Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 8, с. 567 – 573

Геометрическая фаза двухчастичной волновой функции Бете

В. А. Томилин[+*1)], *А. М. Ростом*[+], *Л. В. Ильичёв*[+]

[+]*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

[*]*Новосибирский государственный технический университет, 630073 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 6 ноября 2025 г.
После переработки 20 марта 2026 г.
Принята к публикации 20 марта 2026 г.

Рассмотрена задача о генерации геометрической фазы в системе пары взаимодействующих бозонов, удерживаемых в пространственной конфигурации в виде узкого кольца с локализованным потенциальным дефектом. Геометрическая фаза возникает в результате вариации параметров дефекта. Взаимодействие между частицами учтено в рамках модели Либа–Линигера. Найден энергетический спектр и описана его зависимость от параметров задачи. Показано, что взаимодействие приводит к увеличению геометрической фазы при выбранном контуре вариации параметров дефекта. Мотивация продиктована предложенными ранее идеями квантового гироскопа и квантового акселерометра на атомарных конденсатах Бозе–Эйнштейна.

DOI: 10.7868/S3034576626040211

1. Введение. Точно решаемые модели в квантовой механике являются своего рода “пробными камнями”, важными для более глубокого понимания физических эффектов в более сложных реальных системах. Ввиду развития экспериментальных методов, связанных с физикой ультрахолодных атомов, особую важность приобретают точно решаемые модели для многочастичных систем. Оптические и магнито-оптические ловушки сейчас позволяют создавать и эффективно контролировать низкоразмерные пространственные конфигурации атомов [1, 2]. Хотя точно решаемые модели не в состоянии описать весь комплекс наблюдаемых в эксперименте явлений, тем не менее теоретические результаты, полученные в рамках даже относительно простых, “игрушечных” моделей, могут быть полезны при анализе экспериментальных данных. Основной интерес к ним связан с относительно простым вычислением корреляционных функций, что обеспечивает возможность непосредственного сравнения с экспериментом [3–5].

Теоретические и экспериментальные исследования низкоразмерных атомных систем дают новые фундаментальные знания о физике многочастичных квантовых корреляций [6–10], поведении многочастичных систем в термодинамическом пределе [11–13] и физике фазовых переходов [14, 15]. Вместе с тем подобные системы имеют ряд актуальных приложений, в том числе в роли инерциальных датчиков [16], по принципу действия аналогичных устройствам SQUID.

В серии работ [17–19] была разработана оригинальная концепция квантового гирометра и квантового акселерометра, основным элементом которых, чувствительным к неинерциальности системы отсчета, является пара мод атомарного конденсата, имеющих кольцевую пространственную конфигурацию с локализованной неоднородностью – дефектом. Принципиально важна специфика дефекта, задающая ориентацию на кольце. Различие конструкций гироскопа и акселерометра сводится к различию пространственного положения кольцевых атомарных мод. При этом измеряемой величиной, несущей информацию об угловой скорости вращения (в случае гироскопа) или линейного ускорения (в случае акселерометра), являлась разница геометрических фаз, приобретаемая состояниями мод в результате определенной эволюции параметров дефекта. Недостатком этой модели являлось пренебрежение взаимодействием между частицами, которое в общем случае играет весьма существенную роль в низкоразмерных системах. В данной работе предлагается учесть это взаимодействие в рамках модели Либа–Линигера [20, 21]. Это одна из наиболее известных точно решаемых многочастичных моделей, описывающая систему бозонов с контактным отталкивающим взаимодействием в одномерной геометрии с использованием анзаца Бете [22]. Известны решения для периодических граничных условий (кольцевой геометрии) [21] и для модели частиц в непрони-

[1)]e-mail: 8342tomilin@mail.ru

цаемом “ящике” [23]. В контексте возможных приложений к упомянутой выше теории перспективных квантовых инерциальных сенсоров представляет интерес учет взаимодействия между бозонами в одномерной кольцевой конфигурации с дефектом специального вида. Данная работа является первым шагом в изучении влияния взаимодействия на генерацию геометрической фазы, возникающей в результате вариации параметров, задающих структуру дефекта. Для рассмотрения была выбрана простейшая двухчастичная модель[2], которая тем не менее явно демонстрирует роль взаимодействия в процессе генерации геометрической фазы.

