Зонная структура с топологией Мебиуса в гетероструктуре из топологических изоляторов

З. З. Алисултанов[1)]

Московский физико-технический институт (МФТИ, Физтех),
Центр теоретической физики им. А. А. Абрикосова, 141701 Москва, Россия

Институт физики Дагестанского федерального исследовательского центра РАН, 367015 Махачкала, Россия

Поступила в редакцию 18 марта 2026 г.
После переработки 1 апреля 2026 г.
Принята к публикации 6 апреля 2026 г.

Предложена эффективная модель гетероструктуры из чередующихся слоев двумерных топологических и нормальных изоляторов, обладающая несимморфной проективной симметрией. Показано, что зонная структура такой системы имеет топологию Мебиуса как в щелевой, так и в бесщелевой фазах, что приводит к образованию защищенных дираковских точек. Предложено неэрмитово обобщение гамильтониана системы, сохраняющее несимморфную симметрию и приводящее к топологически защищенному неэрмитову скин-эффекту.

DOI: 10.7868/S3034576626050066

Открытие топологических изоляторов (ТИ) выявило парадигму, в которой соответствие между объемом и границей определяет возникновение устойчивых состояний, защищенных от некоторых типов беспорядка и возмущений [1–3]. В двух измерениях это иллюстрируется квантовым спиновым эффектом Холла, включающим спиральные краевые состояния, невосприимчивые к обратному рассеянию благодаря симметрии обращения времени [4–6]. После их экспериментальной реализации эти материалы были признаны перспективными платформами для наблюдения нетривиальных электронных и термоэлектрических эффектов (см., например, [7–10]). Центральной темой современной физики конденсированных сред является искусственное конструирование топологических систем – гетероструктур [11, 12], в которых взаимодействие топологии, симметрии и геометрии приводит к возникновению новых явлений, выходящих за рамки внутренних свойств составляющих их материалов.

Важным направлением современных исследований стало изучение проективных представлений кристаллических симметрий, которые возникают при наличии калибровочных полей, например, в контексте $\mathbb{Z}_2$ решеточных калибровочных теорий, спиновых жидкостей или искусственных кристаллов [13–16]. $\mathbb{Z}_2$ проективная трансляционная симметрия приводит к принципиально новым топологическим явлениям [13]. В частности, антикоммутационное соотношение между операторами трансляции в такой постановке индуцирует двукратное вырождение зон и запрещает глобальное "уплощение" спинорной структуры в импульсном пространстве [13]. Комбинация этой симметрии с обращением времени приводит к возникновению четырехкратно вырожденных дираковских точек, а ее частичное нарушение – к фазе мебиусовского изолятора с характерными краевыми состояниями [13].

В этом Письме мы предлагаем систему, в которой эти нетривиальные эффекты могут возникнуть. А именно, мы изучаем гетероструктуру, состоящую из двумерных топологических и тривиальных изоляторов, которая схематически показана на рис. 1. Зонная структура такой системы имеет топологию Мебиуса (или бутылки Клейна) как в щелевой, так и в бесщелевой фазах, что приводит к образованию защищенных дираковских точек. Кроме того, мы показали, что включение в нее неэрмитовых эффектов может привести к возникновению так называемого неэрмитова скин-эффекта (НСЭ): топологически защищенные точки пересечения мебиусовых зон становятся источниками нетривиальной намотки спектра, что при переходе к системе с открытыми границами проявляется как экспоненциальная локализация состояний на краю.

Неэрмитовость может быть реализована с помощью нескольких экспериментально осуществимых механизмов. Особенно универсальным подходом,

