Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 7, с. 454 – 463 © 2026 г. 10 апреля

Обобщенная ланжевеновская динамика системы при радиационном взаимодействии

А. И. Трубилко[+1)], *А. М. Башаров*[*1)]

[+]*Санкт-Петербургский университет государственной противопожарной службы МЧС России, 196105 С.-Петербург, Россия*

[*]*Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 декабря 2025 г.
После переработки 26 января 2026 г.
Принята к публикации 19 февраля 2026 г.

Получено отличное от известных кинетическое управляющее уравнение обобщенной ланжевеновской динамики механической системы при радиационном взаимодействии с широкополосным электромагнитным полем в сжатом состоянии. Уравнение выведено на основе квантового стохастического дифференциального уравнения, построенного с помощью алгебры образующих двухквантовых стохастических процессов. Последние выражают гамильтониан радиационного взаимодействия инкрементами Ито указанных процессов. Посредством уравнения для вигнеровской квазивероятности, следующего в гармоническом приближении исходного уравнения открытой системы, сделан анализ движения гармонического осциллятора и свободной частицы. Выявлены особенности динамики систем в широкополосном сжатом поле, и широкополосном поле в классическом состоянии.

DOI: 10.7868/S3034576626040022

1. Введение. Развитие экспериментальной базы и квантовых технологий, где оказывается возможным манипулирование уединенными квантовыми объектами, открывает новые возможности квантового управления. Управление выделенной системой под воздействием внешнего источника широко используется как в исследованиях динамики микроскопических систем – квантового транспорта [1, 2], управления химическими реакциями [3, 4], управления движением атомов и ионов в ловушках [5, 6], переноса состояния между объектами разной физической природы [7], так и для обнаружения гравитационных волн [8] в исследовании макромира. Здесь особо привлекательным является возможность воздействия на объект световых полей в особых квантовых состояниях, обладающих квантовыми корреляциями. Такие поля сами по себе могут быть описаны только в рамках квантовой электродинамики и используются для исследования квантовых свойств самого объекта. Эти задачи управления тесно связаны с задачами динамики открытой системы, где окружение системы вносит свой вклад в ее эволюцию. При этом свойства сложной системы, рассматриваемой в качестве объекта, наряду с процессами изменения скорости релаксации и дефазировки системы [9–11] могут демонстрировать и свои особенности. Например, под влиянием внешнего воздействия система может быть приготовлена в состоянии, индифферентном релаксации, и, следовательно, полностью сохраняться [12, 13]. Квантовые корреляции двухчастичных систем могут быть созданы путем внешнего воздействия источника фотонов, обладающих квантовой корреляцией, который в определенных условиях служит термостатом системы [14, 15].

В задачах регистрации гравитационных волн квантово-коррелированный источник приводит к возможности регистрации сигнала возмущения световое поле–зеркало, производимого посредством радиационного давления [16–24]. Здесь зеркало выступает в роли гармонического осциллятора, движение которого с учетом взаимодействия с равновесным окружением определяется характеристиками состояния внешнего поля. Например, такое световое поле, созданное параметрическими источниками в средах с квадратичной нелинейностью, проявляет свои квантовые особенности [25, 26]. Близкий эксперимент, где в качестве гармонического осциллятора выступает наноразмерная мембрана, экспериментально исследован в работах [27]. Была продемонстрирована возможность обнаружения переноса квантовых сжатых состояний светового поля на механические степени свободы трансляционного движения осциллятора [28], перенос квантовой перепутанности на квантовые состояния двух си-

[1)]e-mail: trubilko.andrey@gmail.com; basharov@gmail.com

стем разной физической природы – механического осциллятора и ансамбля атомов [7], возникновение неклассических состояний между фотонами воздействующего поля и движением центра масс механического осциллятора [29]. С математической точки зрения постановка такой задачи и ее решение в приближении одиночной высокодобротной моды требует линеаризации, которая осуществляется наличием в эксперименте внешней когерентной волны на собственной частоте резонатора. Этот факт однако игнорирует проявление перерассеивания фотонов и интерференционных эффектов воздействия полей на гармонический осциллятор, появление которых определено общим видом радиационного характера взаимодействия в [30].

В этой работе мы впервые рассматриваем задачу о воздействии на объект широкополосного квантованного электромагнитного поля в сжатом состоянии, осуществляемого посредством радиационного давления. В условиях, когда ширина спектра излучения параметрического источника, определяемая полосой фазового синхронизма нелинейной среды, много больше скорости затухания механической системы, что, заметим, выполняется для оптомеханических систем практически всегда, световой источник выступает в роли термостата, состояние которого определено его свободной эволюцией. Такая задача до настоящего времени не рассматривалась, что связано с математическим аппаратом, используемым при ее описании. В рамках указанной постановки, сжатое световое поле ввиду марковского характера слабого взаимодействия с системой, определено как дельта-коррелированный источник, корреляционная матрица которого имеет все отличные от нуля нормальноупорядоченные корреляционные функции второго порядка. Само воздействие на гармонический осциллятор отвечает стохастическому взаимодействию, описываемому считывающим случайным процессом. Поскольку сжатое световое поле является “горячим” термостатом и имеет отличную от нуля среднюю плотность числа возбуждений, непосредственно построить квантовое стохастическое дифференциальное уравнение движения открытой системы невозможно. Однако, поскольку генерацию широкополосного сжатого источника можно описать известными преобразованиями Боголюбова в виде порождения сжатого состояния из вакуумного, для последнего оказывается возможным построение алгебры стохастических источников. Эта алгебра описывается образующими двухквантовых процессов Леви и отвечает считывающему процессу и двум стохастическим процессам, определенным оптической когерентностью. Такая алгебра была построена в работах Аккарди и Бугаса [31, 32]. Мы ассоциируем слагаемые гамильтониана радиационного взаимодействия слагаемыми инкрементов Ито приведенных образующих и используем их алгебраические свойства для построения кинетического уравнения открытой системы посредством определения дифференциала оператора эволюции всей системы. Последний может быть представлен в виде разложения по образующим введенной алгебры, использование свойств которой позволяет просуммировать ряд разложения всех порядков. Получено нелинейное кинетическое уравнение открытой механической системы, где слагаемые считывающего процесса встроены в операторозначные слагаемые, обусловленные оптической когерентностью сжатого поля. Для анализа трансляционных динамических характеристик механической системы мы анализируем уравнение для вигнеровской квазивероятности, следующее в гармоническом приближении полученного уравнения. Квантовый характер исходного сжатого широкополосного источника приводит к изменению сносового и возникновению диффузионного коэффициентов, что определяет изменение характера динамических характеристик гармонического осциллятора и свободной частицы по сравнению с воздействием на них широкополосного электромагнитного поля в классическом состоянии. Заметим, что в последнем случае динамика систем является чисто гамильтоновой.

