

Зонная структура с топологией Мебиуса в гетероструктуре из топологических изоляторов

З. З. Алисултанов¹⁾

Московский физико-технический институт (МФТИ, Физтех),
Центр теоретической физики им. А. А. Абрикосова, 141701 Москва, Россия

Институт физики Дагестанского федерального исследовательского центра РАН, 367015 Махачкала, Россия

Поступила в редакцию 18 марта 2026 г.

После переработки 1 апреля 2026 г.

Принята к публикации 6 апреля 2026 г.

Предложена эффективная модель гетероструктуры из чередующихся слоев двумерных топологических и нормальных изоляторов, обладающая несимморфной проективной симметрией. Показано, что зонная структура такой системы имеет топологию Мебиуса как в щелевой, так и в бесщелевой фазах, что приводит к образованию защищенных дираковских точек. Предложено неэрмитово обобщение гамильтониана системы, сохраняющее несимморфную симметрию и приводящее к топологически защищенному неэрмитову скин-эффекту.

DOI: 10.7868/S3034576626050066

Открытие топологических изоляторов (ТИ) выявило парадигму, в которой соответствие между объемом и границей определяет возникновение устойчивых состояний, защищенных от некоторых типов беспорядка и возмущений [1–3]. В двух измерениях это иллюстрируется квантовым спиновым эффектом Холла, включающим спиральные краевые состояния, невосприимчивые к обратному рассеянию благодаря симметрии обращения времени [4–6]. После их экспериментальной реализации эти материалы были признаны перспективными платформами для наблюдения нетривиальных электронных и термоэлектрических эффектов (см., например, [7–10]). Центральной темой современной физики конденсированных сред является искусственное конструирование топологических систем – гетероструктур [11, 12], в которых взаимодействие топологии, симметрии и геометрии приводит к возникновению новых явлений, выходящих за рамки внутренних свойств составляющих их материалов.

Важным направлением современных исследований стало изучение проективных представлений кристаллических симметрий, которые возникают при наличии калибровочных полей, например, в контексте \mathbb{Z}_2 решеточных калибровочных теорий, спиновых жидкостей или искусственных кристаллов [13–16]. \mathbb{Z}_2 проективная трансляционная симметрия приводит к принципиально новым топологическим яв-

лениям [13]. В частности, антикоммутиационное соотношение между операторами трансляции в такой постановке индуцирует двукратное вырождение зон и запрещает глобальное “уплощение” спиновой структуры в импульсном пространстве [13]. Комбинация этой симметрии с обращением времени приводит к возникновению четырехкратно вырожденных дираковских точек, а ее частичное нарушение – к фазе мебиусовского изолятора с характерными краевыми состояниями [13].

В этом Письме мы предлагаем систему, в которой эти нетривиальные эффекты могут возникнуть. А именно, мы изучаем гетероструктуру, состоящую из двумерных топологических и тривиальных изоляторов, которая схематически показана на рис. 1. Зонная структура такой системы имеет топологию Мебиуса (или бутылки Клейна) как в щелевой, так и в бесщелевой фазах, что приводит к образованию защищенных дираковских точек. Кроме того, мы показали, что включение в нее неэрмитовых эффектов может привести к возникновению так называемого неэрмитова скин-эффекта (НСЭ): топологически защищенные точки пересечения мебиусовых зон становятся источниками нетривиальной намотки спектра, что при переходе к системе с открытыми границами проявляется как экспоненциальная локализация состояний на краю.

Неэрмитовость может быть реализована с помощью нескольких экспериментально осуществимых механизмов. Особенно универсальным подходом,