[1)]e-mail: zaur0102@gmail.com

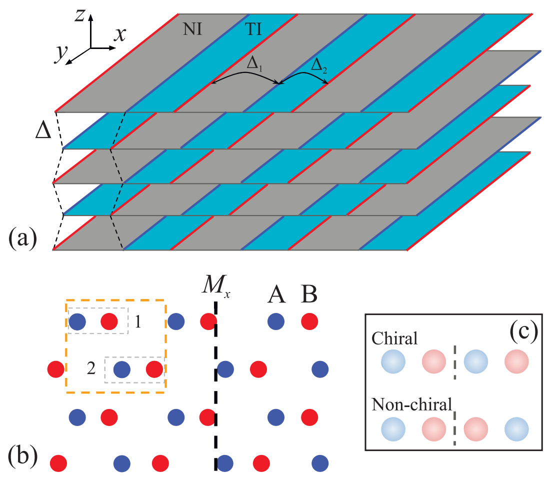

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схематическое изображение изучаемой гетероструктуры. (a) – Трехмерная визуализация структуры: стопка квазиодномерных пластин, смещенных (ступенчато уложенных) друг относительно друга вдоль оси X. Каждая пластина состоит из чередующихся лент двумерных топологических (TI) и нормальных (NI) изоляторов, вытянутых вдоль оси Z. Также показаны внутрислойные (Δ_1, Δ_2) и межслойные (Δ) интегралы перескоков. (b) – Эквивалентное представление структуры (вид сбоку), иллюстрирующее двумерную периодичность в плоскости X–Z. Система характеризуется несимморфной проективной трансляционной симметрией L_z (отражение в плоскости M_x и сдвиг вдоль Z на полпериода); при этом трансляционная инвариантность вдоль X нарушена вследствие димеризации (подрешетки A и B). (c) – Иллюстрация различия между зеркальным отражением кирального и тривиального димеров

применимым в различных платформах, является использование искусственных невзаимных связей. В классических системах это наиболее прямо реализуется в топоэлектрических цепях с помощью преобразователей отрицательного импеданса с инверсией тока, которые создают зависящие от направления проводимости, имитирующие асимметричные перескоки модели Хатано–Нельсона [17, 18]. В квантовых или фотонных системах более фундаментальный подход использует комбинацию спин-орбитального взаимодействия и диссипации. Показано, что спин-орбитальное взаимодействие, существующее в электронных газах, холодных атомах и фотонных микрорезонаторах, может быть объединено с различием во временах жизни двух спиновых компонент для создания эффективного невзаимного туннелирования [19]. Например, в ультрахолодных атомных газах это достигается с помощью рамановских лазеров для синтеза спин-орбитального взаимодействия вместе с лазер-индуцированной потерей атомов, что позволяет контролируемо реализовать НСЭ в квантовой многочастичной системе [20]. Альтернативно, неэрмитовость может также возникать как эффективное описание открытых систем, например, для моделирования конечного времени жизни квазичастиц в неупорядоченных или сильно коррелированных твердотельных системах. Неэрмитовы и псевдоэрмитовы эффекты в дираковских и вейлевских полуметаллах изучались в работах [21, 22].

Эффективный гамильтониан изучаемой структуры (рис. 1) в приближении ближайших соседей записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = &\sum_{\lambda=1,2}\sum_{n,m}\langle\Psi_n^{\lambda m}|k_y\tau_z\sigma_z|\Psi_n^{\lambda m}\rangle + \\ &+\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow}\sum_{n,m}\Big[\Delta_1 a^{1m\dagger}_{An\sigma}a^{1m}_{Bn\sigma} + \Delta_2 a^{1m\dagger}_{Bn\sigma}a^{1m}_{A(n+1)\sigma} + \\ &+\Delta_1 a^{2m\dagger}_{An\sigma}a^{2m}_{Bn\sigma} + \Delta_2 a^{2m\dagger}_{Bn\sigma}a^{2m}_{A(n+1)\sigma} + \\ &+\Delta a^{1m\dagger}_{Bn\sigma}a^{2m}_{An\sigma} + \Delta a^{2m\dagger}_{Bn\sigma}a^{1m}_{A(n+1)\sigma} + \\ &+\Delta a^{2m\dagger}_{An\sigma}a^{1(m+1)}_{Bn\sigma} + \Delta a^{2m\dagger}_{Bn\sigma}a^{1(m+1)}_{A(n+1)\sigma} + \text{h.c.}\Big], \qquad (1)\end{aligned}$$

где $|\Psi_n^{\lambda m}\rangle = (a^{\lambda m}_{An\uparrow},\ a^{\lambda m}_{An\downarrow},\ a^{\lambda m}_{Bn\uparrow},\ a^{\lambda m}_{Bn\downarrow})^T$ и мы считаем, что $v_F = 1$. Индексы m, n нумеруют элементарные ячейки системы вдоль осей X и Z, соответственно. Основные параметры системы: $\Delta_{1,2}$ есть внутрислойных интегралы перескока между краевыми модами через тривиальные (Δ_1) и топологические (Δ_2) изоляторы, а Δ межслойный интеграл перескока (эффективный гамильтониан для описания многослойной структуры из слоев топологических и тривиальных изоляторов впервые был предложен в работе [23]. Эта модель, как и наша, содержит туннельные перескоки между краевыми модами через топологические и тривиальные слои). Величины $a^\dagger, a$ есть операторы рождения и уничтожения, которые действуют в пространстве краевых мод ТИ. Матрицы Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ описывают спиновые степени свободы и действуют на подпространстве $\{\uparrow,\downarrow\}$, а матрицы τ_x, τ_y, τ_z, действующие на подпространстве $\{A, B\}$, описывают принадлежность электрона к одному из двух краев ТИ. Из этого рисунка видно, что система обладает несимморфной симметрией $G = \{M_x|\hat{\mathbf{z}}/2\}$, где M_x есть отражение в плоскости $Y-Z$, показанной на рис. 1 пунктирной линией, а $\hat{\mathbf{z}}/2$ есть сдвиг вдоль оси Z на половину элементарной ячейки.