2. Эффективный гамильтониан. Рассмотрим взаимодействие широкополосного электромагнитного поля в сжатом квантовом состоянии с зеркалом (гармоническим осциллятором). Корректное описание такого взаимодействия, осуществляемое посредством радиационного давления, в рамках нерелятивистской квантовой механики проведено в работе [30]. Здесь выведен, путем канонического квантования, лагранжиан взаимодействия многомодового электромагнитного поля и осциллятора. Он получен из уравнения собственного движения осциллятора, находящегося в точке q одномерного пространства, в векторном потенциале электромагнитных волн. Последний описан волновым уравнением в области пространства $[0, q(t)]$ с изменяющимся во времени, ввиду действия поля, вторым граничным условием. Квантование гамильтониана, с введением операторов канонической координаты $\hat{x}$ и импульса $\hat{p}$ осциллятора и переходом к представлению вторичного квантования для операторов рождения $b_\omega^\dagger$ и уничтожения b_ω мод электромагнитных полей, позволяет записать в общем виде гамильтониан системы. Следуя [30], мы будем использовать линейную аппроксимацию гамильтониана, подразумевая линейное изменение частоты полевой моды

$$\omega(\hat{q}) = \omega\left(1 - \frac{\hat{x}}{l}\right)$$

в условиях слабого взаимодействия подсистем, от расстояния $q = l + x, l \gg x$ между источником и зеркалом вследствие производимого радиационного давления. Здесь ω частота моды в условиях равновесного состояния зеркала, при котором расстояние источник–зеркало равно l. Эти же частоты здесь и далее отвечают и соответствующим индексам у операторов рождения и уничтожения фотонных полей.

Чтобы в рамках такого приближения рассматривать задачу о воздействии сжатого широкополосного электромагнитного поля, удобно зависимость от времени, связанную с широкополосным полем, выделить явно. Для этого используем унитарную симметрию квантовой теории и запишем исходный гамильтониан задачи в представлении, определяемом свободным гамильтонианом $H_{\rm sq}$ сжатого поля:

$$H(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_{\rm sq}t\right)H_{\rm ini}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_{\rm sq}t\right).$$

Принадлежность операторов такой "частной" картине Дирака отмечаем явным написанием аргумента времени t. Здесь $H_{\rm ini}$ исходный гамильтониан, выведенный в работе [30], формула (4.5), а через $H_{\rm sq}$ обозначен гамильтониан электромагнитного поля, подающийся на зеркало (предпоследний член в формуле (4.5) работы [30]). В заключительном слагаемом формулы (4.5) работы [30] в частном представлении Дирака содержатся члены как медленно меняющиеся, так и быстро меняющиеся во времени. Поскольку широкополосное сжатое поле предполагается дельта-коррелированным, то для корректного построения кинетического уравнения все быстро меняющиеся во времени слагаемые должны быть исключены унитарным преобразованием [33]. Здесь мы стандартно применяем алгебраическую резонансную теорию возмущений [34, 35] и получаем следующий из [30] исходный эффективный гамильтониан для нашего исследования

$$H(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\Omega\hat{x}^2}{2} - \\ - x\int d\omega d\omega^{'}\Gamma(\omega,\omega^{'})e^{-i(\omega-\omega^{'})t}b^{\dagger}_{\omega}b_{\omega^{'}}. \qquad (1)$$

Здесь интегрирование ведется по всей частотной полосе источника. Последнее слагаемое и есть единственное медленно меняющееся во времени (в частной картине Дирака) слагаемое из [30], а остальные отброшены. В случае классического электромагнитного поля оно интерпретируется как сила нормального давления, действующая на зеркало с его стороны. В выражении (1)

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\Omega\hat{x}^2}{2}$$

свободный гамильтониан изолированного осциллятора, константа взаимодействия осциллятора и электромагнитного поля имеет вид

$$\Gamma(\omega,\omega^{'}) = \frac{\hbar}{l}\sqrt{\omega\omega^{'}}.$$

В обычной ситуации такого рода задач, предполагается выделение одной высокодобротной резонаторной моды, которая возбуждается внешним широкополосным сжатым источником. Ввиду значительных последующих математических трудностей, предполагается также наличие внешнего сильного классического поля, что позволяет прийти к линеаризации задачи по отношению мощностей квантованного и классического внешних полей для последующего расчета динамических характеристик осциллятора. Это приближение изначально оставляет в последнем слагаемом гамильтониана единственное слагаемое, пропорциональное $b^{\dagger}_{\omega}b_{\omega}$, не предполагая никакой интерференции. Такое одномодовое приближение требует следование адиабатически медленному движению зеркала, чтобы рассеяние фотонов основной моды могло быть проигнорировано. Подчеркнем и отметим особо, что в нашей постановке такой линеаризации не требуется, поэтому внешние классические поля не включены нами в рассмотрение, а приведенный гамильтониан учитывает все квантовые интерференционные явления вблизи определенной собственной частоты резонатора. Мы считаем такую моду высокодобротной, ее спектральная ширина определена скоростью резонаторных потерь, которая определяет ширину контура линии взаимодействия. В используемых приближениях эта спектральная полоса много меньше спектральной полосы источника сжатого света, определяемой фазовым синхронизмом нелинейной среды. Вместе с тем проявление интерференционных межмодовых взаимодействий источника учтено. Для случая взаимодействия изолированного осциллятора с широкополосным полем в классическом состоянии, например, равновесного теплового излучения, имеет место гамильтонова динамика системы под действием стохастической внешней силы. Усредненная сила оказывается пропорциональной среднему числу фотонов данной частоты, которое определяет амплитуду смещения осциллятора.