¹⁾e-mail: zaur0102@gmail.com

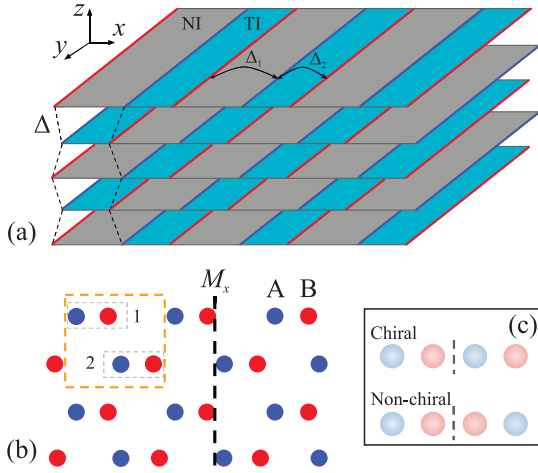


Рис. 1. (Цветной онлайн) Схематическое изображение изучаемой гетероструктуры. (a) – Трехмерная визуализация структуры: стопка квазиодномерных пластин, смещенных (ступенчато уложенных) друг относительно друга вдоль оси X . Каждая пластина состоит из чередующихся лент двумерных топологических (ТИ) и нормальных (НИ) изоляторов, вытянутых вдоль оси Z . Также показаны внутрислойные (Δ_1 , Δ_2) и межслойные (Δ) интегралы перескоков. (b) – Эквивалентное представление структуры (вид сбоку), иллюстрирующее двумерную периодичность в плоскости X – Z . Система характеризуется несимморфной проективной трансляционной симметрией L_z (отражение в плоскости M_x и сдвиг вдоль Z на полпериода); при этом трансляционная инвариантность вдоль X нарушена вследствие димеризации (подрешетки A и B). (c) – Иллюстрация различия между зеркальным отражением кирального и тривиального димеров

применимым в различных платформах, является использование искусственных невзаимных связей. В классических системах это наиболее прямо реализуется в топоэлектрических цепях с помощью преобразователей отрицательного импеданса с инверсией тока, которые создают зависящие от направления проводимости, имитирующие асимметричные перескоки модели Хатано–Нельсона [17, 18]. В квантовых или фотонных системах более фундаментальный подход использует комбинацию спин-орбитального взаимодействия и диссипации. Показано, что спин-орбитальное взаимодействие, существующее в электронных газах, холодных атомах и фотонных микрорезонаторах, может быть объединено с различием во временах жизни двух спиновых компонент для создания эффективного невзаимного туннелирования [19]. Например, в ультрахолодных атомных газах это достигается с помощью рамановских лазеров для синтеза спин-орбитального

взаимодействия вместе с лазер-индуцированной потерей атомов, что позволяет контролируемо реализовать НСЭ в квантовой многочастичной системе [20]. Альтернативно, неэрмитовость может также возникать как эффективное описание открытых систем, например, для моделирования конечного времени жизни квазичастиц в неупорядоченных или сильно коррелированных твердотельных системах. Неэрмитовы и псевдоэрмитовы эффекты в дираковских и вейлевских полуметаллах изучались в работах [21, 22].

Эффективный гамильтониан изучаемой структуры (рис. 1) в приближении ближайших соседей записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{\lambda=1,2} \sum_{n,m} \langle \Psi_n^{\lambda m} | k_y \tau_z \sigma_z | \Psi_n^{\lambda m} \rangle + \\ & + \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \sum_{n,m} \left[\Delta_1 a_{An\sigma}^{1m\dagger} a_{Bn\sigma}^{1m} + \Delta_2 a_{Bn\sigma}^{1m\dagger} a_{A(n+1)\sigma}^{1m} + \right. \\ & + \Delta_1 a_{An\sigma}^{2m\dagger} a_{Bn\sigma}^{2m} + \Delta_2 a_{Bn\sigma}^{2m\dagger} a_{A(n+1)\sigma}^{2m} + \\ & + \Delta a_{Bn\sigma}^{1m\dagger} a_{An\sigma}^{2m} + \Delta a_{Bn\sigma}^{2m\dagger} a_{A(n+1)\sigma}^{1m} + \\ & \left. + \Delta a_{An\sigma}^{2m\dagger} a_{Bn\sigma}^{1(m+1)} + \Delta a_{Bn\sigma}^{2m\dagger} a_{A(n+1)\sigma}^{1(m+1)} + \text{h.c.} \right], \quad (1) \end{aligned}$$

где $|\Psi_n^{\lambda m}\rangle = (a_{An\uparrow}^{\lambda m}, a_{An\downarrow}^{\lambda m}, a_{Bn\uparrow}^{\lambda m}, a_{Bn\downarrow}^{\lambda m})^T$ и мы считаем, что $v_F = 1$. Индексы m, n нумеруют элементарные ячейки системы вдоль осей X и Z , соответственно. Основные параметры системы: $\Delta_{1,2}$ есть внутрислойные интегралы перескока между краевыми модами через тривиальные (Δ_1) и топологические (Δ_2) изоляторы, а Δ межслойный интеграл перескока (эффективный гамильтониан для описания многослойной структуры из слоев топологических и тривиальных изоляторов впервые был предложен в работе [23]). Эта модель, как и наша, содержит туннельные перескоки между краевыми модами через топологические и тривиальные слои). Величины a^\dagger, a есть операторы рождения и уничтожения, которые действуют в пространстве краевых мод ТИ. Матрицы Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ описывают спиновые степени свободы и действуют на подпространстве $\{\uparrow, \downarrow\}$, а матрицы τ_x, τ_y, τ_z , действующие на подпространстве $\{A, B\}$, описывают принадлежность электрона к одному из двух краев ТИ. Из этого рисунка видно, что система обладает несимморфной симметрией $G = \{M_x | \hat{z}/2\}$, где M_x есть отражение в плоскости Y – Z , показанной на рис. 1 пунктирной линией, а $\hat{z}/2$ есть сдвиг вдоль оси Z на половину элементарной ячейки.