Здесь необходимо упомянуть о важной роли киральной природы краевых мод ТИ, из которых состоит наша гетероструктура. Наличие в элементарной ячейке узлов двух сортов – это, с одной стороны, необходимое условие, так как это приводит к открытию щели в спектре, величина которой определяется разницей между соответствующими интегралами перескока (в нашем случае это Δ_1 и Δ_2). Но с другой стороны, такая димеризация может сломать несимморфную симметрию. Избежать этого можно, сделав эти узлы киральными. На нижней вставке к рис. 1 показана разница между зеркальным отражением киральных и некиральных димеров. Краевые моды ТИ обладают таким свойством, сохраняя несимморфную симметрию.

Отметим также, что в нашей модели учитываются только перескоки на ближайшие соседние состояния как внутри слоя, так и между слоями. Важно отметить, что включение перескоков на более дальние расстояния (следующие соседи) не нарушает несимморфную симметрию, поскольку эта симметрия действует проективно.

В импульсном пространстве мы получаем:

$$\mathcal{H}(\mathbf{k})=k_y\gamma_0\tau_z\sigma_z+\gamma_0\begin{pmatrix}0 & \Delta_1+\Delta_2e^{-ik_x}\\ \Delta_1+\Delta_2e^{ik_x} & 0\end{pmatrix}\sigma_0+ \\ +\Delta\left(1+e^{-ik_z}\right)\gamma_+\begin{pmatrix}0 & e^{-ik_x}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\sigma_0+ \\ +\Delta\left(1+e^{ik_z}\right)\gamma_-\begin{pmatrix}0 & 1\\ e^{ik_x} & 0\end{pmatrix}\sigma_0, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$ есть матрицы Паули в базисе $(1, 2)$ смещения вдоль оси Z (см. рис. 1) и $\gamma_\pm = 1/2\,(\gamma_x \pm i\gamma_y)$, а произведение матриц в гамильтониане следует понимать как тензорное произведение (мы упустили знак прямого произведения для краткости). Этот гамильтониан инвариантен относительно обращения времени: $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{H}(-\mathbf{k})\mathcal{T} = \mathcal{H}(\mathbf{k})$, где $\mathcal{T} = i\gamma_0 \otimes \tau_0 \otimes \sigma_y K$. Нетрудно показать, что такой гамильтониан остается инвариантным относительно несимморфного преобразования: $\mathrm{L}_z = i\begin{pmatrix}0 & 1\\ e^{ik_z} & 0\end{pmatrix}\otimes \tau_x \otimes \sigma_x$ (мнимая единица i связана с тем, что мы рассматриваем электроны со спином $1/2$):

$$\mathrm{L}_z^{-1}\mathcal{H}(-k_x, k_y, k_z)\mathrm{L}_z = \mathcal{H}(k_x, k_y, k_z). \tag{3}$$

Оператор L_z соответствует трансляции на полпериода вдоль оси Z, комбинированной с отражением в плоскости $Y{-}Z$. Действительно, эта операция обращает проекцию спина, а также преобразует $k_x \to -k_x$. Данный гамильтониан также обладает киральной симметрией с оператором $\hat{C} = \gamma_0 \otimes \tau_z \otimes \sigma_x$: $\{\hat{C}, \mathcal{H}\} = 0$. Следовательно, наша модель относится к симметрийному классу AII.

Следует отметить, что выбор элементарной ячейки так, как показано на рис. 1, приводит к введению, вообще говоря, четырех типов векторов состояний с индексами A, B, C, D (в соответствии с числом узлов в элементарной ячейке). В таком случае, как легко видеть из этого рисунка, отражению в плоскости M_x соответствует преобразование $A \to D$, $B \to C$, $C \to B$, $D \to A$, что соответствует оператору $\tau_x\otimes\tau_x$, а не просто τ_x. Однако, легко показать, что такое полное описание приводит лишь к дополнительному вырождению (из-за выбора расширенной элементарной ячейки) и не влияет на обсуждаемые ниже эффекты. По этой причине мы используем минимальный гамильтониан (2), позволяющий раскрыть нетривиальные топологические особенности рассматриваемой структуры.