3. Кинетическое уравнение. Гамильтониан эффективного взаимодействия (1) не содержит быстроменяющихся слагаемых, а потому может служить основой для построения квантового дифференциального стохастического уравнения динамики механического осциллятора в широкополосном квантованном поле. Для этого представим решение уравнения Шредингера посредством оператора эволюции $\mathcal{U}(t)$

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{T}\exp\left(\frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt' H(t')\right) = \mathcal{I} + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt' H(t') + \\ + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t\int_0^{t'} dt' dt'' H(t')H(t'') + ..., \qquad (2)$$

с начальным условием $\mathcal{U}(0) = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ – единичный оператор. Решение (2) позволяет найти волновую функцию системы в любой момент времени $|\Psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t)|\Psi(0)\rangle$, зная ее начальное состояние, которое считаем факторизованным $|\Psi(0)\rangle = |\Psi^S(0)\rangle \otimes |\Psi^F(0)\rangle$, где волновые функции осциллятора $|\Psi^S(0)\rangle$ и электромагнитного поля $|\Psi^F(0)\rangle$ в начальный момент времени. Считая, что электромагнитное поле является системой бесконечно большого числа степеней свободы, а взаимодействие с осциллятором слабое, оно в дальнейшем является термостатом, не изменяющим своего состояния и подчиняющегося только свободной эволюции.

Вид гамильтониана взаимодействия в рассматриваемом случае эквивалентен штарковскому взаимодействию атома с широкополосным квантованным электромагнитным полем, где он ассоциируется считывающим стохастическим случайным процессом. Названный процесс является одним из образующих алгебры Хадсона–Партасарати, применимой, однако, только для случая широкополосного электромагнитного поля в вакуумном состоянии. Поскольку сжатое состояние электромагнитного поля обладает отличной от нуля средней плотностью числа возбуждений, являясь в этом смысле "горячим" термостатом, непосредственное применение гамильтониана (1) для построения квантового стохастического дифференциального уравнения оказывается невозможно. Однако, как хорошо известно, широкополосное квантованное электромагнитное поле в сжатом состоянии, обладающее квантовыми межмодовыми корреляциями, может быть получено из вакуумного состояния в нелинейном процессе параметрической генерации света.

Действительно, будем предполагать, что исходное широкополосное по частотному распределению квантованное поле, действующее на осциллятор, получено в процессе вырожденной параметрической генерации света в квадратичной нелинейной среде. Пусть такая среда, которую будем считать бесконечно тонкой по сравнению с l, находится в начале координат рассматриваемого одномерного пространства. Внешняя когерентная волна частоты Ω_p вызывает процесс параметрического рассеяния, при котором рождаются коррелированные фотоны так, что $\Omega_p \approx \omega + \omega'$. Естественно, что спектральная ширина оптического излучения, определяемая законами сохранения энергии и волнового вектора, много больше характерной скорости релаксации осциллятора. Поэтому поле коррелированных фотонов может рассматриваться как широкополосное поле и в приведенных условиях слабого взаимодействия с осциллятором (1) считаться термостатом, а само взаимодействие отвечает условиям марковского приближения. Поле классической накачки выводится из оптической системы и не действует на осциллятор. Кроме того, будем предполагать, что и константа взаимодействия, отвечающая радиационному взаимодействию, не зависит от частоты мод генерируемых полей, а постоянна внутри спектрального интервала источника $\Gamma(\omega,\omega') \approx \Gamma(\Omega_p/2, \Omega_p/2) = \Gamma$, что тоже отвечает условиям марковского приближения. Такой параметрический источник, с математической точки зрения, удобно описать унитарным преобразованием Боголюбова исходных бозонных операторов $a^\dagger_\omega$ и a_ω, и $a^\dagger_{\Omega_p-\omega}$ и $a_{\Omega_p-\omega}$:

$$b_\omega = u a_\omega + v a^\dagger_{\Omega_p-\omega}, b^\dagger_\omega = u^* a^\dagger_\omega + v^* a_{\Omega_p-\omega}. \qquad (3)$$

Считаем $u = \operatorname{ch} r$, $v = e^{i\phi}\operatorname{sh} r$ в рамках рассматриваемой модели не зависящими от частоты. Здесь характеристики поля r – параметр сжатия и ϕ – разностная фаза классического поля накачки и поля генерации, определены нелинейностью среды и интенсивностью классической накачки. Преобразование (3) сохраняет коммутационные соотношения как для вакуумных полей на передней границы среды $[a_{\omega'}, a^\dagger_\omega] = \delta_{\omega',\omega}$, так и для генерируемых полей $[b_{\omega'}, b^\dagger_\omega] = \delta_{\omega',\omega}$, поскольку $|u|^2 - |v|^2 = 1$. Средние по вакуумному состоянию имеют следующий вид

$$\langle a_\omega a^\dagger_{\omega'}\rangle = \delta_{\omega,\omega'}, \langle a^\dagger_\omega a_{\omega'}\rangle = \langle a^\dagger_\omega\rangle = \langle a_\omega\rangle = 0. \qquad (4)$$

Представим эффективный гамильтониан (1), следуя преобразованию Боголюбова (3), посредством операторов $a^\dagger_\omega$ и a_ω в виде

$$H(t) = \hat{H}_0 + V(t), \qquad (5)$$
$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\Omega\hat{x}^2}{2},$$

$$V(t) = -\hat{x}\Gamma \int d\omega d\omega^{'} \Big\{ (n+1)a^{\dagger}_{\omega} a_{\omega^{'}} + \\ + n(a^{\dagger}_{\omega} a_{\omega^{'}} + \delta_{\omega,\omega^{'}}) + m a^{\dagger}_{\omega} a^{\dagger}_{\omega^{'}} + m^{*} a_{\omega} a_{\omega^{'}} \Big\} e^{-i(\omega^{'}-\omega)t}.$$