Здесь необходимо упомянуть о важной роли киральной природы краевых мод ТИ, из которых состоит наша гетероструктура. Наличие в элементарной ячейке узлов двух сортов – это, с одной сторо-

ны, необходимое условие, так как это приводит к открытию щели в спектре, величина которой определяется разницей между соответствующими интегралами перескока (в нашем случае это Δ_1 и Δ_2). Но с другой стороны, такая димеризация может сломать несимморфную симметрию. Избежать этого можно, сделав эти узлы киральными. На нижней вставке к рис. 1 показана разница между зеркальным отражением киральных и некиральных димеров. Краевые моды ТИ обладают таким свойством, сохраняя несимморфную симметрию.

Отметим также, что в нашей модели учитываются только перескоки на ближайшие соседние состояния как внутри слоя, так и между слоями. Важно отметить, что включение перескоков на более дальние расстояния (следующие соседи) не нарушает несимморфную симметрию, поскольку эта симметрия действует проективно.

В импульсном пространстве мы получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{k}) = & k_y \gamma_0 \tau_z \sigma_z + \gamma_0 \begin{pmatrix} 0 & \Delta_1 + \Delta_2 e^{-ik_x} \\ \Delta_1 + \Delta_2 e^{ik_x} & 0 \end{pmatrix} \sigma_0 + \\ & + \Delta (1 + e^{-ik_z}) \gamma_+ \begin{pmatrix} 0 & e^{-ik_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma_0 + \\ & + \Delta (1 + e^{ik_z}) \gamma_- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{ik_x} & 0 \end{pmatrix} \sigma_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$ есть матрицы Паули в базисе (1, 2) смещения вдоль оси Z (см. рис. 1) и $\gamma_{\pm} = 1/2 (\gamma_x \pm i\gamma_y)$, а произведение матриц в гамильтониане следует понимать как тензорное произведение (мы упустили знак прямого произведения для краткости). Этот гамильтониан инвариантен относительно обращения времени: $\mathcal{T}^{-1} \mathcal{H}(-\mathbf{k}) \mathcal{T} = \mathcal{H}(\mathbf{k})$, где $\mathcal{T} = i\gamma_0 \otimes \tau_0 \otimes \sigma_y K$. Нетрудно показать, что такой гамильтониан остается инвариантным относительно несимморфного преобразования: $L_z = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{ik_z} & 0 \end{pmatrix} \otimes \tau_x \otimes \sigma_x$ (мнимая единица i связана с тем, что мы рассматриваем электроны со спином 1/2):

$$L_z^{-1} \mathcal{H}(-k_x, k_y, k_z) L_z = \mathcal{H}(k_x, k_y, k_z). \quad (3)$$

Оператор L_z соответствует трансляции на полпериода вдоль оси Z , комбинированной с отражением в плоскости $Y-Z$. Действительно, эта операция обращает проекцию спина, а также преобразует $k_x \rightarrow -k_x$. Данный гамильтониан также обладает киральной симметрией с оператором $\hat{C} = \gamma_0 \otimes \tau_z \otimes \sigma_x$: $\{\hat{C}, \mathcal{H}\} = 0$. Следовательно, наша модель относится к симметричному классу АII.

Следует отметить, что выбор элементарной ячейки так, как показано на рис. 1, приводит к введению, вообще говоря, четырех типов векторов состояний с индексами A, B, C, D (в соответствии с числом узлов в элементарной ячейке). В таком случае, как легко видеть из этого рисунка, отражению в плоскости M_x соответствует преобразование $A \rightarrow D, B \rightarrow C, C \rightarrow B, D \rightarrow A$, что соответствует оператору $\tau_x \otimes \tau_x$, а не просто τ_x . Однако, легко показать, что такое полное описание приводит лишь к дополнительному вырождению (из-за выбора расширенной элементарной ячейки) и не влияет на обсуждаемые ниже эффекты. По этой причине мы используем минимальный гамильтониан (2), позволяющий раскрыть нетривиальные топологические особенности рассматриваемой структуры.

