эффективного g-фактора. Для одиночного иона $g_{\parallel}^{SI} = 2.511$, $g_{\perp}^{SI} = 2.092$, а для димерного ассоциата $g_{\parallel}^{DA} = 2.490$, $g_{\perp}^{DA} = 2.086$ [18, 19]. В то же время при вращении образца изменяется ориентация $\nabla \mathbf{E}_1$, и изменяется вероятность электрических квадрупольных переходов. Наблюдаемая ориентационная зависимость амплитуд линий соответствует конструктивному и деструктивному характеру интерференции вероятностей магнитных дипольных и электрических квадрупольных переходов для спектров DA-LF и DA-HF соответственно. Выражение (9) для вероятностей переходов между состояниями $S_z = 0$ и $S_z = \pm 1$ можно переписать в простой безоператорной форме

$$P_{MDEQ}(0 \leftrightarrow \pm 1) = I_{MD}^2 \mp 2 I_{MD} I_{EQ} + I_{EQ}^2. \qquad (10)$$

Если считать, что амплитуды линий на спектрах пропорциональны вероятностям переходов, то, используя это выражение, по отношению амплитуд резонансных линий можно рассчитать отношение вероятностей P_{EQ}/P_{MD}. Зависимость этого отношения от ориентации образца в магнитном поле представлена на рис. 3с.

Выводы. Методом стационарной ЭПР-спектроскопии в Q-диапазоне на частоте 34 ГГц исследована ориентационная зависимость амплитуды резонансных линий одиночных ионов и димерных ассоциатов $^{63}Cu^{2+}$ в монокристалле BaF_2. Обнаружена аномальная зависимость относительной амплитуды наблюдаемых резонансных переходов от ориентации внешнего магнитного поля относительно кристаллографических осей, которая не соответствует ожидаемой ориентационной зависимости для магнитных дипольных переходов, обычно регистрируемых в ЭПР-спектроскопии. Показано, что обнаруженный эффект можно объяснить квантовой интерференцией амплитуд вероятностей двух типов резонансных переходов, одновременно возбуждаемых между спиновыми уровнями димерного ассоциата. Это магнитный дипольный переход, возбуждаемый магнитной компонентой осциллирующего микроволнового поля, и электрический квадрупольный переход, возбуждаемый осциллирующим градиентом электрической компоненты микроволнового поля.

Измерения спектров ЭПР проводились с использованием научного оборудования Коллективного спектро-аналитического центра физико-химических исследований строения, свойств и состава веществ и материалов Федерального исследовательского центра "Казанский научный центр Российской академии наук".

Финансирование работы. Работа была выполнена в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра "Казанский научный центр Российской академии наук".

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. W. Hanle, "Über magnetische Beeinflussung der Polarization der Resonanzflureszenz", Zeitschrift für Physik **30**, 93 (1924).
2. Л. Н. Новиков, Г. В. Скроцкий, Г. И. Соломахо,"Эффект Ханле", УФН **113**, 597 (1974) [L. N. Novikov, G. V. Skrotskii, and G. I. Solomakho, "The Hanle effect", Sov. Phys.-Uspekhi **17**, 542 (1975)].
3. F. D. Colegrove, P. A. Franken, R. R. Lewis, and R. H. Sands, "Novel method of spectroscopy with

applications to precision fine structure measurements", Phys. Rev. Lett. **3**, 420 (1959).