Структура слагаемого $V(t)$ приведенного гамильтониана (5), отвечающая взаимодействию посредством радиационного давления осциллятора с широкополосным электромагнитным полем, ассоциирует его слагаемые соответствующими двухквантовыми стохастическими процессами Леви [31, 32, 36]. Они отвечают su(2) алгебре, образующими которой являются считывающий процесс и два процесса, отвечающие оптической когерентности

$$\Lambda(t) = \int_0^t a^{\dagger}(s) a(s) ds, \\ \Phi(t) = \frac{1}{2}\int_0^t a(s) a(s) ds, \qquad (6) \\ \Phi^{\dagger}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t a^{\dagger}(s) a^{\dagger}(s) ds,$$

Их инкременты Ито

$$d\Lambda(t) = a^{\dagger}(t) a(t) dt,\ d\Phi(t) = a(t) a(t) dt, \\ d\Phi^{\dagger}(t) = a^{\dagger}(t) a^{\dagger}(t) dt, \qquad (7) \\ a(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega a_{\omega} \exp\Big(-i\Big(\omega - \frac{\Omega_p}{2}\Big)t\Big)$$

обладают нулевыми средними

$$\langle d\Lambda(t)\rangle = \langle d\Phi(t)\rangle = \langle d\Phi^{\dagger}(t)\rangle = 0. \qquad (8)$$

Условия (4) и коммутационное соотношение $\Big[a(t), a^{\dagger}(s)\Big] = \delta(t-s)$ позволяют для (7) написать следующие алгебраические соотношения

$$d\Lambda(t) d\Lambda(t) = d\Lambda(t), \qquad (9) \\ d\Phi(t) d\Phi^{\dagger}(t) = d\Lambda(t) + \gamma_{\Phi} dt, \\ d\Phi(t) d\Lambda(t) = 2 d\Phi(t), d\Lambda(t) d\Phi^{\dagger}(t) = 2 d\Phi^{\dagger}(t), \\ d\Lambda(t) dt = dt dt = d\Phi(t) dt = d\Phi^{\dagger}(t) dt = 0,$$

которые следует понимать как равенство соответствующих стохастических интегралов от произвольных неупреждающих операторов (см. [37]). Здесь использована известная в квантовой теории поля [38], перенормировка квадрата дельта-функции [32, 36],

$$\delta^2(t-s) \to 2\gamma_{\Phi}\delta(t-s). \qquad (10)$$

Она обоснована для определенного класса пробных функций [39, 40], а константа γ_{Φ} вводится и понимается как безразмерная константа двухфотонного взаимодействия [32, 36]. Это обстоятельство позволяет считать, что введенные стохастические источники обуславливают дельта-коррелированные во времени процессы.

На основе представленной алгебры можно записать решение уравнения Шредингера для оператора эволюции $\mathcal{U}(t)$ в картине Дирака по переменным внешнего поля. Перейдем к безразмерному времени $\tau = \Omega t$, безразмерным координате $\hat{Q} = \hat{x}\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}$ и импульсу $\hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\Omega}}$ осциллятора с коммутационным соотношением $\Big[\hat{P}, \hat{Q}\Big] = -i$. При этом в рамках приведенной интерпретации оператор эволюции следует квантовому стохастическому дифференциальному уравнению, а интегрирование слагаемых от стохастических процессов в (2) следует воспринимать как интегрирование по Ито

$$\int_0^{\tau} f(\tau^{'}) d\beta = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f(\tau_{i-1})\Big(\beta(\tau_i) - \beta(\tau_{i-1})\Big),$$

где $\beta = \Lambda, \Phi, \Phi^{\dagger}$, а предел понимается в среднеквадратичном смысле. При этом любая операторозначная функция $f(\tau)$ подынтегрального выражения с инкрементом случайного процесса является неупреждающей функцией времени, коммутирующей с инкрементами случайных процессов

$$\Big[f(\tau), d\Phi^{\dagger}(\tau)\Big] = \Big[f(\tau), d\Phi(\tau)\Big] = \Big[f(\tau), d\Lambda(\tau)\Big] = 0.$$

Тогда решение (2) представим в виде

$$\mathcal{U}(\tau) = \lim_{N\to\infty}\Big[\exp\Big(\frac{H(\tau_{N-1})}{i}(\tau_N - \tau_{N-1})\Big) \times \\ \times \exp\Big(\frac{H(\tau_0)}{i}(\tau_1 - \tau_0)\Big)\Big]$$

и определим дифференциал оператора эволюции

$$d\mathcal{U}(\tau) = \Big(\exp(-i\big[H_0 d\tau + (Y_{\Lambda} d\Lambda(\tau) + \\ + Y_{\Phi} d\Phi^{\dagger}(\tau) + Y^{*}_{\Phi} d\Phi(\tau))\eta\hat{Q}\big]) - 1\Big)\mathcal{U}(\tau), \qquad (11)$$

представленный в экспоненциальной форме от инкрементов обезразмеренных образующих введенной алгебры. Здесь $Y_{\Lambda} = 2n+1$, $Y_{\Phi} = m$, $Y^{*}_{\Phi} = m^{*}$, введена безразмерная константа

$$\eta = \frac{4\pi}{\Omega_p\sqrt{\hbar m\Omega}}\Gamma,$$

определен оператор $H_0 = 1/2(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2)$.