Поскольку L_z коммутирует с гамильтонианом при фиксированных значениях $k_x = 0, \pi$, его собственные функции могут быть использованы для диагонализации гамильтониана. Нетрудно показать, что следующая матрица диагонализует оператор L_z с собственными значениями $\pm e^{ik_z/2}$:

$$U\left(k_z\right) = iT_z \otimes U_\tau \otimes U_\sigma, \tag{4}$$

где

$$T_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ e^{ik_z/2} & -e^{ik_z/2}\end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$U_\tau = U_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}. \tag{6}$$

После диагонализации мы получаем следующее выражение для гамильтониана

$$U^\dagger\mathcal{H}(k_0, k_y, k_z)U = \begin{pmatrix}h_1\left(k_y, k_z\right) & 0\\ 0 & h_2\left(k_y, k_z\right)\end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $k_0 = 0, \pi$ и

$$h_{1,2}\left(k_y, k_z\right) = k_y\tau_x\sigma_x + \left(m \pm 2\Delta\cos\frac{k_z}{2}\right)\tau_z\sigma_0, \tag{8}$$

где $m = \Delta_1 \pm \Delta_2$ при $k_x = 0, \pi$. Заметим, что

$$\tau_x\sigma_z h_{1,2}\tau_x\sigma_z = -h_{1,2}, \tag{9}$$

$$h_{1,2}\left(k_y, k_z + 2\pi\right) = h_{2,1}\left(k_y, k_z\right). \tag{10}$$

Как видно из этих выражений, гамильтониан обнаруживает непериодическое поведение в импульсном пространстве вдоль направления k_z, что непосредственно проявляется в возникновении мебиусовой топологии электронных зон. Действительно, из явного вида следует соотношение

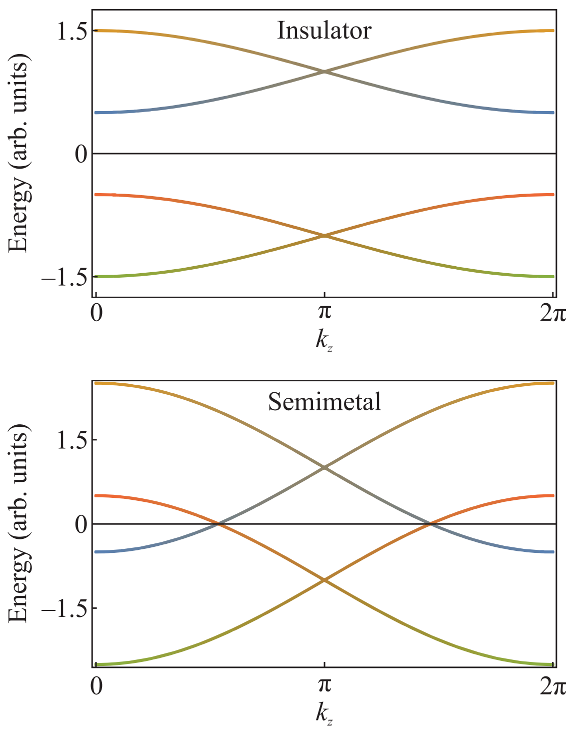

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зонная структура, в которой зоны демонстрируют топологию Мебиуса для фаз с щелью $m > 2\Delta$ (верхняя панель) и без щели $m < 2\Delta$ (нижняя панель). Две ветви зон переходят друг в друга при полном обходе зоны Бриллюэна. Возвращение к исходной точке зоны Бриллюэна возможно только после двойного обхода. Спектры построены при $k_y = 0$. Учитывая периодичность зоны Бриллюэна вдоль k_y и мебиусовскую связь вдоль k_z (антипериодичность), полная структура зон имеет топологию бутылки Клейна (действительно, разрез бутылки Клейна приводит к двум лентам Мебиуса)

$\mathcal{H}(k_z + 2\pi) = \gamma_x \mathcal{H}(k_z)\gamma_x$, которое представляет собой преобразование подобия, не изменяющее спектр, но поворачивающее базис собственных функций. Как результат, собственные состояния удовлетворяют $|\Psi\rangle(k_z + 2\pi) = \gamma_x|\Psi\rangle(k_z)$, откуда для блочно-диагонального представления получаем $|\psi_{1,2}\rangle(k_z + 2\pi) = |\psi_{2,1}\rangle(k_z)$, где $|\psi_{1,2}\rangle$ – собственные функции операторов $h_{1,2}$. Такая структура является прямым следствием наличия у системы несимморфной симметрии и служит ключевым признаком реализации мебиусовой топологии в зонном спектре.