2. Модель. Рассматривается система двух тождественных бозонов с импульсами $\hat{k}_1$ и $\hat{k}_2$ на одномерном кольце[3] длины L. Положение частиц на кольце описывается угловой координатой $x \in [0, L)$. Взаимодействие между частицами отталкивающее, имеет точечный характер и описывается константой c. Уравнение Шрёдингера в системе единиц $\hbar = m = 1$ таким образом имеет вид

$$\left(\frac{\hat{k}_1^2}{2}+\frac{\hat{k}_2^2}{2}\right)\Psi(x_1,x_2)+c\delta(x_1-x_2)\Psi(x_1,x_2) = E\Psi(x_1,x_2). \tag{1}$$

В таком виде задача сводится к двухчастичному варианту известной модели Либа–Линигера. Однако, в отличие от классической однородной ситуации, наличие локализованного потенциала, формирующего дефект, налагает нетривиальные граничные условия. Поскольку базисом решений (1) являются плоские волны, естественным оказывается описание дефекта в рамках формализма трансфер-матриц [30]. Будем далее полагать, что рассеивающие свойства дефекта не зависят от импульсов частиц[4]. Трансфер-матрица $\mathcal{M}$ принадлежит группе $SU(1,1)$ и связывает одночастичные амплитуды падающей и отраженной плоских волн по разные стороны дефекта (см. рис. 1):

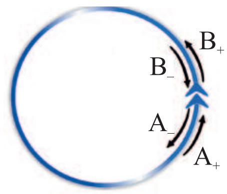

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема кольцевой потенциальной конфигурации с дефектом. Отмечены падающие и отраженные волны

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} \doteq \mathcal{M}\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix}; \qquad |u|^2 - |v|^2 = 1. \tag{2}$$

Известно понятие элементарных волновых функций Бете [31], представляющих решение в одном из симплексов пространства координат частиц – в нашем случае это область $x_1 < x_2$ (решение во второй области достраивается из соображений симметрии бозонной волновой функции по перестановке координат частиц). Они специфицируются импульсами частиц. Поскольку дефект порождает отраженные волны, каждый импульс в нашей модели появляется с обоими знаками. Как следствие, элементарная волновая функция $\Psi^{(el)}(x_1,x_2)$ в нашей модели в случае двух частиц оказывается суперпозицией четырех элементарных волновых функций Бете:

$$\begin{gathered}\Psi^{(el)}(x_1,x_2) = \Psi_{\{k_1,k_2\}}(x_1,x_2) + \Psi_{\{k_1,-k_2\}}(x_1,x_2) + \\ + \Psi_{\{-k_1,k_2\}}(x_1,x_2) + \Psi_{\{-k_1,-k_2\}}(x_1,x_2), \\ \Psi(x_1,x_2) = H(x_2-x_1)\Psi^{(el)}(x_1,x_2) + \\ + H(x_1-x_2)\Psi^{(el)}(x_2,x_1),\end{gathered} \tag{3}$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, а слагаемые с нижним индексом $\{k,k'\}$ соответствуют симметризованным по перестановкам двухчастичным функциям, построенным из плоских волн с импульсами k и k':

$$\Psi_{\{k_1,k_2\}}(x_1,x_2) = \sum_{p=e,\sigma} A^{(p)}(k_1,k_2)\cdot\exp[\sum_{j=1,2} \imath k_j x_{p(j)}], \tag{4}$$

где символ e обозначает тождественную перестановку, а σ – перестановку (12).

Любая трансфер-матрица может быть представлены в виде произведения “элементарных” трансфер-матриц, причем каждый из сомножителей относится к одной из трех канонических форм [30]. Мы будем использовать две из них (такой же выбор сделан в работах [17] и [19]):

[2] Несмотря на то, что модель Либа–Линигера относится к числу точно решаемых, ее практическое применение для большого числа частиц, и в особенности ее обобщения на нетривиальные потенциальные конфигурации, является достаточно трудной задачей. Тем не менее даже модели с малым числом частиц демонстрируют нетривиальные эффекты и имеют практические приложения. Примером может служить работа [24], в которой обсуждается динамика пары атомов, изначально находящихся в $NOON$-состоянии в одномерной яме, разделенной δ-образным барьером.