Поскольку L_z коммутирует с гамильтонианом при фиксированных значениях $k_x = 0, \pi$, его собственные функции могут быть использованы для диагонализации гамильтониана. Нетрудно показать, что следующая матрица диагонализует оператор L_z с собственными значениями $\pm e^{ik_z/2}$:

$$U(k_z) = iT_z \otimes U_\tau \otimes U_\sigma, \quad (4)$$

где

$$T_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{ik_z/2} & -e^{ik_z/2} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$U_\tau = U_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

После диагонализации мы получаем следующее выражение для гамильтониана

$$U^\dagger \mathcal{H}(k_0, k_y, k_z) U = \begin{pmatrix} h_1(k_y, k_z) & 0 \\ 0 & h_2(k_y, k_z) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $k_0 = 0, \pi$ и

$$h_{1,2}(k_y, k_z) = k_y \tau_x \sigma_x + \left(m \pm 2\Delta \cos \frac{k_z}{2} \right) \tau_z \sigma_0, \quad (8)$$

где $m = \Delta_1 \pm \Delta_2$ при $k_x = 0, \pi$. Заметим, что

$$\tau_x \sigma_z h_{1,2} \tau_x \sigma_z = -h_{1,2}, \quad (9)$$

$$h_{1,2}(k_y, k_z + 2\pi) = h_{2,1}(k_y, k_z). \quad (10)$$

Как видно из этих выражений, гамильтониан обнаруживает непериодическое поведение в импульсном пространстве вдоль направления k_z , что непосредственно проявляется в возникновении мебиусовой топологии электронных зон. Действительно, из явного вида следует соотношение

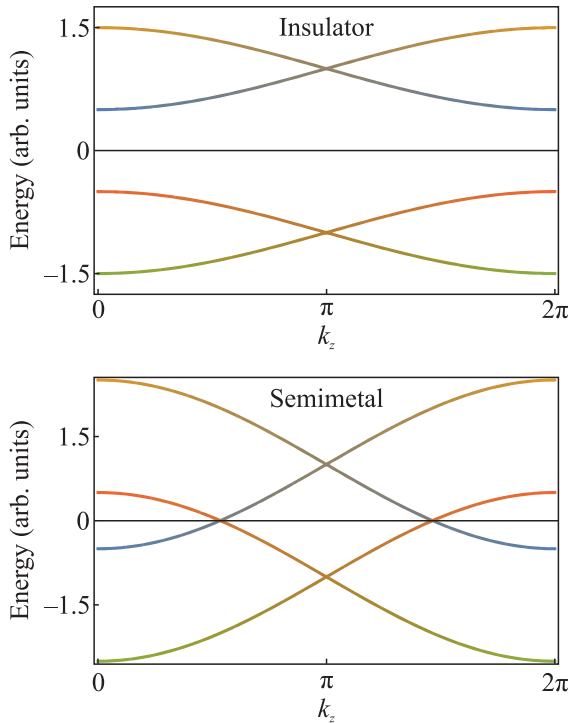


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зонная структура, в которой зоны демонстрируют топологию Мебиуса для фаз с щелью $m > 2\Delta$ (верхняя панель) и без щели $m < 2\Delta$ (нижняя панель). Две ветви зон переходят друг в друга при полном обходе зоны Бриллюэна. Возвращение к исходной точке зоны Бриллюэна возможно только после двойного обхода. Спектры построены при $k_y = 0$. Учитывая периодичность зоны Бриллюэна вдоль k_y и мебиусовскую связь вдоль k_z (антипериодичность), полная структура зон имеет топологию бутылки Клейна (действительно, разрез бутылки Клейна приводит к двум лентам Мебиуса)

$\mathcal{H}(k_z + 2\pi) = \gamma_x \mathcal{H}(k_z) \gamma_x$, которое представляет собой преобразование подобия, не изменяющее спектр, но поворачивающее базис собственных функций. Как результат, собственные состояния удовлетворяют $|\Psi\rangle(k_z + 2\pi) = \gamma_x |\Psi\rangle(k_z)$, откуда для блочно-диагонального представления получаем $|\psi_{1,2}\rangle(k_z + 2\pi) = |\psi_{2,1}\rangle(k_z)$, где $|\psi_{1,2}\rangle$ – собственные функции операторов $h_{1,2}$. Такая структура является прямым следствием наличия у системы несимметричной симметрии и служит ключевым признаком реализации мебиусовой топологии в зонном спектре.

