

Трехмерное векторное туннелирование оптической волны в ENZ-среде

В. П. Рубан¹⁾

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Россия

Поступила в редакцию 10 апреля 2026 г.

После переработки 17 апреля 2026 г.

Принята к публикации 19 апреля 2026 г.

Для эффективно изотропной ENZ-среды с учетом керровской нелинейности, слабой пространственной неоднородности, диссипации и внешней накачки численно исследовано туннелирование специфических тороидальных световых структур между двумя потенциальными ямами в рамках соответствующего векторного уравнения Гинзбурга–Ландау. Оптическое поле характеризуется двумя комплексными (псевдо)векторами $\mathbf{C}_{1,2}(t)$, так что каждый вектор задает амплитуду и пространственную ориентацию структуры в своей яме. Векторы \mathbf{C}_1 и \mathbf{C}_2 связаны туннельным взаимодействием, параметры которого различны для компонент вдоль и поперек геометрической оси. Динамика приближенно описывается замкнутой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, где наряду с нелинейностью и туннелированием также учитываются диссипативные эффекты, в том числе и те, что обусловлены возбуждением (в неоднородной среде) слабого коротковолнового потенциального электрического поля.

DOI: 10.7868/S3034576626050155

Введение. Туннелирование волн – одно из наиболее фундаментальных физических явлений. Этот эффект привлек к себе внимание не только в квантовой механике [1], но и в классической физике. Например, в оптике туннелирование света играет важную роль, в частности – при формировании солитонов в системах близко расположенных световодов (см., например, [2–7] и ссылки там). В подобных конфигурациях эффективный многоямный потенциал, в котором распространяется волна, имеет двумерный характер (по поперечным координатам), тогда как продольная координата играет роль эволюционной переменной.

В данной работе нас будет интересовать более сложное, существенно трехмерное туннелирование векторного оптического поля. Реализация такого нового режима представляется возможной в объемных ENZ-средах (Epsilon Near Zero) – искусственно созданных композитных материалах, в которых собственные числа вещественной части тензора эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{jl}(\omega)$ проходят через ноль в области частот видимого либо инфракрасного спектра (см., например, [8–18] и ссылки там). Вариант подобной ENZ-среды – диэлектрическая матрица, в которую включены металлические шарики субволнового размера (см. [19] и ссылки там). Для простоты мы бу-

дем предполагать среду эффективно изотропной, с частотой ω_0 перехода через ноль [20]. Очень важно, что уравнение движения (см. далее (6)), которому подчиняется комплексная временная огибающая $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ электрического поля оптической волны, в главном приближении суть уравнение Шредингера для “поперечно-векторной” частицы. Если размер шариков плавно меняется в пространстве, то возникает эффективный внешний потенциал $U(\mathbf{r})$, который при наличии достаточно глубокого минимума (или нескольких минимумов) способен полностью захватить световую волну. Как мы увидим далее, в центрально симметричной потенциальной яме (когда функция $U(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|)$ фактически зависит только от радиальной координаты r) существуют связанные состояния с тороидальной симметрией вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{tor}}(\mathbf{r}; \mathbf{C}) e^{i\Xi t} = \left[\mathbf{C} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right] R(r) e^{i\Xi t}, \quad (1)$$

где \mathbf{C} – произвольный малый комплексный (псевдо)вектор, Ξ – положительное собственное значение. Вещественная функция $R(r)$ удовлетворяет обычно скалярному радиальному уравнению Шредингера для состояний с моментом импульса $l = 1$ [1]:

$$-R'' - 2\frac{R'}{r} + 2\frac{R}{r^2} + V(r)R = -\Xi R. \quad (2)$$

¹⁾e-mail: ruban@itp.ac.ru

Нас интересует решение с радиальным квантовым числом $n_r = 0$ (самое низкое по частоте/энергии), причем нормированное условием

$$\frac{8\pi}{3} \int_0^\infty R^2 r^2 dr = 1. \quad (3)$$

Это обеспечивает удобную для дальнейшего анализа нормировку

$$\int |\mathbf{E}_{\text{tot}}(\mathbf{r}; \mathbf{C})|^2 d\mathbf{r} = |\mathbf{C}|^2. \quad (4)$$