[3] Захват холодных атомов в оптические ловушки тороидальных конфигураций с хорошей поперечной локализацией была продемонстрирована [25–27]; в частности, реализация бозе-конденсата в подобной геометрии рассматривалась в [28, 29].

[4] Это условие является ключевым для возможности дальнейшего решения. Мы вернемся к обсуждению этого обстоятельства в заключительной части работы.

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} e^{\imath\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\imath\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh\eta & \imath\sinh\eta \\ -\imath\sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Первая матрица отвечает изменению фаз прошедших волн на α, а вторая – изменению их амплитуд, с коэффициентом прохождения, равным $1/\cosh\eta$, и дополнительным изменением фазы на $\pi/2$ при отражении. Таким образом, оказывается выполненным необходимое для потенциальных гироскопических применений условие – кольцо становится ориентируемым, поскольку порядок умножения “элементарных” трансфер-матриц одновременно задает направление обхода кольца, относительно которого определяются знаки импульсов частиц в (3).

Поскольку трансфер-матрица описывает рассеяние только одной частицы, запись граничных условий для двухчастичных амплитуд $A^{(p)}(k_1,k_2)$, входящих в (3), (4) требует дополнительных соображений. Аргументы k_1, k_2 относятся к разным частицам, поэтому ясно, что трансфер-матрица должна связывать амплитуды с фиксированным значением одного из аргументов. Пусть, к примеру, амплитуды плоских волн в левой (по отношению к направлению обхода кольца) окрестности барьера равны $A^{(e)}(k_1,k_2)$ и $A^{(e)}(-k_1,k_2)$. Тогда соответствующие амплитуды в правой окрестности барьера должны отличаться фазовым множителем $e^{\pm\imath k_1 L}$, набегающим в результате обхода кольца в том или ином направлении, а также перестановкой координат частиц. При этом нет необходимости учитывать изменение амплитуды в результате взаимодействия со второй частицей – этот эффект уже учтен изменением символа перестановки. Рассмотрение рассеяния частицы с номером 2 сводится к одновременной замене $\sigma \to e$ и перестановке импульсов k_1 и k_2. В результате имеем следующий набор граничных условий:

$$\begin{pmatrix} A^{(e)}(k_1,k_2) \\ A^{(e)}(-k_1,k_2) \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} A^{(\sigma)}(k_1,k_2)e^{\imath k_1 L} \\ A^{(\sigma)}(-k_1,k_2)e^{-\imath k_1 L} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} A^{(\sigma)}(k_1,k_2) \\ A^{(\sigma)}(k_1,-k_2) \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} A^{(e)}(k_1,k_2)e^{\imath k_2 L} \\ A^{(e)}(k_1,-k_2)e^{-\imath k_2 L} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Граничные условия при переходе из области $x_1 < x_2$ в область $x_1 > x_2$ с учетом контактного взаимодействия имеют стандартный вид [31]

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial(x_1-x_2)}\right|_{x_1-x_2=+0} - \left.\frac{\partial\Psi}{\partial(x_1-x_2)}\right|_{x_1-x_2=-0} = \\ = 2c\Psi\Big|_{x_1-x_2=0}, \quad (7)$$

что приводит к следующим выражениям для двухчастичных амплитуд:

$$A^{(p)}(k_1,k_2) = \left(1 + \frac{\imath c}{k_{p(1)} - k_{p(2)}}\right) A(k_1,k_2). \quad (8)$$

Граничные условия (6), (8) образуют полную систему уравнений для определения двухчастичных амплитуд. Условие ее совместности приводит к следующей системе спектральных соотношений:

$$(k_1^2 - k_2^2 - c^2)\mathrm{Re}(u \cdot e^{\imath k_1 L}) - 2ck_1 \mathrm{Im}(u \cdot e^{\imath k_1 L}) = \\ = k_1^2 - k_2^2 + c^2,$$
$$(k_2^2 - k_1^2 - c^2)\mathrm{Re}(u \cdot e^{\imath k_2 L}) - 2ck_2 \mathrm{Im}(u \cdot e^{\imath k_2 L}) = \\ = k_2^2 - k_1^2 + c^2. \quad (9)$$

Уравнения (9) описывают два семейства кривых в плоскости $k_1 k_2$ – “горизонтальное” и “вертикальное”, транспонированные друг относительно друга (рис. 2). Каждую кривую можно пронумеровать целым числом, характеризующим близость кривой к началу координат. Таким образом, собственные энергии задачи можно нумеровать двумя индексами (i,j), обозначающими номера горизонтальной и вер-