При фиксированном значении $k_y = 0$ энергетический спектр принимает форму:

$$e_{1,2} = \pm \left(m \pm 2\Delta \cos \frac{k_z}{2} \right), \quad (11)$$

где соотношение параметров определяет топологическую фазу. В режиме $m > 2\Delta$ спектр является ще-

левым. Важно отметить, что собственные состояния в каждой зоне (зоне проводимости и валентной зоне) образуют отдельные мебиусовы пары, как схематически показано на рис. 2а. Топологический фазовый переход происходит в критической точке $m = 2\Delta$. При $m < 2\Delta$ система становится бесщелевой, реализуя полуметаллическую фазу. В этом режиме ранее разделенные мебиусовы пары пересекаются, что приводит к образованию защищенных симметрией вейлевских точек при нулевой энергии, изображенных на рис. 2б. Отметим, что дальнейшая компактификация зоны Бриллюэна вдоль направления k_y приводит к многообразию с топологией бутылки Клейна.

Из этого анализа вытекает полная фазовая картина, определяемая параметрами Δ_1 , Δ_2 и Δ в высокосимметричных точках $k_x = 0, \pi$: 1. Полностью щелевая фаза: когда $\Delta_1 \pm \Delta_2 > 2\Delta$, выполняется для обоих знаков, система является щелевой как в точке $k_x = 0$, так и в $k_x = \pi$. 2. Полностью бесщелевая фаза: когда $\Delta_1 \pm \Delta_2 < 2\Delta$ выполняется для обоих знаков, система является бесщелевой как в $k_x = 0$, так и в $k_x = \pi$, содержа в общей сложности четыре вейлевских узла при нулевой энергии. 3. Гибридная (смешанная) фаза: когда $\Delta_1 - \Delta_2 < 2\Delta < \Delta_1 + \Delta_2$, реализуется гибридная фаза. Спектр является щелевым в точке $k_x = 0$, но бесщелевым в точке $k_x = \pi$, что дает два вейлевских узла при нулевой энергии. Переходы между этими фазами могут быть осуществлены путем изменения Δ , например, посредством одноосной деформации вдоль оси Z .

Далее, мы обратим внимание на еще одно интересное свойство рассматриваемой системы. Оно возникает как следствие наличия состояний с топологией Мебиуса при включении неэрмитовых эффектов. Мы увидим, что несимметричная симметрия нашей системы, задаваемая оператором L_z приводит к НСЭ [24–26].

Для анализа топологических свойств неэрмитовых систем применяется следующий подход [27]:

1. Определяется тип энергетической щели гамильтониана: линейная (line gap) или точечная (point gap).

2. В случае линейной щели неэрмитов гамильтониан может быть непрерывно деформирован в эрмитов, что позволяет исследовать его топологию стандартными методами.

3. В случае точечной щели такая деформация невозможна. Вместо этого используется процедура эрмитизации – построение удвоенного эрмитова гамильтониана $\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & H \\ H^\dagger & 0 \end{pmatrix}$, топологические инва-

рианты которого эквивалентны инвариантам исходного неэрмитова оператора [25, 28].

Точечная щель в спектре в точке \mathbf{k} открывается при энергии E , если в этой точке $\det [H(\mathbf{k}) - E] \neq 0$. Пусть такая точечная щель возникает вдоль направления k_i . Тогда мы можем ввести число намотки [27, 28]

$$W_i(k_\perp, E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} dk_i \frac{\partial}{\partial k_i} \ln \det [H(\mathbf{k}) - E], \quad (12)$$

где k_\perp есть волновые вектора, перпендикулярные k_i . Поскольку топологические инварианты исходного гамильтониана H и удвоенного гамильтониана \tilde{H} совпадают (см. пункт 3 в предыдущем абзаце), наличие в \tilde{H} топологических дефектов с ненулевым числом намотки, гарантирует отличие от нуля числа намотки в исходном гамильтониане H . В нашей системе такими дефектами являются точки пересечения зон, возникающие благодаря их мебиусовой топологии. Отличие от нуля числа намотки вокруг точечной щели, в свою очередь, гарантирует возникновение НСЭ [25].

Влияние несимморфных симметрий на топологию неэрмитовых систем было исследовано в работе [29]. В частности, было получено общее условие (уравнение (17) в [29]), при выполнении которого удвоенный гамильтониан \tilde{H} обладает несимморфной симметрией. Это условие связывает исходный гамильтониан $H(\mathbf{k})$ с его эрмитово-сопряженным аналогом $H^\dagger(\mathbf{k})$ и имеет вид:

$$U_g^{\mathbf{k}} H(\mathbf{k}) = (e^{-ik_z} U_{g'}^{p_g \mathbf{k}} H(p_g \mathbf{k}))^\dagger, \quad (13)$$

где $U_g^{\mathbf{k}}$ – унитарное представление несимморфной операции g , а p_g – ее точечная часть. В нашем случае $U_g^{\mathbf{k}} = L_z$, а $p_g \mathbf{k} = (-k_x, k_y, k_z)$. Легко видеть, что для эрмитовой системы условие (13) превращается в (3).