По сути, мы имеем здесь два вещественных вектора – $\text{Re } \mathbf{C}$ и $\text{Im } \mathbf{C}$, которые в общем случае задают два по-разному ориентированных в пространстве вещественных тора. В линейном пределе оба вектора неподвижны, но при учете слабой нелинейности керровского типа, как будет показано далее, они вращаются вокруг их векторного произведения.

Пусть теперь у нас имеются две одинаковые ямы с подобными световыми сгустками, на расстоянии d одна от другой (не слишком далеко, но и не слишком близко), причем

$$U(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|) + V(|\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|). \quad (5)$$

Очевидно, что между ямами должно происходить туннелирование света. В результате совместного действия туннелирования и нелинейности, а также с учетом дисперсионной диссипации и общего линейного усиления, динамика соответствующих комплексных векторов $\mathbf{C}_1(t)$ и $\mathbf{C}_2(t)$ окажется довольно нетривиальной.

Цель данной работы – вывести соответствующую приближенную эволюционную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для $\mathbf{C}_{1,2}(t)$, а также впервые пронаблюдать подобное векторное туннелирование непосредственно в трехмерном численном эксперименте на основе недавно предложенной модели [20].

Аналитические оценки. В рассматриваемой нами модели ENZ-среды квазимонохроматическая световая волна описывается векторным уравнением Гинзбурга–Ландау, которое мы сразу же представим в обезразмеренном виде (см. подробности в [20]):

$$i\mathbf{E}_t = (1 - i\nu_\perp) \text{rot rot } \mathbf{E} - (D_\parallel - i\nu_\parallel) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + [U(\mathbf{r}) + iG] \mathbf{E} - (1 + i\sigma) |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} - \eta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}^*. \quad (6)$$

Здесь G – малый коэффициент линейного усиления за счет внешней накачки, D_\parallel – малый дисперсионный параметр для потенциальных волн, которые с необходимостью присутствуют в изотропной

ENZ-среде [21] и являются аналогом ленгмюровских волн в плазме [22–25], ν_\perp и ν_\parallel – дисперсионно-диссипативные коэффициенты, имеющие такой же порядок малости, что и D_\parallel . Рассматриваемая фокусирующая нелинейность керровского типа характеризуется диссипативным параметром σ и (вообще говоря, комплексным) параметром η . Однако для удобства численного моделирования мы далее положим $\sigma = 0$, $\eta = 0.5$ (см. [20]), так что вся диссипация будет происходить диффузионным образом за счет ν_\perp и ν_\parallel .

Принципиально важно, что в силу малости $D_\parallel \sim \sim 10^{-3}$ соответствующие потенциальные волны оказываются короткими по сравнению с соленоидальными волнами той же частоты, и поэтому затухают гораздо быстрее. “Самостоятельные” потенциальные структуры могут сформироваться только при сильно различных коэффициентах усиления $G_\parallel \gg G_\perp$ [20]. Здесь же имеется в виду случай равных $G_\parallel = G_\perp = G$, так что основной интерес для нас представляют почти соленоидальные решения уравнения (6).

Положим временно $G = 0$ и заметим, что в случае одной центрально-симметричной ямы в линейном пределе существуют строго соленоидальные решения уравнения (6) вида

$$\mathbf{E}_\perp = [\mathbf{r} \times \nabla \Psi(\mathbf{r}, t)], \quad (7)$$

где скалярная комплексная функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера для частицы с комплексной массой:

$$i\Psi_t = -(1 - i\nu_\perp) \hat{\Delta} \Psi + V(r) \Psi. \quad (8)$$

Естественно, что D_\parallel и ν_\parallel никак не влияют на такие поперечно-электрические решения. В частности, имеются собственные функции

$$\Psi = Y_{l,m}(\mathbf{r}/r) \psi_l(r), \quad (9)$$

соответствующие состояниям с угловым моментом l (начиная с $l = 1$) и магнитным квантовым числом m [1]. Нас далее будут интересовать решения при $l = 1$, когда

$$\mathbf{E} = \left[\mathbf{C} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \psi_1(r) e^{\Lambda t}, \quad (10)$$