При фиксированном значении $k_y = 0$ энергетический спектр принимает форму:

$$e_{1,2} = \pm\left(m \pm 2\Delta\cos\frac{k_z}{2}\right), \tag{11}$$

где соотношение параметров определяет топологическую фазу. В режиме $m > 2\Delta$ спектр является щелевым. Важно отметить, что собственные состояния в каждой зоне (зоне проводимости и валентной зоне) образуют отдельные мебиусовы пары, как схематически показано на рис. 2a. Топологический фазовый переход происходит в критической точке $m = 2\Delta$. При $m < 2\Delta$ система становится бесщелевой, реализуя полуметаллическую фазу. В этом режиме ранее разделенные мебиусовы пары пересекаются, что приводит к образованию защищенных симметрией вейлевских точек при нулевой энергии, изображенных на рис. 2b. Отметим, что дальнейшая компактификация зоны Бриллюэна вдоль направления k_y приводит к многообразию с топологией бутылки Клейна.

Из этого анализа вытекает полная фазовая картина, определяемая параметрами Δ_1, Δ_2 и Δ в высокосимметричных точках $k_x = 0, \pi$: 1. Полностью щелевая фаза: когда $\Delta_1 \pm \Delta_2 > 2\Delta$, выполняется для обоих знаков, система является щелевой как в точке $k_x = 0$, так и в $k_x = \pi$. 2. Полностью бесщелевая фаза: когда $\Delta_1 \pm \Delta_2 < 2\Delta$ выполняется для обоих знаков, система является бесщелевой как в $k_x = 0$, так и в $k_x = \pi$, содержа в общей сложности четыре вейлевских узла при нулевой энергии. 3. Гибридная (смешанная) фаза: когда $\Delta_1 - \Delta_2 < 2\Delta < \Delta_1 + \Delta_2$, реализуется гибридная фаза. Спектр является щелевым в точке $k_x = 0$, но бесщелевым в точке $k_x = \pi$, что дает два вейлевских узла при нулевой энергии. Переходы между этими фазами могут быть осуществлены путем изменения Δ, например, посредством одноосной деформации вдоль оси Z.

Далее, мы обратим внимание на еще одно интересное свойство рассматриваемой системы. Оно возникает как следствие наличия состояний с топологией Мебиуса при включении неэрмитовых эффектов. Мы увидим, что несимморфная симметрия нашей системы, задаваемая оператором L_z приводит к НСЭ [24–26].

Для анализа топологических свойств неэрмитовых систем применяется следующий подход [27]:

1. Определяется тип энергетической щели гамильтониана: линейная (line gap) или точечная (point gap).

2. В случае линейной щели неэрмитов гамильтониан может быть непрерывно деформирован в эрмитов, что позволяет исследовать его топологию стандартными методами.

3. В случае точечной щели такая деформация невозможна. Вместо этого используется процедура эрмитизации – построение удвоенного эрмитова гамильтониана $\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & H \\ H^\dagger & 0 \end{pmatrix}$, топологические инва-

рианты которого эквивалентны инвариантам исходного неэрмитова оператора [25, 28].

Точечная щель в спектре в точке $\mathbf{k}$ открывается при энергии E, если в этой точке $\det[H(\mathbf{k}) - E] \neq 0$. Пусть такая точечная щель возникает вдоль направления k_i. Тогда мы можем ввести число намотки [27, 28]

$$W_i(k_\perp, E) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} dk_i \frac{\partial}{\partial k_i} \ln\det[H(\mathbf{k}) - E], \quad (12)$$

где $k_\perp$ есть волновые вектора, перпендикулярные k_i. Поскольку топологические инварианты исходного гамильтониана H и удвоенного гамильтониана $\tilde{H}$ совпадают (см. пункт 3 в предыдущем абзаце), наличие в $\tilde{H}$ топологических дефектов с ненулевым числом намотки, гарантирует отличие от нуля числа намотки в исходном гамильтониане H. В нашей системе такими дефектами являются точки пересечения зон, возникающие благодаря их мебиусовой топологии. Отличие от нуля числа намотки вокруг точечной щели, в свою очередь, гарантирует возникновение НСЭ [25].

Влияние несимморфных симметрий на топологию неэрмитовых систем было исследовано в работе [29]. В частности, было получено общее условие (уравнение (17) в [29]), при выполнении которого удвоенный гамильтониан $\tilde{H}$ обладает несимморфной симметрией. Это условие связывает исходный гамильтониан $H(\mathbf{k})$ с его эрмитово-сопряженным аналогом $H^\dagger(\mathbf{k})$ и имеет вид:

$$U_g^{\mathbf{k}} H(\mathbf{k}) = \left(e^{-ik_z} U_g^{p_g\mathbf{k}} H(p_g\mathbf{k})\right)^\dagger, \quad (13)$$

где $U_g^{\mathbf{k}}$ – унитарное представление несимморфной операции g, а p_g – ее точечная часть. В нашем случае $U_g^{\mathbf{k}} = \mathrm{L}_z$, а $p_g\mathbf{k} = (-k_x, k_y, k_z)$. Легко видеть, что для эрмитовой системы условие (13) превращается в (3).