Таким образом, задача сводится к построению неэрмитового обобщения нашего исходного гамильтониана, сохраняющего несимморфную симметрию в смысле условия (13). Выполнение этого условия гарантирует, что удвоенный гамильтониан обладает несимморфной симметрией, и, согласно [29], в такой системе неизбежно возникает НСЭ. Важно, что в отличие от \tilde{H} , наличие несимморфной симметрии только в гамильтониане H не гарантирует ненулевого числа намотки, а, следовательно, и НСЭ. Кроме того, в случае неэрмитова гамильтониана не удастся напрямую связать геометрию кристалла с топологическим инвариантом. По этой причине удобно работать с удвоенным (эрмитовым) гамильтонианом.

Мы ограничимся рассмотрением Т-симметричного случая. Для неэрмитовой системы условие Т-инвариантности записывается так [27]: $\mathcal{T}^{-1} \mathcal{H}(-\mathbf{k})^T \mathcal{T} = \mathcal{H}(\mathbf{k})$, где $\mathcal{T} = \gamma_0 \otimes \tau_0 \otimes \sigma_y$. Простейший переход к Т-инвариантному неэрмитовому гамильтониану состоит в добавлении членов типа $\pm i \Delta_N \gamma_z \otimes \tau_0 \otimes \sigma_0$ или $\pm i \Delta_N \gamma_0 \otimes \tau_z \otimes \sigma_0$. Первый можно интерпретировать как чередующиеся по слоям накачка и потеря вдоль оси Z (накачка в слое 1, потеря в слое 2, или наоборот), а второй – то же самое только в узлах А и В (накачка – в А, потеря – в В, или наоборот). Такие расширения гамильтониана удовлетворяют необходимому условию (13). При наличии такой неэрмитовости удвоенный гамильтониан будет обладать топологией Мебиуса и содержать точки пересечения зон. Наличие таких точек гарантирует ненулевое число намотки, а следовательно, и возникновение НСЭ вдоль оси Z [25, 29].

Для анализа НСЭ рассмотрим неэрмитовость типа $i \Delta_N \gamma_z$. Для простоты рассмотрим точку $k_x = k_y = 0$. В этом случае диагонализированный гамильтониан имеет вид: $H = \begin{pmatrix} h_1(k_z) & i \Delta_N \\ i \Delta_N & h_2(k_z) \end{pmatrix}$. Прежде всего исследуем область энергии, в которой точечная щель остается открытой для всей зоны Бриллюэна. Нас будут интересовать состояния, которые в эрмитовом пределе ($\Delta_N = 0$) принадлежат разрешенной зоне ($|E - m| < 2\Delta$). Тогда величина $\det [H(\mathbf{k}) - m] = (E - m)^2 - 4\Delta^2 \cos^2(k_z/2) + \Delta_N^2$ будет отлична от нуля для всех E в разрешенной зоне при $\Delta_N > 2\Delta$. Если же $\Delta_N < 2\Delta$, то точечная щель будет открыта только для части зоны $2\Delta > |E - m| > \sqrt{4\Delta^2 - \Delta_N^2}$.

НСЭ проявляется как локализация блоховских состояний (всех или части) в неэрмитовой системе с открытыми граничными условиями. Для исследования такой локализации мы воспользуемся подходом, развитым в работах [24, 30]. Основной целью в рамках данного подхода является прямой поиск локализованных решений среди блоховских функций при переходе от периодических граничных условий к открытым. Для этого вводится параметр $\beta = e^{ik}$ и решается характеристическое уравнение $\det [H(\beta) - E] = 0$. Если среди решений есть пара β_i, β_j такие, что $|\beta_i| = |\beta_j| \neq 1$ (равенство явно учитывает открытое граничное условие, а не равенство единице означает, что k не чисто вещественная), то это соответствует НСЭ [24, 30]. Решения с $|\beta_{i,j}| < 1$, $|\beta'_{i,j}| > 1$ соответствуют локализованным состояниям на левом и правом краях. В нашем случае по-

лучается следующее характеристическое уравнение: $\beta + \beta^{-1} = \pm S(E)$, где $S(E) = \Delta^{-1} \sqrt{(E - m)^2 + \Delta_N^2}$. Если $S > 2$, то уравнение имеет четыре вещественных решения: $|\beta_1| = |\beta_2| < 1$, $|\beta_3| = |\beta_4| > 1$. Эти решения соответствуют локализованным состояниям, т.е. НСЭ. Неравенство $S > 2$ соответствует энергиям, для которых точечная щель остается открытой (см. предыдущий абзац). Если же $S < 2$, то $|\beta_i| = 1$ для всех i , что соответствует делокализованным (блоховским) состояниям.