где Λ – комплексное собственное число. В силу малости ν_\perp диссипация здесь дает лишь малые поправки к консервативному решению (1), так что $\psi_1(r) \approx \approx R(r)$, $\Lambda \approx -\gamma + i\Xi$, причем малый коэффициент затухания $\gamma \sim \nu_\perp/S^2$, где S – характерная ширина ямы. Учет параметра G приводит к сдвигу собственного значения $\Lambda \rightarrow \Lambda + G$.

Все остальные собственные функции линеаризованного уравнения (6) имеют поперечно-магнитную структуру

$$\mathbf{E}_{\text{TM}} = \mathbf{r}Y_{l,m}(\mathbf{r}/r)F(r) + \nabla[Y_{l,m}(\mathbf{r}/r)\Phi(r)]. \quad (11)$$

В них присутствует заметная, а то и вовсе основная доля коротких потенциальных волн, что дает большие коэффициенты затухания. Такие решения нас не интересуют.

Пусть теперь имеются две потенциальные ямы с центрами на вертикальной оси в точках $z = \pm d/2$. В этом случае чисто соленоидальные решения возможны лишь для осесимметричных конфигураций, когда $\mathbf{C}_{1,2} \propto \mathbf{e}_z$. Как и при скалярном туннелировании, существуют два близких по частоте $\Omega = -\Xi \mp J_{\parallel}$ собственных состояния

$$\mathbf{E}_{\pm}^{(z)} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mathbf{E}_{\text{тор}} \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2}; \mathbf{e}_z \right) \pm \mathbf{E}_{\text{тор}} \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2}; \mathbf{e}_z \right) \right], \quad (12)$$

причем знаку “+” соответствует состояние с меньшей частотой $\Omega \approx -\Xi - J_{\parallel}$. Коэффициент затухания для обоих решений мало отличается от γ .

Заметим попутно, что осесимметричные соленоидальные решения вида $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}]F(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t)$ возможны при произвольном потенциале $U(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$. В этом случае туннелирование носит, как правило, скалярный характер.

Двухямные собственные решения с поперечными по отношению к оси симметрии векторами $\mathbf{C}_{1,2}$ с необходимостью включают в себя малые потенциальные коротковолновые добавки. Эти добавки обусловлены взаимодействием между соленоидальным и потенциальным полями через слагаемое $U(\mathbf{r})\mathbf{E}$ в уравнении (6). Надо сказать, что потенциальный вклад заметно увеличивает общий темп диссипации двухямных “поперечных” состояний, хотя в главном приближении они по-прежнему представляют собой линейные комбинации тороидальных полей:

$$\mathbf{E}_{\pm}^{(x,y)} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mathbf{E}_{\text{тор}} \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2}; \mathbf{e}_{x,y} \right) \pm \mathbf{E}_{\text{тор}} \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2}; \mathbf{e}_{x,y} \right) \right]. \quad (13)$$

Теперь состояние с меньшей частотой $\Omega \approx -\Xi - J_{\parallel}$ соответствует знаку “-”, при котором два поперечно ориентированных тороидальных поля с разнесенными центрами конструктивно суммируются вблизи начала координат. Нетривиальный факт состоит в том, что из-за различия в потенциальных добавках коэффициенты затухания для поперечных состояний существенно различаются между собой: более низкое по частоте состояние затухает быстрее:

$$\gamma_{\perp}^{(-)} > \gamma_{\perp}^{(+)} > \gamma. \quad (14)$$

Это обстоятельство выяснилось при численном моделировании линеаризованного уравнения (6). Аналитические оценки для $\gamma_{\perp}^{(\pm)}$ пока отсутствуют. Кроме того, подтвердилось естественное предположение о справедливости неравенства туннельных параметров $J_{\perp} > J_{\parallel}$, которое обусловлено несколько большим поперечным размером тора по сравнению с его продольным размером и, как следствие этого, более благоприятными условиями для туннелирования при поперечной ориентации.