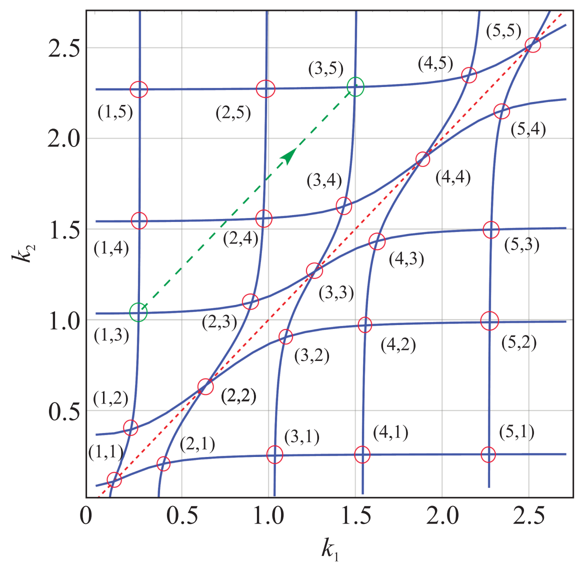

Рис. 2. (Цветной онлайн) Семейства кривых, порождающих решения спектральных соотношений, при $\eta = 2$, $\alpha = 0$, $c = 0.1$, $L = 5$. Кружками отмечены корни дисперсионных соотношений, а индексы означают номера вертикальных и горизонтальных кривых, пересечение которых порождает данный корень. Пунктирная прямая соединяет два корня с номерами $(1,3)$ и $(3,5)$, переходящие друг в друга при вариации на 2π параметра α дефекта (см. в тексте)

тикальной кривых, пересечение которых дает решение уравнения (1):

$$E^{(ij)} = \frac{k_1^{(i,j)2}}{2} + \frac{k_2^{(i,j)2}}{2}. \tag{10}$$

В случае медленной вариации параметров дефекта η и α по некоторому замкнутому контуру состояние системы приобретает фазовый множитель – так называемую геометрическую фазу [32]. В качестве контура вариации выберем контур $\eta = \text{const}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$. Тогда выражение для геометрической фазы, в не зависящей от калибровки и нормировки форме, имеет вид [33]

$$\begin{gathered}|\Psi\rangle \to e^{\imath\theta_g}|\Psi\rangle,\\ \theta_g = \arg\langle\Psi(\alpha=0)|\Psi(\alpha=2\pi)\rangle + \\ + \frac{\imath}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\langle\Psi|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi\rangle - \langle\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle}d\alpha,\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \int \Phi^*(x_1,x_2)\Psi(x_1,x_2)dx_1dx_2. \tag{12}$$

При изменении параметра α каждое семейство кривых из (9) меняется, однако, поскольку эти семейства отличаются лишь заменой k_1 на k_2, то это изменение для “горизонтальных” и “вертикальных” кривых одинаково. Изменение α на величину, кратную 2π, очевидно, должно перевести систему, изначально находящуюся в некотором стационарном состоянии, в другое стационарное состояние[5)]. Соответственно, решения спектральных соотношений при вариации α будут смещаться вдоль отрезков прямых $k_2 = k_1 + \text{const}$, соединяющих различные решения при $\alpha = 0$, проиллюстрированные на рис. 2.

3. Результаты и обсуждение. Вычисление геометрической фазы проведено для начального состояния $(1,3)$ (см. выделенную точку на рис. 2). В случае выбора состояния (n,n) (в том числе основного состояния $(1,1)$) геометрическая фаза оказывается равной нулю. На рисунке 3 представлены зависимости приобретаемой геометрической фазы от константы двухчастичного взаимодействия c при различных значениях параметра дефекта η. Видно, что при увеличении взаимодействия геометрическая фаза также монотонно увеличивается, достигая некоторого асимптотического значения. При этом более