Таким образом, задача сводится к построению неэрмитового обобщения нашего исходного гамильтониана, сохраняющего несимморфную симметрию в смысле условия (13). Выполнение этого условия гарантирует, что удвоенный гамильтониан обладает несимморфной симметрией, и, согласно [29], в такой системе неизбежно возникает НСЭ. Важно, что в отличие от $\tilde{H}$, наличие несимморфной симметрии только в гамильтониане H не гарантирует ненулевого числа намотки, а, следовательно, и НСЭ. Кроме того, в случае неэрмитова гамильтониана не удается напрямую связать геометрию кристалла с топологическим инвариантом. По этой причине удобно работать с удвоенным (эрмитовым) гамильтонианом.

Мы ограничимся рассмотрением Т-симметричного случая. Для неэрмитовой системы условие Т-инвариантности записывается так [27]: $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{H}(-\mathbf{k})^T\mathcal{T} = \mathcal{H}(\mathbf{k})$, где $\mathcal{T} = \gamma_0 \otimes \tau_0 \otimes \sigma_y$. Простейший переход к Т-инвариантному неэрмитовому гамильтониану состоит в добавлении членов типа $\pm i\Delta_N\gamma_z \otimes \tau_0 \otimes \sigma_0$ или $\pm i\Delta_N\gamma_0 \otimes \tau_z \otimes \sigma_0$. Первый можно интерпретировать как чередующиеся по слоям накачка и потеря вдоль оси Z (накачка в слое 1, потеря в слое 2, или наоборот), а второй – то же самое только в узлах A и B (накачка – в A, потеря – в B, или наоборот). Такие расширения гамильтониана удовлетворяют необходимому условию (13). При наличии такой неэрмитовости удвоенный гамильтониан будет обладать топологией Мебиуса и содержать точки пересечения зон. Наличие таких точек гарантирует ненулевое число намотки, а следовательно, и возникновение НСЭ вдоль оси Z [25, 29].

Для анализа НСЭ рассмотрим неэрмитовость типа $i\Delta_N\gamma_z$. Для простоты рассмотрим точку $k_x = k_y = 0$. В этом случае диагонализованный гамильтониан имеет вид: $H = \begin{pmatrix} h_1(k_z) & i\Delta_N \\ i\Delta_N & h_2(k_z)\end{pmatrix}$. Прежде всего исследуем область энергии, в которой точечная щель остается открытой для всей зоны Бриллюэна. Нас будут интересовать состояния, которые в эрмитовом пределе ($\Delta_N = 0$) принадлежат разрешенной зоне ($|E - m| < 2\Delta$). Тогда величина $\det[H(\mathbf{k}) - m] = (E - m)^2 - 4\Delta^2\cos^2(k_z/2) + \Delta_N^2$ будет отлична от нуля для всех E в разрешенной зоне при $\Delta_N > 2\Delta$. Если же $\Delta_N < 2\Delta$, то точечная щель будет открыта только для части зоны $2\Delta > |E - m| > \sqrt{4\Delta^2 - \Delta_N^2}$.

НСЭ проявляется как локализация блоховских состояний (всех или части) в неэрмитовой системе с открытыми граничными условиями. Для исследования такой локализации мы воспользуемся подходом, развитым в работах [24, 30]. Основной целью в рамках данного подхода является прямой поиск локализованных решений среди блоховских функций при переходе от периодических граничных условий к открытым. Для этого вводится параметр $\beta = e^{ik}$ и решается характеристическое уравнение $\det[H(\beta) - E] = 0$. Если среди решений есть пара β_i, β_j такие, что $|\beta_i| = |\beta_j| \neq 1$ (равенство явно учитывает открытое граничное условие, а не равенство единице означает, что k не чисто вещественная), то это соответствует НСЭ [24, 30]. Решения с $|\beta_{i,j}| < 1$, $|\beta'_{i,j}| > 1$ соответствуют локализованным состояниям на левом и правом краях. В нашем случае получается следующее характеристическое уравнение: $\beta + \beta^{-1} = \pm S\,(E)$, где $S\,(E) = \Delta^{-1}\sqrt{(E-m)^2 + \Delta_N^2}$. Если $S > 2$, то уравнение имеет четыре вещественных решения: $|\beta_1| = |\beta_2| < 1$, $|\beta_3| = |\beta_4| > 1$. Эти решения соответствуют локализованным состояниям, т.е. НСЭ. Неравенство $S > 2$ соответствует энергиям, для которых точечная щель остается открытой (см. предыдущий абзац). Если же $S < 2$, то $|\beta_i| = 1$ для всех i, что соответствует делокализованным (блоховским) состояниям.