В отличие от стандартных моделей НСЭ, где характеристическое уравнение не факторизуется, в нашей системе благодаря несимморфной симметрии и мебиусовой топологии зон гамильтониан распадается на два сектора в объеме: $\beta + \beta^{-1} = \pm S(E)$. Однако при переходе к открытым границам эти сектора оказываются топологически связанными, и условие формирования непрерывного спектра (GBZ) требует равенства модулей корней, принадлежащих разным секторам (обычно это требование должно выполняться внутри каждого сектора [30]). Это является прямым проявлением мебиусовой структуры зон и приводит к устойчивому НСЭ, защищенному симметрией.

Наконец, вычислим число намотки, используя общую формулу (12). Для нашего случая такое вычисление, как легко показать, сводится к следующему интегралу

$$W_{k_z}(E) = \frac{1}{\pi i} \oint dz \frac{\partial}{\partial z} \ln [z + z^{-1} - S(E)], \quad (14)$$

где интегрирование проводится по половине окружности (от 0 до π из-за мебиусовой структуры зон) единичного радиуса вокруг точки $z = 0$, что соответствует интегрированию по физической зоне Бриллюэна с учетом мебиусовой связи. Из выражения под логарифмом видно, что для указанных выше областей зоны, в которых точечная щель остается открытой, только один из его нулей оказывается внутри контура, что дает $W_{k_z} = 1$ (число намотки равно 1, а не 2 из-за мебиусовой структуры зон). Для остальных областей число намотки, очевидно, будет равно нулю.

Физический механизм, связывающий мебиусовую топологию зон с НСЭ, состоит в следующем. Точки пересечения, возникающие в мебиусовых зонах, являются топологически защищенными – они не могут быть устранены малыми деформациями гамильтониана, сохраняющими симметрию. При включении неэрмитовости, не нарушающей несимморфную симметрию, мебиусову структуру имеет также и спектр удвоенного гамильтониана с соответствующими точ-

ками пересечения зон. Каждая такая точка становится гарантией нетривиальной намотки собственных функций. Иными словами, симметрия накладывает жесткое топологическое условие на спектр системы в периодических граничных условиях: число намотки вокруг точки вырождения обязано быть ненулевым. При переходе к системе с открытыми границами эта топологическая намотка не может исчезнуть бесследно. Вместо этого она проецируется в реальное пространство, заставляя некоторые собственные состояния экспоненциально локализовываться на краях системы. Это и есть физическое проявление НСЭ, индуцированного несимморфной симметрией.

В конце отметим, что согласно [26] (см. также ссылки в этом обзоре), необходимыми условиями для наблюдения НСЭ являются ненормальность гамильтониана ($[H, H^\dagger] \neq 0$) и невзаимность абсолютного значения пропагатора ($|G_{ij}| \neq |G_{ji}|$). В нашей системе, при наличии несимморфной симметрии, эти условия выполняются автоматически. Более того, эта симметрия через уравнение (13) накладывает дополнительную структуру, которая не просто обеспечивает выполнение этих условий, но и делает скин-эффект топологически защищенным.

Предложенная структура может быть реализована в системах на основе $(\text{Bi}, \text{Sb})_2\text{Te}_3$ или HgTe/CdTe (см., например, [31]), открывая возможности для экспериментального наблюдения мебиусовой топологии и НСЭ. Дальнейшие исследования могут быть направлены на изучение нелинейных оптических эффектов, например, сдвигового фототока, природа которого связана непосредственно с зонной топологией.

Автор благодарит Владимира Еналдиева за полезные обсуждения результатов работы.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Московского физико-технического института (Госзадание # FSMG-2026-0012) и Российского научного фонда, проект # 24-72-10015 (заключительная часть работы).

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. M. Z. Hasan and C. L. Kane, “Colloquium: Topological insulators”, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010).
2. X.-L. Qi and S.-C. Zhang, “Topological insulators and superconductors”, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).
3. J. E. Moore, “The birth of topological insulators”, *Nature* **464**, 194 (2010).
4. C. L. Kane and E. J. Mele, “ z_2 topological order and the quantum spin hall effect”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146802 (2005).