4. P. A. Franken, "Interference Effects in the Resonance Fluorescence of "Crossed" Excited Atomic States", Phys. Rev. **121**, 508 (1961).
5. А. А. Каплянский, Н. А. Москвин, "Комбинированные магнитно-электрические дипольные переходы в спектрах кристаллов щелочных фторидов с шестивалентным ураном", ДАН **148**, 558 (1963) [A. A. Kaplyanskii and N. A. Moskvin, "Kombinirovannie magnitno-ectricheskie dipolnie perekhody v spectrah kristallov schelochih ftoridov s shestivalentnym uranom", Doklady Akademii Nauk SSSR **148**, 558 (1963)].
6. К. В. Васин, М. В. Еремин, А. Р. Нурмухаметов, "К теории оптического диода на ионах железа в $FeZnMo_3O_8$", Письма в ЖЭТФ **115**, 420 (2022) [K. V. Vasin, M. V. Eremin, and A. R. Nurmukhametov, "On the Theory of Optical Diode on Iron Ions in $FeZnMo_3O_8$", JETP Lett. **115**, 380 (2022)].
7. А. Р. Нурмухаметов, М. В. Еремин, "К теории динамической магнитоэлектрической связи в CuB_2O_4", ЖЭТФ **162**, 390 (2022) [A. R. Nurmukhametov and M. V. Eremin, "On the Theory of the Dynamic Magnetoelectric Coupling in CuB_2O_4", JETP **135**, 339 (2022)].
8. J. H. Jung, M. Matsubara, T. Arima, J. P. He, Y. Kaneko, and Y. Tokura, "Optical Magnetoelectric Effect in the Polar $GaFeO_3$ Ferrimagnet", Phys. Rev. Lett. **93**, 037403 (2004).
9. S. Toyoda, N. Abe, S. Kimura, Y. H. Matsuda, T. Nomura, A. Ikeda, S. Takeyama, and T. Arima, "One-Way Transparency of Light in Multiferroic CuB_2O_4", Phys. Rev. Lett. **115**, 267207 (2015).
10. S. Toyoda, N. Abe, and T. Arima, "Gigantic directional asymmetry of luminescence in multiferroic CuB_2O_4", Phys. Rev. B **93**, 201109 (2016)
11. S. Yu, B. Gao, J. W. Kim, S-W. Cheong, M. K. L. Man, J. Madéo, K. M. Dani, and D. Talbayev, "High-Temperature Terahertz Optical Diode Effect without Magnetic Order in Polar $FeZnMo_3O_8$", Phys. Rev. Lett. **120**, 037601 (2018).
12. K. Kimura, T. Katsuyoshi, Y. Sawada, S. Kimura, and T. Kimura, "Imaging switchable magnetoelectric quadrupole domains via nonreciprocal linear dichroism", Commun. Mater. **1**, 39 (2020).
13. K. V. Vasin, A. Strinić, F. Schilberth , S. Reschke, L. Prodan, V. Tsurkan, A. R. Nurmukhametov, M. V. Eremin, I. Késmárki, and J. Deisenhofer, "Optical magnetoelectric effect in the polar honeycomb antiferromagnet $Fe_2Mo_3O_8$", Phys. Rev. B **110**, 054401 (2024).
14. Y. Shimada, M. Matsubara, Y. Kaneko, J. P. He, and Y. Tokura, "Magnetoelectric emission in a magnetic ferroelectric Er-doped $(Ba,Sr)TiO_3$", Appl. Phys. Lett. **89**, 101112 (2006).
15. Y. Shimada, H. Kiyama, and Y. Tokura, "Magnetoelectric emission in rare-earth doped ferroelectric crystals $La_2Ti_2O_7$:R^{3+} ($R=$Er, Eu,and Nd)", Phys. Rev. B **75**, 245125 (2007).
16. А. М. Шегеда, С. Л. Кораблева, О. А. Морозов, В. Н. Лисин, Н. К. Соловаров, В. Ф. Тарасов, "Проявление памяти и бабочка в фотонном эхо на ионах эрбия в $LuLiF_4$ и $YLiF_4$", Письма в ЖЭТФ **117**, 264 (2023) [A. M. Shegedaa, S. L. Korableva, O. A. Morozov, V. N. Lisin, N. K. Solovarov, and V. F. Tarasov, "Manifestation of Memory and Butterfly in the Photon Echo on Erbium Ions in $LuLiF_4$ and $YLiF_4$", JETP Lett. **117**, 267 (2023)].
17. М. В. Еремин, В. Ф. Тарасов, "Эффект магнитоэлектрической невзаимности в субмиллиметровой ЭПР-спектроскопии $LiYF_4$, легированного ионами $^{166}Er^{3+}$", Письма в ЖЭТФ **121**, 455 (2025) [M. V. Eremin and V. F. Tarasov, "Effect of Magnetoelectric Nonreciprocity in the Submillimeter EPR Spectroscopy of $LiYF_4$ Doped by $^{166}Er^{3+}$ Ions", JETP Lett. **121** 434 (2025)]; DOI: 10.1134/S0021364024604895.
18. М. М. Зарипов, В. А. Уланов, "Исследование методом ЭПР ионов меди в кристалле BaF_2", ФТТ **31**, 254 (1989) [M. M. Zaripov and V. A. Ulanov, "Issledovanie metodom EPR ionov medi v kristalle BaF_2", Fizika Tverdogo Tela **31**, 254 (1989)].
19. S. K. Hoffmann, J. Goslar, S. Lijewski, and V. A. Ulanov, "Molecular structure and dynamics of off-center Cu^{2+} ions and strongly coupled Cu^{2+}–Cu^{2+} pairs in BaF_2 crystals: Electron paramagnetic resonance and electron spin relaxation studies", J. Chem. Phys. **127**, 124705 (2007).
20. Р. Б. Зарипов, В. Ф. Тарасов, В. А. Уланов, "Магнитоэлектрический спиновый резонанс димерных ассоциатов $^{63}Cu^{2+}$ в монокристалле BaF_2", Письма в ЖЭТФ **121**, 51 (2025) [R. B. Zaripov, V. F. Tarasov, and V. A. Ulanov, "Magneto-Electric Spin Resonance of $^{63}Cu^{2+}$ Dimer Associates in a BaF_2 Single Crystal", JETP Lett. **121**, 47 (2025)].
21. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квановая теория углового момента* (Наука, Л., 1975), гл. 2. [D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, and V. K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum* (World Scientific, Singapore, 1988)].
22. U. Fano, "Precession Equation of a Spinning Particle in Nonuniform Fields", Phys. Rev. **133**, B828 (1964).
23. R. C. Hilborn, L. R. Hunter, K. Johnson, S. K. Peck, and A. Spencer, J. Watson, "Atomic barium and cesium alignment-to-orientation conversion in external electric and magnetic fields", Phys. Rev. A **50**, 2467 (1994).

24. R. Wieser, "Role of quadratic terms in the Heisenberg model for quantum spin dynamics", Phys. Rev. B **84**, 054411 (2011).
25. H.-J. Stöckmann and D. Dubbers, "Generalized spin precession equation", New J. Phys. **16**, 053050 (2014).
26. K. M. Салихов, "Новый взгляд на "'нутацию" спинов", ЖЭТФ **162**, 630 (2022) [K. M. Salikhov, "New View on Spin "Nutation", JETP **135**, 617 (2022)].
27. A. G. Maryasov, A. R. Melnikov, M. V. Fedin, and S. L. Veber, "Inter-Kramers electric quadrupole transitions in high-spin systems induced by resonant alternating inhomogeneous electric field", J. Appl. Phys. **138**, 123906 (2025).
28. C. P. Poole, *Electron spin resonance. A comprehensive treatise on experimental techniques* (Dover Publications, Mineola, N.Y., 1996).