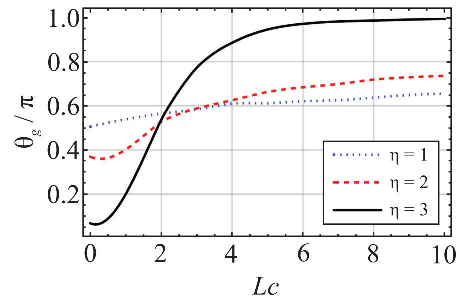

Рис. 3. (Цветной онлайн) Геометрическая фаза, вычисленная для стационарного состояния $(1,3)$, в зависимости от параметра взаимодействия c при различных значения η. При больших η и больших c геометрическая фаза асимптотически стремится к максимальному значению π. При малых η и c асимптотика составляет $\pi/2$

чувствительной к величине взаимодействия геометрическая фаза оказывается в системе с дефектом, обладающим бо́льшим коэффициентом отражения (это соответствует бо́льшим значениям η).

Перечисленные характерные особенности наблюдаемых зависимостей объясняются конкуренцией двух эффектов – влияния потенциального дефекта и межчастичного взаимодействия. Ясно, что при увеличении взаимодействия влияние дефекта на стационарные уровни энергии уменьшается, что следует из явного вида спектральных соотношений (9) (это, по крайней мере, справедливо для не слишком больших значений импульсов). В результате при больших c зависимость геометрической фазы от этого параметра носит асимптотический характер. Вместе с тем значение асимптотики увеличивается с параметром η. Наличие слабопроницаемого дефекта неизбежно приводит к более сильной зависимости волновых функций системы от его параметров. Поэтому при вариации последних соответствующий интеграл в выражении для геометрической фазы принимает бо́льшие значения.

В области слабого взаимодействия соотношение обратное – бо́льшая проницаемость дефекта порождает бо́льшую геометрическую фазу. В пределе нулевого взаимодействия нетрудно найти аналитическое решение дисперсионных соотношений (9):

$$k_{1,2}L = \alpha - \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\cosh\eta}\right) + 2\pi n_{1,2};\ n_{1,2} \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Стационарное состояние определяется выбором целых чисел $n_{1,2}$. Двухчастичные амплитуды с индексами e, σ становятся равными. В результате основной вклад в геометрическую фазу будет давать первое

5)Несмотря на то, что параметры самого дефекта меняются циклическим образом, это приводит к изменению энергии системы (в результате совершения над ней работы). Поэтому такая вариация дефекта фактически может быть использована в качестве способа переключения между стационарными состояниями системы.

слагаемое из (11), т.е. полная фаза. Ее предел при больших η равен

$$\arg\langle\Psi(\alpha=0)|\Psi(\alpha=2\pi)\rangle \to -\arccos\left(\frac{1}{\cosh\eta}\right)+\pi/2. \tag{14}$$

В результате наибольшая геометрическая фаза обеспечивается при наличии более проницаемого дефекта. Этот результат выглядит несколько контринтуитивно, однако объясняется тем, что несмотря на малую величину коэффициента отражения, дефект все же придает взаимодействующим с ним плоским волнам дополнительную фазу, определяющуюся первой из "элементарных" трансфер-матриц в (5). Зависимость волновых функций от этой фазы становится более выраженной, что и приводит к увеличению геометрической фазы.

Представляет интерес установление связи между фигурирующими в рассмотренной задаче параметрами с реальными физическими величинами. В первую очередь это касается параметра взаимодействия c. Величина $mc/\hbar^2$ имеет размерность обратной длины и характеризует длину s-рассеяния в одномерной геометрии. Она связана с длиной s-рассеяния в газе свободных частиц a_{free} и характерным поперечным размером кольца $a_\perp$ следующим образом [34]:

$$\frac{\hbar^2}{mc}=\frac{a_\perp^2}{2a_{\mathrm{free}}}\cdot\left(1-\mathcal{C}\frac{a_{\mathrm{free}}}{a_\perp}\right), \tag{15}$$

где $\mathcal{C}\approx 1.46...$. Для атомов $^{87}\mathrm{Rb}$, занимающих сверхтонкий подуровень $|f,m_f=1\rangle$, при нулевом магнитном поле $a_{\mathrm{free}}\approx 100a_B$, где a_B – боровский радиус [35]. Таким образом, в потенциальной конфигурации в виде тонкого кольца со средним радиусом 50 мкм и поперечным размером $\approx$0.1 мкм (частота поперечного удержания 50 кГц) безразмерный параметр $\frac{m}{\hbar^2}cL$ оказывается равным ≈ 242.8. Для $^{87}\mathrm{Rb}$ длиной рассеяния можно управлять в широких пределах при помощи резонансов Фешбаха [36, 37]. Поэтому представляется, что приведенный на рис. 3 диапазон значений параметра взаимодействия по горизонтальной оси вполне соотносится с возможностями современной экспериментальной техники.