Представление дифференциала матрицы плотности всей системы в следующем виде

$$
\begin{aligned}
&d\rho(\tau) = \rho(\tau + d\tau) - \rho(\tau) = \\
&= \Big(\mathcal{U}(\tau) + d\mathcal{U}(\tau)\Big)|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|\Big(\mathcal{U}^\dagger(\tau) + d\mathcal{U}^\dagger(\tau)\Big) = \\
&= d\mathcal{U}(\tau)|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|\mathcal{U}^\dagger(\tau) + \mathcal{U}(\tau)|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|d\mathcal{U}^\dagger(\tau) + \\
&\quad + d\mathcal{U}(\tau)|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|d\mathcal{U}^\dagger(\tau),
\end{aligned} \tag{12}
$$

позволяет получить, путем усреднения по состоянию термостата, матрицу плотности $\rho^S(t)$ осциллятора. Используя в представлении (12) разложение экспоненты в ряд, свойства введенной алгебры (9), и последующего усреднения по вакуумному состоянию с учетом (8), получим кинетическое уравнение обобщенной ланжевеновской динамики осциллятора

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho^S}{\partial\tau} = -i\Big[H_0, \rho^S\Big] + \frac{1}{4}\gamma_\Phi|m|^2 \times \\
&\times\Big[\frac{\mathcal{Y} + i2\mathcal{R}}{\mathcal{R}^2}\rho^S + \rho^S\frac{\mathcal{Y}^\dagger - i2\mathcal{R}}{\mathcal{R}^2} + \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{R}}\rho^S\frac{\mathcal{Y}^\dagger}{\mathcal{R}}\Big].
\end{aligned} \tag{13}
$$

Здесь операторозначная функция

$$
\mathcal{Y} = \Big(\exp\big(-i2\mathcal{R}\big) - 1\Big), \quad \mathcal{R} = \eta(2n+1)\hat{Q} \tag{14}
$$

понимается как как разложение в ряд по оператору $\mathcal{R}$, она определяет обобщенную ланжевеновскую динамику осциллятора. Уравнение (13) имеет лимбладовский вид и отражает факт встраивания слагаемых считывающего процесса в операторозначные слагаемые оптической когерентности. Отметим, что приведенное уравнение является точным, благодаря алгебраическим свойствам инкрементов Ито, образующих двухквантовых процессов Леви. Здесь удается полностью просуммировать все слагаемые разложения экспоненциального представления дифференциала оператора эволюции системы (11) в виде бесконечного ряда.

4. Динамические характеристики. Для исследования динамики поведения осциллятора, перейдем в уравнении (13) к вигнеровскому представлению матрицы плотности

$$
W(x,p,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\xi \exp\Big(-i\xi p\Big)\left\langle x+\xi|\rho|x-\xi\right\rangle,
$$

определяющему функцию квазивероятности $W(x,p,\tau)$ координаты и импульса рассматриваемого осциллятора. Представляя нелинейный релаксационный оператор (14) разложением до второго порядка по переменной ξ, имеем следующее уравнение Фоккера–Планка, описывающее динамику осциллятора

$$
\begin{aligned}
&\partial_\tau W(x,p,\tau) = \\
&= \Big\{-p\partial_x + (x-A)\partial_p + B\partial_p^2\Big\}W(x,p,\tau),
\end{aligned} \tag{15}
$$

где дополнительно к эволюции гармонического осциллятора возникают сносовый A и диффузионный B коэффициенты

$$
\begin{aligned}
&A = \tfrac{4}{3}(2n+1)\eta\gamma_\Phi|m|^2, \\
&B = \tfrac{1}{2}(2n+1)^2\eta^2\gamma_\Phi|m|^2, \\
&n = \operatorname{sh}^2 r, |m|^2 = n(n+1).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Они определены параметрами внешнего широкополосного сжатого источника, константами взаимодействия и ренормировки.

Не умаляя общности, проведем дальнейший анализ динамики осциллятора в условиях, когда начальные средние значения координаты и импульса осциллятора равны нулю $\langle x_0\rangle = \langle p_0\rangle = 0$, а их начальные дисперсии отвечают когерентному состоянию $\langle\Delta x_0^2\rangle = \langle\Delta p_0^2\rangle = 1/2$. Из уравнения (15) нетрудно получить следующую, разрешимую преобразованием Лапласа, линейную систему для первых и вторых моментов

$$
\begin{aligned}
&\partial_\tau\langle x\rangle = \langle p\rangle, \partial_\tau\langle p\rangle = -\langle x\rangle + A, \\
&\partial_\tau\langle p^2/2\rangle = -\langle xp\rangle + A\langle p\rangle + B, \\
&\partial_\tau\langle xp\rangle = -\langle p^2\rangle + A\langle x\rangle - \langle x^2\rangle, \partial_\tau\langle x^2/2\rangle = 2\langle xp\rangle.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Ее решение определяет осцилляционное поведение динамических средних

$$
\langle x(\tau)\rangle = A(1-\cos(\tau)), \langle p(\tau)\rangle = A\sin(\tau).
$$

Значение параметра A определяет величину амплитуды гармонического колебания, существенным образом зависящей от состояния внешнего широкополосного поля. Так, в случае воздействия на осциллятор широкополосным классическим полем амплитуда колебаний определяется лишь первой степенью среднего числа фотонов на единичный спектральный интервал, в то время как для случая возбуждения осциллятора широкополосным квантованным полем в сжатом состоянии, она определяется третьей степенью этого же числа.

Другим существенным отличием возбуждения широкополосным полем в классическом состоянии и полем в сжатом состоянии является существенная разница в поведении вторых моментов динамики осциллятора. Квантованное сжатое поле определяет появление диффузионного коэффициента B

в уравнении (15), который в точности равен нулю при гамильтоновой динамике осциллятора в условиях классического когерентного состояния поля возбуждения. Дисперсии операторов координаты и импульса, а также и корреляция между ними определены следующими решениями (15)

$$\langle \Delta x^2 \rangle_\tau = \frac{\langle \Delta x_0^2 \rangle}{2}(1+\cos(2\tau)) + \frac{\langle \Delta p_0^2 \rangle}{2}(1-\cos(2\tau)) + \frac{B}{2}(\tau^2 - \sin(2\tau)),$$
$$\langle \Delta p^2 \rangle_\tau = \frac{\langle \Delta x_0^2 \rangle}{2}(1-\cos(2\tau)) + \frac{\langle \Delta p_0^2 \rangle}{2}(1+\cos(2\tau)) + \frac{B}{2}(\tau^2 + \sin(2\tau)), \quad (18)$$
$$\langle \Delta xp \rangle_\tau = -\frac{\langle \Delta x_0^2 \rangle}{2}\sin(2\tau) + \frac{\langle \Delta p_0^2 \rangle}{2}\sin(2\tau) + \frac{B}{2}(\tau^2 - \cos(2\tau)),$$