В отличие от стандартных моделей НСЭ, где характеристическое уравнение не факторизуется, в нашей системе благодаря несимморфной симметрии и мебиусовой топологии зон гамильтониан распадается на два сектора в объеме: $\beta + \beta^{-1} = \pm S\,(E)$. Однако при переходе к открытым границам эти сектора оказываются топологически связанными, и условие формирования непрерывного спектра (GBZ) требует равенства модулей корней, принадлежащих разным секторам (обычно это требование должно выполняться внутри каждого сектора [30]). Это является прямым проявлением мебиусовой структуры зон и приводит к устойчивому НСЭ, защищенному симметрией.

Наконец, вычислим число намотки, используя общую формулу (12). Для нашего случая такое вычисление, как легко показать, сводится к следующему интегралу

$$W_{k_z}\,(E) = \frac{1}{\pi i} \oint' dz \frac{\partial}{\partial z} \ln\left[z + z^{-1} - S(E)\right], \qquad (14)$$

где интегрирование проводится по половине окружности (от 0 до π из-за мебиусовой структуры зон) единичного радиуса вокруг точки $z = 0$, что соответствует интегрированию по физической зоне Бриллюэна с учетом мебиусовой связи. Из выражения под логарифмом видно, что для указанных выше областей зоны, в которых точечная щель остается открытой, только один из его нулей оказывается внутри контура, что дает $W_{k_z} = 1$ (число намотки равно 1, а не 2 из-за мебиусовой структуры зон). Для остальных областей число намотки, очевидно, будет равно нулю.

Физический механизм, связывающий мебиусную топологию зон с НСЭ, состоит в следующем. Точки пересечения, возникающие в мебиусных зонах, являются топологически защищенными – они не могут быть устранены малыми деформациями гамильтониана, сохраняющими симметрию. При включении неэрмитовости, не нарушающей несимморфную симметрию, мебиусову структуру имеет также и спектр удвоенного гамильтониана с соответствующими точками пересечения зон. Каждая такая точка становится гарантией нетривиальной намотки собственных функций. Иными словами, симметрия накладывает жесткое топологическое условие на спектр системы в периодических граничных условиях: число намотки вокруг точки вырождения обязано быть ненулевым. При переходе к системе с открытыми границами эта топологическая намотка не может исчезнуть бесследно. Вместо этого она проецируется в реальное пространство, заставляя некоторые собственные состояния экспоненциально локализовываться на краях системы. Это и есть физическое проявление НСЭ, индуцированного несимморфной симметрией.

В конце отметим, что согласно [26] (см. также ссылки в этом обзоре), необходимыми условиями для наблюдения НСЭ являются ненормальность гамильтониана ($[H, H^\dagger] \neq 0$) и невзаимность абсолютного значения пропагатора ($|G_{ij}| \neq |G_{ji}|$). В нашей системе, при наличии несимморфной симметрии, эти условия выполняются автоматически. Более того, эта симметрия через уравнение (13) накладывает дополнительную структуру, которая не просто обеспечивает выполнение этих условий, но и делает скин-эффект топологически защищенным.

Предложенная структура может быть реализована в системах на основе $(\mathrm{Bi, Sb})_2\mathrm{Te}_3$ или HgTe/CdTe (см., например, [31]), открывая возможности для экспериментального наблюдения мебиусовой топологии и НСЭ. Дальнейшие исследования могут быть направлены на изучение нелинейных оптических эффектов, например, сдвигового фототока, природа которого связана непосредственно с зонной топологией.

Автор благодарит Владимира Еналдиева за полезные обсуждения результатов работы.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Московского физико-технического института (Госзадание # FSMG-2026-0012) и Российского научного фонда, проект # 24-72-10015 (заключительная часть работы).

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. M. Z. Hasan and C. L. Kane, "Colloquium: Topological insulators", Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
2. X.-L. Qi and S.-C. Zhang, "Topological insulators and superconductors", Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2011).
3. J. E. Moore, "The birth of topological insulators", Nature **464**, 194 (2010).
4. C. L. Kane and E. J. Mele, "z_2 topological order and the quantum spin hall effect", Phys. Rev. Lett. **95**, 146802 (2005).