5. B. A. Bernevig, T. L. Hughes, and S.-C. Zhang, “Quantum spin hall effect and topological phase transition in hgte quantum wells”, *Science* **314**, 1757 (2006).
6. M. König, S. Wiedmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, “Quantum spin hall insulator state in hgte quantum wells”, *Science* **318**, 766 (2007).
7. E. Olshanetsky, Z. Kvon, G. Gusev, and N. Mikhailov, “Observation of different edge current states localization scenarios in a HgTe based two-dimensional topological insulator”, *Phys. E: Low-Dimens. Syst. Nanostructures* **147**, 115605 (2023).
8. N. Xu, Y. Xu, and J. Zhu, “Topological insulators for thermoelectrics”, *npj Quantum Mater.* **2**, 51 (2017).
9. C. Fu, Y. Sun, and C. Felser, “Topological thermoelectrics”, *APL Mater.* **8**, 040913 (2020).
10. Z. Alisultanov, E. Idrisov, and A. Kavokin, “Thermoelectric effects in two-dimensional topological insulators”, *Phys. Rev. B* **111**, 155430 (2025).
11. Z. Z. Alisultanov and A. Kudlis, “Disorder-induced topological transitions in a multilayer topological insulator”, *Phys. Rev. B* **109**, 165141 (2024).
12. Z. Alisultanov and A. Kudlis, “Theory of off-diagonal disorder in multilayer topological insulators”, *Phys. Rev. B* **112**, 205108 (2025).
13. Y. Zhao, Y.-X. Huang, and S. A. Yang, “ Z_2 -projective translational symmetry protected topological phases”, *Phys. Rev. B* **102**, 161117 (2020).
14. Z. Chen, S. A. Yang, and Y. Zhao, “Brillouin klein bottle from artificial gauge fields”, *Nat. Commun.* **13**, 2215 (2022).
15. C. Zhang, Z. Chen, Z. Zhang, and Y. Zhao, “General theory of momentum-space nonsymmorphic symmetry”, *Phys. Rev. Lett.* **130**, 256601 (2023).
16. C. Zhang, P. Wang, J. Lyu, and Y. Zhao, “Brillouin platycosms and topological phases”, *Phys. Rev. Lett.* **135**, 136601 (2025).
17. N. Hatano and D. R. Nelson, “Localization transitions in non-hermitian quantum mechanics”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 570 (1996).
18. M. Ezawa, “Electric-circuit simulation of the schrödinger equation and non-hermitian quantum walks”, *Phys. Rev. B* **100**, 165419 (2019).
19. P. Kokhanchik, D. Solnyshkov, and G. Malpuech, “Nonhermitian skin effect induced by rashba-dresselhaus spinorbit coupling”, *Phys. Rev. B* **108**, L041403 (2023).
20. L. Zhou, H. Li, W. Yi, and X. Cui, “Engineering nonhermitian skin effect with band topology in ultracold gases”, *Commun. Phys.* **5**, 252 (2022).
21. Z. Z. Alisultanov and E. G. Idrisov, “Non-hermitian weyl fermions of types III and IV: Hamiltonian, topological protection, and landau levels”, *Phys. Rev. B* **107**, 085135 (2023).
22. Z. Z. Alisultanov and N. Demirov, “Tilt and anisotropy of the dirac spectrum caused by the overlapping of bloch functions”, *JETP Lett.* **117**, 776 (2023).
23. A. A. Burkov and L. Balents, “Weyl semimetal in a topological insulator multilayer”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 127205 (2011).
24. S. Yao and Z. Wang, “Edge states and topological invariants of non-hermitian systems”, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 086803 (2018).
25. N. Okuma, K. Kawabata, K. Shiozaki, and M. Sato, “Topological origin of non-hermitian skin effects”, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 086801 (2020).
26. J. T. Gohsrich, A. Banerjee, and F. K. Kunst, “The nonhermitian skin effect: A perspective”, *Europhysics Letters* **150**, 60001 (2025).
27. K. Kawabata, K. Shiozaki, M. Ueda, and M. Sato, “Symmetry and topology in non-hermitian physics”, *Phys. Rev. X* **9**, 041015 (2019).
28. Z. Gong, Y. Ashida, K. Kawabata, K. Takasan, S. Higashikawa, and M. Ueda, “Topological phases of nonhermitian systems”, *Phys. Rev. X* **8**, 031079 (2018).
29. Y. Tanaka, R. Takahashi, and R. Okugawa, “Nonhermitian skin effect enforced by nonsymmorphic symmetries”, *Phys. Rev. B* **109**, 035131 (2024).
30. K. Yokomizo and S. Murakami, “Non-bloch band theory of non-hermitian systems”, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 066404 (2019).
31. Z. Wan, Q. Qian, Y. Huang, and X. Duan, “Layered hybrid superlattices as designable quantum solids”, *Nature* **635**, 49 (2024).