где $\langle \Delta\alpha\beta \rangle = \langle \alpha\beta \rangle - \langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle$. При воздействии на осциллятор поля в классическом состоянии, для когерентного начального состояния осциллятора имеет место сохранение дисперсий его координаты и импульса в любой момент времени и отсутствие каких-либо корреляций между этими компонентами. Появляющийся в уравнении (15) отличный от нуля диффузионный коэффициент, связанный с учетом необратимой релаксации осциллятора в широкополосном сжатом поле, приводит к расплыванию и увеличению дисперсий начального когерентного состояния осциллятора. На больших временах $\tau \to \infty$ дисперсии координаты, импульса и их ковариация растут со временем квадратичным образом, что и является отличительным признаком воздействия на осциллятор квантованного широкополосного поля в сжатом состоянии. На начальной стадии эволюции в их динамике проявляется характерная осцилляционная зависимость, показанная на рис. 1. На раннем этапе эволюции возникает сжатое состояние координаты осциллятора, кроме того, видно и дальнейшее стремление обеих дисперсий к квадратичной зависимости от времени на больших временах.

Найденные отличия в динамике осциллятора при радиационном воздействии широкополосных электромагнитных полей в классических и квантовых состояниях проявляются и при рассмотрении динамики свободной частицы, что актуально для задач квантового транспорта. Описание динамики подчиняется в этом случае уравнению (15) с отсутствием в правой части сносового слагаемого $x\partial_p$, отвечающего потенциальной энергии частицы. Свободная динамика определяется только ускоренным движением

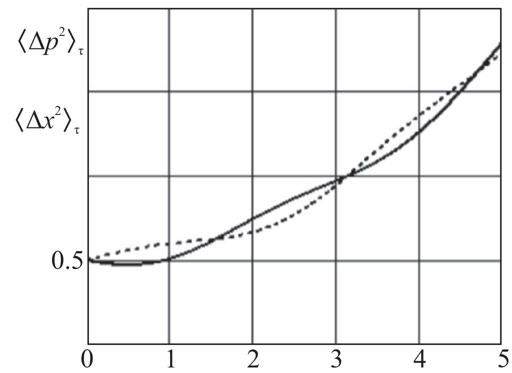

Рис. 1. Графики зависимостей дисперсий координаты $\langle \Delta x^2 \rangle_\tau$ (сплошная кривая) и импульса $\langle \Delta p^2 \rangle_\tau$ (штриховая кривая) от безразмерного времени τ на начальном этапе эволюции. Прослеживается тенденция к квадратичной зависимости от времени обеих дисперсий на больших временах. На начальном этапе эволюции имеет место сжатое состояние координаты

частицы, определенным значением параметра A, который зависит от состояния воздействующего на нее поля. Так же как в рассмотренном случае с осциллятором, этот параметр в квантованном сжатом поле определен кубом среднего числа фотонов на данной частоте, в то время как для классического состояния – его первой степенью. Дисперсии координаты и импульса также изменяются. Известным результатом здесь является сохранение дисперсии импульса и квадратичная зависимость дисперсии координаты от времени в случае воздействия поля в классическом состоянии [41]. При воздействии на частицу квантованного широкополосного электромагнитного поля в сжатом состоянии, дисперсия импульса оказывается пропорциональна времени, а дисперсия координаты пропорциональна времени в кубе.

Приведем оценки рассматриваемых явлений. Следуя работам [42, 43], выберем значение массы осциллятора $m \approx 10^{-19}$ кг (карбоновая нанотрубка), его собственную механическую частоту $\Omega \approx 1$ МГц, время затухания $T_{\mathrm{damp}} \approx 10^{-3}$ с, источник сжатого поля с центральной частотой 1 ГГц, константу взаимодействия поле–осциллятор $\Gamma = 10^{-22}$ Н при длине резонатора 10^{-3} м, безразмерную константу двухфотонного взаимодействия 10. В этих условиях амплитуда колебаний осциллятора в квантованном широкополосном поле в сжатом состоянии составляет порядка 10^{-14} м. Факт воздействия квантованным полем должен подтверждаться кубической зависимостью от среднего числа фотонов поля. Дисперсия координаты при этом по порядку имеет величину 10^{-16} м.