5. B. A. Bernevig, T. L. Hughes, and S.-C. Zhang, "Quantum spin hall effect and topological phase transition in hgte quantum wells", Science **314**, 1757 (2006).
6. M. König, S. Wiedmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, "Quantum spin hall insulator state in hgte quantum wells", Science **318**, 766 (2007).
7. E. Olshanetsky, Z. Kvon, G. Gusev, and N. Mikhailov, "Observation of different edge current states localization scenarios in a HgTe based two-dimensional topological insulator", Phys. E: Low-Dimens. Syst. Nanostructures **147**, 115605 (2023).
8. N. Xu, Y. Xu, and J. Zhu, "Topological insulators for thermoelectrics", npj Quantum Mater. **2**, 51 (2017).
9. C. Fu, Y. Sun, and C. Felser, "Topological thermoelectrics", APL Mater. **8**, 040913 (2020).
10. Z. Alisultanov, E. Idrisov, and A. Kavokin, "Thermoelectric effects in two-dimensional topological insulators", Phys. Rev. B **111**, 155430 (2025).
11. Z. Z. Alisultanov and A. Kudlis, "Disorder-induced topological transitions in a multilayer topological insulator", Phys. Rev. B **109**, 165141 (2024).
12. Z. Alisultanov and A. Kudlis, "Theory of off-diagonal disorder in multilayer topological insulators", Phys. Rev. B **112**, 205108 (2025).
13. Y. Zhao, Y.-X. Huang, and S. A. Yang, "Z_2-projective translational symmetry protected topological phases", Phys. Rev. B **102**, 161117 (2020).
14. Z. Chen, S. A. Yang, and Y. Zhao, "Brillouin klein bottle from artificial gauge fields", Nat. Commun. **13**, 2215 (2022).
15. C. Zhang, Z. Chen, Z. Zhang, and Y. Zhao, "General theory of momentum-space nonsymmorphic symmetry", Phys. Rev. Lett. **130**, 256601 (2023).
16. C. Zhang, P. Wang, J. Lyu, and Y. Zhao, "Brillouin platycosms and topological phases", Phys. Rev. Lett. **135**, 136601 (2025).
17. N. Hatano and D. R. Nelson, "Localization transitions in non-hermitian quantum mechanics", Phys. Rev. Lett. **77**, 570 (1996).
18. M. Ezawa, "Electric-circuit simulation of the schrödinger equation and non-hermitian quantum walks", Phys. Rev. B **100**, 165419 (2019).
19. P. Kokhanchik, D. Solnyshkov, and G. Malpuech, "Nonhermitian skin effect induced by rashba-dresselhaus spinorbit coupling", Phys. Rev. B **108**, L041403 (2023).
20. L. Zhou, H. Li, W. Yi, and X. Cui, "Engineering nonhermitian skin effect with band topology in ultracold gases", Commun. Phys. **5**, 252 (2022).
21. Z. Z. Alisultanov and E. G. Idrisov, "Non-hermitian weyl fermions of types III and IV: Hamiltonian, topological protection, and landau levels", Phys. Rev. B **107**, 085135 (2023).
22. Z. Z. Alisultanov and N. Demirov, "Tilt and anisotropy of the dirac spectrum caused by the overlapping of bloch functions", JETP Lett. **117**, 776 (2023).
23. A. A. Burkov and L. Balents, "Weyl semimetal in a topological insulator multilayer", Phys. Rev. Lett. **107**, 127205 (2011).
24. S. Yao and Z. Wang, "Edge states and topological invariants of non-hermitian systems", Phys. Rev. Lett. **121**, 086803 (2018).
25. N. Okuma, K. Kawabata, K. Shiozaki, and M. Sato, "Topological origin of non-hermitian skin effects", Phys. Rev. Lett. **124**, 086801 (2020).
26. J. T. Gohsrich, A. Banerjee, and F. K. Kunst, "The nonhermitian skin effect: A perspective", Europhysics Letters **150**, 60001 (2025).
27. K. Kawabata, K. Shiozaki, M. Ueda, and M. Sato, "Symmetry and topology in non-hermitian physics", Phys. Rev. X **9**, 041015 (2019).
28. Z. Gong, Y. Ashida, K. Kawabata, K. Takasan, S. Higashikawa, and M. Ueda, "Topological phases of nonhermitian systems", Phys. Rev. X **8**, 031079 (2018).
29. Y. Tanaka, R. Takahashi, and R. Okugawa, "Nonhermitian skin effect enforced by nonsymmorphic symmetries", Phys. Rev. B **109**, 035131 (2024).
30. K. Yokomizo and S. Murakami, "Non-bloch band theory of non-hermitian systems", Phys. Rev. Lett. **123**, 066404 (2019).
31. Z. Wan, Q. Qian, Y. Huang, and X. Duan, "Layered hybrid superlattices as designable quantum solids", Nature **635**, 49 (2024).