Рассмотрим суперпозицию собственных состояний (без учета общего множителя $\exp(i\Xi t)$) с коэффициентами $A_{\pm}^{(j)}$, где $j = \{x, y, z\}$. Принимая во внимание вышеизложенные замечания, мы приходим к выводу, что в линейном приближении эти величины удовлетворяют диагональной системе ОДУ:

$$\dot{A}_{\pm}^{(z)} = [G - \gamma \pm iJ_{\parallel}]A_{\pm}^{(z)}, \quad \dot{A}_{\pm}^{(x,y)} = [G - \gamma_{\perp}^{(\pm)} \mp iJ_{\perp}]A_{\pm}^{(x,y)}. \quad (15)$$

Нам, однако, будет более удобно иметь дело именно с векторами $\mathbf{C}_{1,2}$, поскольку нелинейный вклад тогда выглядит проще. С учетом равенств

$$C_1^{(j)} = \frac{[A_+^{(j)} + A_-^{(j)}]}{\sqrt{2}}, \quad C_2^{(j)} = \frac{[A_+^{(j)} - A_-^{(j)}]}{\sqrt{2}} \quad (16)$$

и нормировки функции $R(r)$, получаем приближенные уравнения, определяющие динамику векторов $\mathbf{C}_{1,2}$:

$$i\dot{C}_{1,2}^{(z)} = i[G - \gamma]C_{1,2}^{(z)} - J_{\parallel}C_{2,1}^{(z)} + \frac{\partial H_{\text{nl}}}{\partial C_{1,2}^{*(z)}}, \quad (17)$$

$$i\dot{C}_{1,2}^{(x,y)} = \frac{i}{2} [2G - \gamma_{\perp}^{(+)} - \gamma_{\perp}^{(-)}]C_{1,2}^{(x,y)} + \left(\frac{i}{2} [\gamma_{\perp}^{(-)} - \gamma_{\perp}^{(+)}] + J_{\perp} \right) C_{2,1}^{(x,y)} + \frac{\partial H_{\text{nl}}}{\partial C_{1,2}^{*(x,y)}}. \quad (18)$$

Мы включили сюда нелинейные добавки в общем виде, исходя из гамильтоновой структуры нелинейности в уравнении (6) при условиях $\sigma = 0$, $\text{Im} \eta = 0$. Оценку нелинейного гамильтониана H_{nl} произведем вариационным методом. Очевидно, что в главном приближении нелинейная связь между \mathbf{C}_1 и \mathbf{C}_2 отсутствует, и поэтому можно рассмотреть по отдельности каждую яму. Подставим выражение (1) в соответствующую часть гамильтонова функционала (см. [20]),

$$\mathcal{H}_{\text{nl}} = -\frac{1}{2} \int \left[|\mathbf{E}|^4 + \eta |(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})|^2 \right] d\mathbf{r}. \quad (19)$$

После простых вычислений получим

$$H_{\text{nl}} = -\frac{1}{2} \sum_{s=1,2} \left[\tilde{\alpha} |\mathbf{C}_s|^4 + \tilde{\beta} |(\mathbf{C}_s \cdot \mathbf{C}_s)|^2 \right], \quad (20)$$

где новые эффективные керровские коэффициенты $\tilde{\alpha} = I_4(7 + 2\eta)$, $\tilde{\beta} = I_4(1 + 6\eta)$, а параметр I_4 представляет собой интеграл

$$I_4 = \frac{4\pi}{15} \int_0^\infty R^4(r)r^2 dr. \quad (21)$$

Учет слабой керровской нелинейности сводится таким образом к подстановке в правые части дифференциальных уравнений (17)–(18) соответствующих компонент векторного выражения

$$\frac{\partial H_{nl}}{\partial \mathbf{C}_{1,2}^*} = -\tilde{\alpha} |\mathbf{C}_{1,2}|^2 \mathbf{C}_{1,2} - \tilde{\beta} (\mathbf{C}_{1,2} \cdot \mathbf{C}_{1,2}) \mathbf{C}_{1,2}^*. \quad (22)$$