5. Заключение. Квантовые стохастические дифференциальные уравнения [37] дают возможность не только рассматривать динамику открытых систем в термостате при ненулевой температуре, но и развивать оригинальный подход к квантовой термодинамике. Учет ненулевой температуры можно также проводить в технике термополевой динамики [44, 45]. Мы проанализировали ситуацию, когда подходы [37, 44, 45] принципиально не применимы, поскольку в рассмотренной задаче нет прямых одноквантовых переходов в открытой системе с излучением или поглощением кванта термостата. Это связано с использованием в [37] известного приближения вращающейся волны, которое в терминах алгебраической теории возмущений является приближением первого порядка для эффективного гамильтониана открытой системы. Вместо термополевого обобщения рассмотренной ситуации мы воспользовались алгебраической теорией возмущений с точностью до второго порядка по взаимодействию с термостатным полем [34, 35], что позволило описывать процессы с переизлучением квантов без прямых одноквантовых переходов в открытой системе. В результате, в задаче возникли стохастические двухквантовые процессы Леви, сходные по квадратичной структуре с квантовым считающим процессом. Однако, чтобы выразить оператор взаимодействия с таким термостатом при ненулевой температуре, нам пришлось применить преобразование Боголюбова, которое эффективно в случае осцилляторных квантовых систем [46]. В случае сжатого света использованное в статье преобразование Боголюбова естественно возникает при представлении сжатого света как результата эволюции вакуумного состояния электромагнитного поля без фотонов в параметрическом рассеянии [47] или в идеальном двухфотонном усилителе [48] и таким образом, отлично от использованного в [45]. В результате в математической формулировке задачи возникло квантовое стохастическое дифференциальное уравнение в терминах только двухквантовых случайных процессов Леви, которое является новым, и на основе которого удалось получить оригинальное кинетическое уравнение динамики механической системы при радиационном взаимодействии с широкополосным электромагнитным полем в сжатом состоянии. Таким образом, полученные результаты дополняют список физических задач [49, 50], формулировку и решение которых удалось получить в терминах только двухквантовых случайных процессов.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Национального исследовательского центра "Курчатовский институт" и Санкт-Петербургского университета государственной противопожарной службы МЧС России. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. Yu. V. Nazarov and Ya. M. Blanter, *Quantum transport. Introduction to nanoscience* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
2. M. Acciai, L. Arrachea, and J. Splettstoesser, "Quantum transport phenomena induced by time-dependent fields", arxiv.org/cond-mat.2505.22472; DOI: 10.48550/arXiv.2505.22472.
3. G. T. Craven, T. Bartsch, and R. Hernandez, "Chemical reactions induced by oscillating external fields in weak thermal environments", J. Chem. Phys. **142**, 074108 (2015).
4. S. Xu, R. Eisenberg, Z. Song, and H. Huang, "Coupled chemical reactions: Effects of electric field, diffusion, and boundary control", Phys. Rev. E **108**, 064413 (2023).
5. V. S. Letokhov, *Laser control of atoms and molecules*, (Oxford Academic Press, Oxford, 2007).
6. L. A. Akopyan, O. Lakhmanskaya, S. Yu. Zarutskiy, N. D. Korolev, O. Guseva, and K. Lakhmanskiy, "Numerical simulation of the performance of single qubit gates for trapped ions", Письма в ЖЭТФ **116**, 570 (2022) [L. A. Akopyan, O. Lakhmanskaya, S. Yu. Zarutskiy, N. D. Korolev, O. Guseva, and K. Lakhmanskiy, "Numerical simulation of the performance of single qubit gates for trapped ions", JETP Lett. **116**, 580 (2022)].
7. K. Hammerer, M. Aspelmeyer, E. S. Polzik, and P. Zoller, "Establishing EPR-channels between Nanomechanics and Atomic Ensembles", Phys. Rev. Lett. **102**, 0205501 (2009).
8. B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott et al. (Collaboration), "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger", Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
9. C. W. Gardiner, "Inhibition of atomic phase decays by squeezed light: A direct effect of squeezing", Phys. Rev. Lett. **56**, 1917 (1986).
10. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, "Эффекты штарковского взаимодействия в динамике атомной системы в широкополосном сжатом электромагнитном поле", Письма в ЖЭТФ **122**, 25 (2025) [A. I. Trubilko and A. M. Basharov, "Effects of the stark interaction in the dynamics of an atomic system in a broadband squeezed electromagnetic field", JETP Lett. **122**, 22 (2025)].

11. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, “Релаксация одиночного атома в поле широкополосного сжатого света”, Письма в ЖЭТФ **122**, 545 (2025) [A. I. Trubilko and A. M. Basharov, “Relaxation of a single atom in a broadband squeezed light field”, JETP Lett.**122**, 568 (2025)].

12. P. Zanardi and M. Rasetti, “Noiseless Quantum Codes”, Phys. Rev. Lett. **79**, 3306 (1997).

13. А. М. Башаров, “Перепутывание атомных состояний при коллективном радиационном распаде”, Письма в ЖЭТФ **75**, 151 (2002) [A. M. Basharov, “Entanglement of atomic states upon collective radiative decay”, JETP Lett. **75**, 123 (2002)].

14. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, “Перенос квантовых корреляций при неунитарной эволюции”, Письма в ЖЭТФ **89**, 571 (2009) [V. N. Gorbachev and A. I. Trubilko, “Transfer of quantum correlations in nonunitary evolution”, JETP Lett. **89**, 479 (2009)].

15. В. Н. Горбачев, А.И. Трубилко, “Перенос квантовых корреляций света на атомы”, Письма в ЖЭТФ **92**, 689 (2010) [V. N. Gorbachev and A. I. Trubilko, “Transmission of quantum correlations of light into atoms”, JETP Lett. **92**, 624 (2010)].

16. В. Б. Брагинский, “Классические и квантовые ограничения на обнаружение слабых возмущений макроскопического осциллятора”, ЖЭТФ **53**, 1434 (1967) [V. B. Braginsky, “Classical and quantum restrictions on the detection of weak disturbances of a macroscopic oscillator”, JETP **26**, 831 (1968)].

17. C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg, and M. Zimmermann, “On the measurement of a weak classical force coupled to a harmonic oscillator: Experimental progress”, Rev. Mod. Phys. **52**, 341 (1980).

18. V. B. Braginsky, Y. I. Vorontsov, and K. S. Thorne, “Quantum nondemolition measurements”, Science **209**, 547 (1980).

19. S. L. Danilishin and F. Y. Khalili, “Quantum Measurement Theory in Gravitational-Wave Detectors”, Living Rev. Relativ. **15**, 5 (2012).

20. S. L. Danilishin, F. Y. Khalili, and H. Miao, “Advanced quantum techniques for future gravitational-wave detectors”, Living Rev. Relativ. **22**, 2 (2019).

21. В. Б. Брагинский, Ю. И.Воронцов, Ф. Я. Халили, “Оптимальные квантовые измерения в детекторах гравитационного излучения”, Письма в ЖЭТФ **27**, 296 (1978) [V. B. Braginsky, Yu. I. Vorontsov, and F. Ya. Khalili, “Optimal quantum measurements in gravitational radiation detectors”, JETP Lett. **27**, 296 (1978)].

22. K. S. Thorne, R. W. P. Drever, C. M. Caves, M. Zimmermann, and V. D. Sandberg, “Quantum Nondemolition Measurements of Harmonic Oscillators”, Phys. Rev. Lett. **40**, 667 (1978).