4. Заключение. На примере двухчастичной модели изучено влияние межатомного взаимодействия на генерацию геометрической фазы в системе двух тождественных бозонов в пространственной конфигурации в виде тонкого кольца с локализованной неоднородностью ("дефектом"). Показано, что наличие отталкивающего взаимодействия между частицами приводит к усилению эффекта генерации геометрической фазы за счет вариации параметров дефекта. При этом в зависимости от величины взаимодействия более выгодным в смысле величины приобретаемой геометрической фазы может оказаться дефект с бо́льшим или меньшим коэффициентом пропускания.

Насколько нам известно, в настоящей работе впервые рассматривается возникновение геометрической фазы у волновой функции Бете. Выбранный сценарий продиктован предложенными ранее схемами инерционных сенсоров на основе атомарного конденсата. Это делает полученные результаты потенциально интересными для приложений в квантовой метрологии (хотя рассмотренная в данной работе система и не является конденсатом). Для выяснения перспектив необходимо добавить в (1) воздействие соответствующего эффекта неинерциальности системы отсчета и вычислить геометрические фазы состояний двух потенциальных конфигураций, по разному ориентированных относительно угловой скорости вращения (для гироскопа) или вектора линейного ускорения (для акселерометра). Если разность геометрических фаз, определяемая через картину интерференции, продемонстрирует (пусть и в меньшей мере) зависимость от параметра c, аналогичную представленной на рис. 3, можно будет надеяться на обнаружение позитивной роли межатомных взаимодействий. В стандартных схемах с атомным интерферометром [38, 39] межатомное взаимодействие является помехой, снижающей общую чувствительность системы.

Усложнение, вносимое появлением дефекта кольцевой структуры, заставило ограничиться в настоящей работе рассмотрением всего пары частиц. В случае N-частичной модели число слагаемых в соответствующем уравнении (3) окажется равным 2^N. По этой причине перспективы получения полного решения, аналогичного классической задаче с анзацем Бете, пока остаются неясными. Стоит также подчеркнуть следующие важные обстоятельства, позволившие свести задачу к точно решаемой. Влияние потенциального дефекта фактически проявляется лишь в постановке граничных условий (6). В свою очередь, совместность этих условий со структурой анзаца Бете обеспечивается независимостью коэффициентов трансфер-матрицы дефекта от импульсов частиц. Полезно провести сравнение рассмотренной задачи с другим популярным модельным классом локализованных потенциальных дефектов – δ-образными потенциалами. Для систем таких потенциалов имеет место необходимое условие интегрируемости (что в данном контексте является синонимом рассеяния без дифракции) в виде наличия специальной симметрии – так называемое условие обобщенного калейдоскопа [31]. В частности, для двух частиц с точечным отталкивающим взаимодействием на кольце с дополнительным δ-потенциалом было показано [40], что интегрируемость сохраняется лишь при условии антисимметрии волновой функции по отношению к инверсии на кольце. В противном случае возникают дифракционные явления, что приводит к невозможности свести решение к функции с конечным набором импульсов частиц [41] и может приводить к квантовому хаосу [42]. Рассмотренный в нашей работе дефект, характеризующийся трансфер-матрицей (5), относится к иному классу – он принципиально несимметричен. Интегрируемость же обеспечивается специальным видом граничных условий в точке барьера[6)]. Еще раз подчеркнем, что независимость трансфер-матрицы от импульсов частиц весьма существенна. Тем не менее отметим, что указанная независимость (или, по крайней мере, слабая зависимость) должна иметь место лишь в определенном диапазоне импульсов (см. рис. 2), связанным с контуром вариации потенциалов дефекта. При конкретизации его вида и в случае, если дефект не точечный (как пример, можно рассмотреть комбинацию δ-барьера и δ-ямы, задающих направление обхода кольца) учет дифракционных явлений будет необходим. Можно, однако, надеяться, что в режиме слабой дифракции полученное в данной работе решение в виде анзаца (3) будет оставаться справедливым, по крайней мере, в области вдали от потенциального дефекта.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств гранта # 23-12-00182-п Российского научного фонда (https://rscf.ru/project/12-00182/).