Как было показано в работе [20], взятая сама по себе подобная нелинейная динамика для отдельной ямы соответствует (при $\tilde{\beta} \neq 0$) вращению вещественной и мнимой частей вектора $\mathbf{C}_{1,2}$ вокруг их не зависящего от времени векторного произведения (если отвлечься от накрутки фазы). Мы видим, что в общем случае с учетом этого вращения все компоненты векторов оказываются взаимно “зацепленными”, и это делает динамику (17)–(18) достаточно нетривиальной.

Численное моделирование. В данной работе было проведено качественное сравнение конечномерной модели векторного туннелирования (17)–(18) и полной волновой динамики в рамках уравнения (6). При компьютерном моделировании уравнения (6) использовался численный метод, описанный в работе [20]. Профиль каждой потенциальной ямы задавался в гауссовой форме,

$$V(r) \approx -35.0 \exp(-2.0r^2), \quad (23)$$

а затем использовалась формула (5). Расстояние между центрами ям $d = 2.4$ обеспечивало подходящий режим туннелирования. Ненормированная функция $\tilde{R}(r)$, необходимая для составления начального состояния, бралась по вариационному приближению в виде $\tilde{R}(r) \approx r \exp(-2.15r^2)$. Знаки приближенного равенства в этих формулах связаны с требованием гладкости функций при выполнении периодических граничных условий для вычислительной области $(2\pi) \times (2\pi) \times (2\pi)$. В зависимости от выбранных значений параметров D_{\parallel} , ν_{\perp} и ν_{\parallel} , использовалось пространственное разрешение 160^3 , 192^3 либо 240^3 точек трехмерной числовой решетки. Самое мелкое разрешение потребовалось для корректного учета потенциальной компоненты электрического поля \mathbf{E}_{pot} в случае малых параметров $D_{\parallel} = 0.005$, $\nu_{\perp} = 0.0005$ и $\nu_{\parallel} = 0.005$ (эти значения использованы в представленных далее численных примерах). При этом доля потенциальной части волнового действия

$\mathcal{A}_{\text{pot}} = \int |\mathbf{E}_{\text{pot}}|^2 d\mathbf{r}$ не превышала нескольких процентов от полного действия $\mathcal{A} = \int |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{r}$ на протяжении всего периода времени.

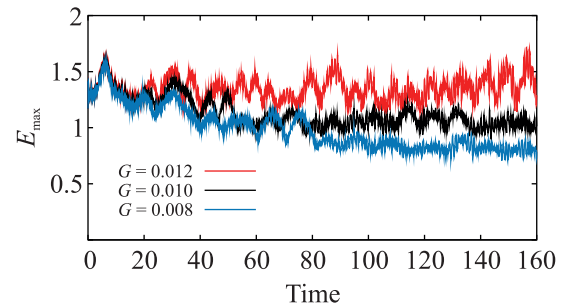


Рис. 1. (Цветной онлайн) Эволюция максимального значения амплитуды электрического поля при туннелировании тороидальных световых структур в рамках уравнения (6) для трех различных значений коэффициента усиления. Одинаковое начальное состояние задавалось (ненормированным) векторами $\tilde{\mathbf{C}}_1(0) = (4, 0, 0)^T$ и $\tilde{\mathbf{C}}_2(0) = (0, 0, 4)^T$. Значения остальных параметров указаны в тексте