23. V. B. Braginsky and F. Ja. Khalili, “Gravitational wave antenna with QND speed meter”, Phys. Lett. A **147**, 251 (1990).

24. Ф. Я. Халили, “Квантовые измерения в детекторах гравитационных волн”, УФН **186**, 1059 (2016) [F. Ya. Khalili, “Quantum measurements in gravitational-wave detectors”, Phys.-Uspekhi **59**, 968 (2016)].

25. F. Acernese, M. Agathos, L. Aiello et al. (Collaboration), “Increasing the Astrophysical Reach of the Advanced Virgo Detector via the application of squeezed vacuum states of light”, Phys. Rev. Lett. **123**, 231108 (2019).

26. M. Tse, H. Yu, N. Kijbunchoo et al., (Collaboration), “Quantum-Enhanced Advanced LIGO Detectors in the era of gravitational-wave astronomy”, Phys. Rev. Lett. **123**, 231107 (2019).

27. W. P. H. Nielsen, Y. Tsaturyan, C. B. Moller, E. S. Polzik, and A. Schliesser, “Multimode optomechanical system in the quantum regime”, PNAS **114**, 62 (2016).

28. K. Jahne, C. Genes, K. Hammerer, M. Wallquist, and E. S. Polzik, “Cavity-assisted squeezing of a mechanical oscillator”, Phys. Rev. A **79**, 063819 (2009).

29. I. Galinskiy, G. Enzian, M. Parniak, and E. S. Polzik, “Nonclassical correlations between photons and phonons of center-of-mass motion of a mechanical oscillator”, Phys. Rev. Lett. **133**, 173605 (2024).

30. C. K. Law, “Interaction between a moving mirror and radiation pressure”, Phys. Rev. A **51**, 2537 (1995).

31. L. Accardi and A. Boukas, *Ito Calculus and Quantum White Noise Calculus*, in: F. E. Benth, G. Di Nunno, T. Lindstrom, B. Oksendal, T. Zhang (editors), *Stochastic Analysis and Applications. Abel Symposia* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2007), v. 2.

32. L. Accardi and A. Boukas, “Renormalized higher powers of white noise (RHPWN) and conformal field theory”, Infinite Dimensional Analis, Quantum Probability and Related Topics **9**, 353 (2006).

33. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, “Иерархия времен открытых оптических квантовых систем и роль эффективного гамильтониана при применении приближения белого шума”, Письма в ЖЭТФ **111**, 632 (2020) [A. I. Trubilko and A. M. Basharov, “Hierarchy of times of open optical quantum systems and the role of the effective Hamiltonian in the white noise approximation”, JETP Lett. **111**, 532 (2020)].

34. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear optical waves* (Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1999).

35. А. М. Башаров, “Алгебраическая резонансная теория возмущений в задачах нелинейной и квантовой оптики”, Вестник МГУ сер. 3. Физ. Астрон. **80**, 2550401 (2025) [A. M. Basharov, “Algebraic resonance perturbation theory in problems of nonlinear and quantum optics”, Moscow University Physics Bulletin **80**, 845 (2025)].

36. L. Accardi, U. Franz, and M. Skeide, "Renormalized squares of white noise and other non-Gaussian noises as Levy processes on real Lie algebras", Commun. Math. Phys. **228**, 123 (2002).
37. C.W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum noise. A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2004).
38. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, *Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля* (Наука, Москва, 1969) [N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, and I. T. Todorov, *Introduction to axiomatic quantum field* (W. A. Benjamin, Inc. Advanced book program reading, Massachusets, 1975)].
39. В. К. Иванов, "Об алгебре элементарных обобщенных функций", Докл. АН СССР **246**, 805 (1979) [V. K. Ivanov, "Ob algebre elementarnyh obobjenyh funkcii", Dokledy AN SSSR **246**, 805 (1979)].
40. В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных* (Наука, М., 1964) [V. S. Vladimirov, *Les fonctions de plusieurs variables complexes et leur application a la theoric quantique des champs* (Dunod, France, 1967)].
41. Х.-П. Бройер, Ф. Петруччионе, *Теория открытых квантовых систем* (НИЦ НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, ИКИ, М., Ижевск, 2010) [in Russian] [H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The theory of open quantum systems* (Oxford Academic Press, Oxford, 2002)].
42. Yi-Fan Qiao, J.-H. An, and P.-B. Li, "Mechanical Squeezed-Fock Qubit: Towards Quantum Weak-Force Sensing", quant-ph arxiv: 2507.13161v2; https://doi.org/10.48550/arXiv.2507.13161.
43. S. Venkatachalam and X. Zhou, "Effects of stochastic forces on the non-linear behaviour of a silicon nitride membrane nanoelectromechanical resonator", Nanotechnology **34**, 215202 (2023).
44. Х. Умэдзава, Х. Мацумото, М. Татики, *Термополевая динамика и конденсированные состояния* (Мир, М., 1985) [H. Umezawa, H. Matsumoto, and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, N.Y., Oxford, 1982)].
45. A. Teretenkov and O. Lychkovskiy, "Thermofield double states as quantum many-body scars", Phys. Rev. B **110**, 241105 (2024).
46. А. Е. Теретенков, "Квадратичная диссипативная эволюция гауссовских состояний", Матем. заметки **100**, 636 (2016) [A. E. Teretenkov, "Quadratic Fermionic Dynamics with Dissipation", Math. Notes **102**, 846 (2017)].
47. Б. Я. Зельдович, Д. Н. Клышко, "Статистика поля при параметрической люминесценции", Письма в ЖЭТФ **9**, 69 (1969) [B. Ya. Zel'dovich, D.N. Klyshko, "Field Statistics in Parametric Luminescence", JETP Lett. **9**, 40 (1969)].
48. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (Физматлит, М., 2000) [in Russian] [L. Mandel and E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)].
49. A. Barchielli, "Measurement theory and stochastic differential equations in quantum mechanics", Phys. Rev. A **34**, 1642 (1986).
50. A. N. Pechen, "Quantum stochastic equation for test particle interacting with dilute Bose gas", J. Math. Phys. **45**, 400 (2004).