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

---

1. I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, "Many-body physics with ultracold gases", Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).
2. M. A. Cazalilla, R. Citro, T. Giamarchi, E. Orignac, and M. Rigol, "One dimensional Bosons: From Condensed Matter Systems to Ultracold Gases", Rev. Mod. Phys. **83**, 1405 (2011).
3. L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, "Formation of a Matter-Wave Bright Soliton", Science **296**, 1290 (2002).
4. K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, "Formation and Propagation of Matter Wave Soliton Trains", Nature **417**, 150 (2002).
5. N. Fabbri1, M. Panfil, D. Clément, L. Fallani, M. Inguscio, C. Fort, and J.-S. Caux, "Dynamical structure factor of one-dimensional Bose gases: Experimental signatures of beyond-Luttinger-liquid physics", Phys. Rev. A **91**, 043617 (2015).
6. Н. А. Славнов, "Вычисление скалярных произведений волновых функций и формфакторов в рамках алгебраического анзаца Бете", Теоретическая и математическая физика **79**, 232 (1989) [N. A. Slavnov, "Calculation of scalar products of wave functions and form factors in the framework of the algebraic Bethe ansatz", Theor. Math. Phys. **79**, 502 (1989)].
7. T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, "A quantum Newton's cradle", Nature (London) **440**, 900 (2006).
8. A. Imambekov and L. I. Glazman, "Exact Exponents of Edge Singularities in Dynamic Correlation Functions of 1D Bose Gas", Phys. Rev. Lett. **100**, 206805 (2008).
9. M. Olshanii and V. Dunjko, "Short-Distance Correlation Properties of the Lieb-Liniger System and Momentum Distributions of Trapped One-Dimensional Atomic Gases", Phys. Rev. Lett. **91**, 090401 (2003).
10. K. K. Kozlowski, J. M. Maillet and N. A. Slavnov, "Long-distance behavior of temperature correlation functions in the one-dimensional Bose gas", J. Stat. Mech. **2011**, 03018 (2011).
11. V. Dunjko, V. Lorent, and M. Olshanii, "Bosons in Cigar-Shaped Traps: Thomas-Fermi Regime, Tonks-Girardeau Regime, and In Between", Phys. Rev. Lett. **86**, 5413 (2001).
12. G. Lang, F. Hekking, and A. Minguzzi, "Ground-state energy and excitation spectrum of the Lieb-Liniger model: accurate analytical results and conjectures about the exact solution", SciPost Phys. **3**, 003 (2017).
13. A. Minguzzi and P. Vignolo, "Strongly interacting trapped one-dimensional quantum gases: an exact solution", AVS Quantum Science **4**, 027102 (2022).
14. T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, A. Öttl, M. Köhl, and T. Esslinger, "Critical Behavior of a Trapped Interacting Bose Gas", Science **315**, 1556 (2007).
15. N. Gemelke, X. Zhang, C.-L. Hung and C. Chin, "Observation of scale invariance and universality in two-dimensional Bose gases", Nature **460**, 995 (2009).
16. S. Ragole and J. M. Taylor, "Interacting Atomic Interferometry for Rotation Sensing Approaching the Heisenberg Limit", Phys. Rev. Lett. **117**, 203002 (2016).
17. А. М. Ростом, В. А. Томилин, Л. В. Ильичев, "Геометрическая фаза как основа квантовой гироскопии", ЖЭТФ **162**, 307 (2022) [A. M. Rostom, V. A. Tomilin, L. V. Il'ichov, "Geometric Phase-Mediated Quantum Gyroscope", JETP **135**, 264 (2022)].

[6)] Специфический вид потенциального дефекта и способ его учета в рамках предлагаемой модели отличаются от используемых в бóльшей части работ, посвященных интегрируемым системам.