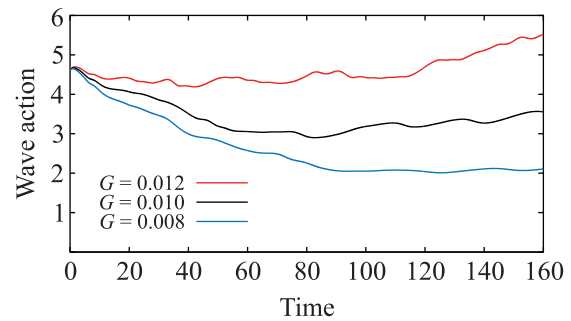


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость волнового действия от времени для трех численных экспериментов, соответствующих рис. 1

Характерные численные результаты показаны на рис. 1, 2 и 3. Так, на рисунке 1 проведено сравнение зависимостей максимального значения электрического поля $E \equiv |\mathbf{E}|$ от времени для трех различных значений коэффициента линейного усиления. Если отвлечься от сравнительно мелких возмущений, вызванных несовершенством начальных условий (присутствуют незахваченные ямами волны), то обе кривые состоят в основном из характерных выпуклых вверх участков, когда поле в одной яме сильнее поля в другой яме. Изломы кривых происходят при смене доминирования в результате туннелирования.

На рисунке 2 показаны соответствующие временные зависимости для волнового действия \mathcal{A} . Они далеки от суммы трех экспонент (с коэффициентами $2[G - \gamma_{\perp}^{(-)}]$, $2[G - \gamma_{\perp}^{(+)}]$ и $2[G - \gamma]$), как было бы в

линейной системе. Фактически скорость диссипации волнового действия увеличивалась при горизонтальном положении оси более сильного тора, в согласии с предсказанием системы ОДУ (17)–(18) при выполнении неравенств (14).

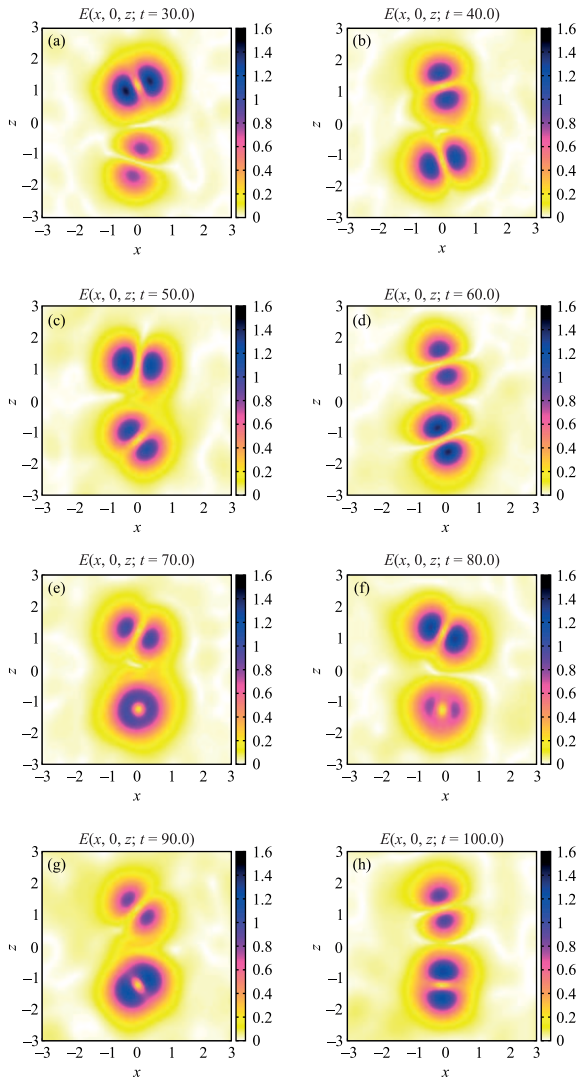


Рис. 3. (Цветной онлайн) Пример динамики тороидальных волновых структур, который соответствует кривой $G = 0.012$ на рис. 1. Показана амплитуда электрического поля в плоскости $y = 0$ в моменты времени: (a) – $t = 30$; (b) – $t = 40$; (c) – $t = 50$; (d) – $t = 60$; (e) – $t = 70$; (f) – $t = 80$; (g) – $t = 90$; (h) – $t = 100$. Использована негативная цветовая шкала, когда темные оттенки означают большую амплитуду, что позволяет лучше различать слабые волны вне потенциальных ям

На рисунке 3 представлена амплитуда поля в сечущей плоскости $y = 0$ в последовательные моменты времени для одного из экспериментов. Здесь ясно видны повороты осей торов в плоскости (x, z) и сме-

на максимумов амплитуды, в согласии с упрощенной системой ОДУ (17)–(18). Во избежание недоразумений обратим отдельное внимание на рис. 3е, где на первый взгляд кажется, что ось нижнего тора ориентирована примерно вдоль оси y , которая перпендикулярна плоскости рисунка. На самом же деле мы имеем здесь наложение интенсивностей двух примерно одинаковых по амплитуде торов (действительного и мнимого) с взаимно перпендикулярными осями, лежащими по-прежнему в плоскости (x, z) . При этом максимальная интенсивность поля достигается в нижней яме в двух точках, расположенных симметрично относительно плоскости $y = 0$ и не попадающих поэтому на данный рисунок.

Надо еще сказать, что упомянутые выше слабые незахваченные волны с неизбежностью усиливаются с течением времени, и на временах $t \gtrsim 200$ они уже довольно серьезно искажают картину явления.

В целом, предсказанный на основе аналитических оценок механизм векторного туннелирования нашел свое подтверждение в численных экспериментах.

Закключение. Таким образом, в этой работе впервые показано, что векторная нелинейная волна в двухямном внешнем потенциале способна существовать и туннелировать в виде специфических структур. С учетом использованного в работе [20] способа обезразмеривания уравнения (6), реальный пространственный масштаб этих объектов есть $S_{\text{phys}} \sim \sim Qc/\omega_0$, временной масштаб их существования $T_{\text{phys}} \sim 10^2 Q^2/\omega_0$, а масштаб электрического поля $E_{\text{phys}} \sim 1/(Q\sqrt{|\alpha|})$, где c – скорость света, Q – произвольное достаточно большое число (порядка сотни), α – физическая величина соответствующего керровского коэффициента на частоте ω_0 .

В данной работе рассмотрен случай, когда оптические структуры параметризуются (псевдо)векторами. В принципе, как видно из формулы (9), аналогичным образом можно рассмотреть и более сложные структуры, которые параметризуются неприводимыми тензорами ранга $l \geq 2$ (либо сферическими гармониками $Y_{l,m}$). Такая задача остается на будущее, равно как и более детальное сопоставление системы ОДУ (17)–(18) и трехмерной волновой динамики (6), включая получение аналитических оценок для поперечных коэффициентов затухания $\gamma_{\perp}^{(\pm)}$ и вычисление туннельных параметров.