18. В. А. Томилин, А. М. Ростом, Л. В. Ильичев, “Конфигурация барьер-яма в схеме квантового гироскопа на основе геометрической фазы атомарного конденсата”, Письма в ЖЭТФ **119**, 381 (2024) [V. A. Tomilin, A. M. Rostom, and L. V. Il’ichov, “Barrier-Well Potential Configuration For Quantum Gyroscope Based on Geometric Phase”, JETP Lett. **119**, 389 (2024)].
19. В. А. Томилин, А. М. Ростом, Л. В. Ильичев, “Геометрическая фаза как основа атомарной акселерометрии”, Письма в ЖЭТФ **120**, 560 (2024) [V. A. Tomilin, A. M. Rostom, and L. V. Il’ichov, “Quantum Accelerometry Based on a Geometric Phase”, JETP Lett. **120**, 540 (2024)].
20. E. Lieb and W. Liniger, “Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State”, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963).
21. E. Lieb, "Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. II. The Excitation Spectrum", Phys. Rev. **130**, 1616 (1963).
22. H. Bethe, “Zur Theorie der Metalle”, Zeitschrift fur Physik **71**, 205 (1931).
23. M. Gaudin, “Boundary Energy of a Bose Gas in One Dimension”, Phys. Rev. A **4**, 386 (1971).
24. Y. Liu and Y. Zhang, “Two atoms in a double well: Exact solution with a Bethe ansatz”, Phys. Rev. A **91**, 053610 (2015).
25. E. M. Wright, J. Arlt, and K. Dholakia, “Toroidal optical dipole traps for atomic Bose-Einstein condensates using Laguerre-Gaussian beams”, Phys. Rev. A **63**, 013608 (2000).
26. Th. Elsässer, B. Nagorny, and A. Hemmerich, “Collective sideband cooling in an optical ring cavity”, Phys. Rev. A **67**, 051401 (2003).
27. E. Courtade, O. Houde, J.-F. Clément, P. Verkerk, and D. Hennequin, “Dark optical lattice of ring traps for cold atoms”, Phys. Rev. A **74**, 031403(R) (2006).
28. S. Gupta, K. W. Murch, K. L. Moore, T. P. Purdy, and D. M. Stamper-Kurn, “Bose-Einstein Condensation in a Circular Waveguide”, Phys. Rev. Lett. **95**, 143201 (2005).
29. A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, and W. Ketterle, “Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions”, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001).
30. L. L. Sánchez-Soto, J. J. Monzóna, A. G. Barriuso, J. F. Cari nena, “The Transfer Matrix: a Geometrical Perspective”, Phys. Rep. **513**, 191 (2012).
31. М. Годен, *Волновая функция Бете* (М., Мир, 1987) [M. Gaudin, *La fonction d’onde de Bethe* (Masson, Paris, 1983)].
32. M. V. Berry, “Quantal phase factors accompanying adiabatic changes”, Proc. R. Soc. London, Ser. A **392**, 45 (1984).
33. A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu, and J. Zwanziger, *The Geometric Phase in Quantum Systems* (Berlin, Springer, 2003).
34. M. Olshanii, “Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons”, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
35. E. G. M. van Kempen, S. J. J. M. F. Kokkelmans, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar, “Interisotope Determination of Ultracold Rubidium Interactions from Three High-Precision Experiments”, Phys. Rev. Lett. **88**, 093201 (2002).
36. E. Tiesinga, B. J. Verhaar, and H. T. C. Stoof, “Threshold and resonance phenomena in ultracold ground-state collisions”, Phys. Rev. A **47**, 4114 (1993).
37. S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, “Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate”, Nature **392**, 151 (1998).
38. S. Dimopoulos, P. W. Graham, J. M. Hogan, and M. A. Kasevich, “General relativistic effects in atom interferometry”, Phys. Rev. D **78**, 42003 (2008).
39. R. Jannin, P. Cladé, and S. Guellati-Khélifa, “Phase shift due to atom-atom interactions in a light-pulse atom interferometer”, Phys. Rev. A **92**, 013616 (2015).
40. M. Olshanii, M. Albert, G. Aupetit-Diallo, P. Vignolo, and S. G. Jackson, “Exact solution for two δ-interacting bosons on a ring in the presence of a δ-barrier: Asymmetric Bethe Ansatz for spatially odd states”, SciPost Phys. Core **8**, 083 (2025).
41. P. M. Morse and H. Feschbach, *Methods of Theoretical Physics* (N.Y., McGraw-Hill, 1953).
42. M. Olshanii, G. Aupetit-Diallo, S. G. Jackson, P. Vignolo, and M. Albert, “Diffraction induced quantum chaos in a one-dimensional Bose gas”, arXiv:2511.13385v2.