Финансирование работы. Работа выполнена в рамках госзадания по теме FFWR-2024-0013.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (Наука, М., 1974) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, v. 3: *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Pergamon, N.Y., 1977)].
2. M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, “Discrete vector spatial solitons in a nonlinear waveguide array”, *Phys. Rev. E* **65**, 056618 (2002).
3. X. Luo, Q. Xie, and B. Wu, “Nonlinear coherent destruction of tunneling”, *Phys. Rev. A* **76**, 051802(R) (2007).
4. F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Ya. Silberberg, “Discrete solitons in optics”, *Phys. Rep.* **463**, 1 (2008).
5. A. Szameit, Y. V. Kartashov, F. Dreisow, M. Heinrich, T. Pertsch, S. Nolte, A. Tünnermann, V. A. Vysloukh, F. Lederer, and L. Torner, “Inhibition of Light Tunneling in Waveguide Arrays”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 153901 (2009).
6. I. L. Garanovich, S. Longhi, A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, “Light propagation and localization in modulated photonic lattices and waveguides”, *Phys. Rep.* **518**, 1 (2012).
7. R. A. Vicencio, C. Cantillano, L. Morales-Inostroza, B. Real, C. Mejia-Cortes, S. Weimann, A. Szameit, and M. I. Molina, “Observation of Localized States in Lieb Photonic Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 245503 (2015).
8. R. Maas, J. Parsons, N. Engheta, and A. Polman, “Experimental realization of an epsilon-near-zero metamaterial at visible wavelengths”, *Nat. Photonics* **7**, 907 (2013).
9. I. Liberal and N. Engheta, “Near-zero refractive index photonics”, *Nat. Photonics* **11**, 149 (2017).
10. N. Kinsey, C. DeVault, A. Boltasseva, and V. M. Shalaev, “Near-zero-index materials for photonics”, *Nat. Rev. Mater.* **4**, 742 (2019).
11. J. Wu, Z. T. Xie, Y. Sha, H. Y. Fu, and Q. Li, “Epsilon-near-zero photonics: infinite potentials”, *Photonics Res.* **9**(8), 1616 (2021).
12. J. E. Sipe and R. W. Boyd, “Nonlinear susceptibility of composite optical materials in the Maxwell Garnett model”, *Phys. Rev. A* **46**, 1614 (1992).
13. G. L. Fischer, R. W. Boyd, R. J. Gehr, S. A. Jenekhe, J. A. Osaheni, J. E. Sipe, and L. A. Weller-Brophy, “Enhanced Nonlinear Optical Response of Composite Materials”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1871 (1995).
14. A. Ciattoni, C. Rizza, and E. Palange, “Extreme nonlinear electrodynamics in metamaterials with very small linear dielectric permittivity”, *Phys. Rev. A* **81**, 043839 (2010).
15. C. Rizza, A. Ciattoni, and E. Palange, “Two-peaked and flat-top perfect bright solitons in nonlinear metamaterials with epsilon near zero”, *Phys. Rev. A* **83**, 053805 (2011).
16. O. Reshef, I. De Leon, M. Z. Alam, and R. W. Boyd, “Nonlinear optical effects in epsilon-near-zero media”, *Nat. Rev. Mater.* **4**, 535 (2019).
17. D. Fomra, A. Ball, S. Saha, J. Wu, Md. Sojib, A. Agrawal, H. J. Lezec, and N. Kinsey, “Nonlinear optics at epsilon near zero: From origins to new materials”, *Appl. Phys. Rev.* **11**(1), 011317 (2024).
18. L. Sun, X. Yang, and J. Gao, “Loss-compensated broadband epsilon-near-zero metamaterials with gain media”, *Appl. Phys. Lett.* **103**, 201109 (2013).
19. В. В. Тюрнев, “Расчет эффективной диэлектрической проницаемости композитного материала, содержащего наполнитель с отрицательной диэлектрической проницаемостью”, *ЖЭТФ* **166**, 603 (2024) [V. V. Tyurnev, “Calculation of the effective permittivity of a composite material containing a filler with negative permittivity,” *ZhETF* **166**, 603 (2024)].
20. В. П. Рубан, “Численное моделирование световых структур в объемных ENZ-средах с керровской нелинейностью”, *Письма в ЖЭТФ* **123**, 105 (2026) [V. P. Ruban, “Numerical Simulation of Light Structures in Bulk Epsilon-Near-Zero Media with Kerr Nonlinearity”, *JETP Lett.* **123**, 93 (2026)].
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред* (Наука, М., 1982) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, v. 8: *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon, N.Y., 1984)].
22. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика* (Наука, М., 1979) [E. M. Lifshits and L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics* (Pergamon, Oxford, 1981)].
23. Е. А. Кuznetsov, “The collapse of electromagnetic waves in a plasma”, *ZhETF* **66**, 2037 (1974) [*Sov. Phys. JETP* **39**(6), 1003 (1974)].
24. V. E. Zakharov, S. L. Musher, and A. M. Rubenchik, “Hamiltonian approach to the description of non-linear plasma phenomena”, *Phys. Rep.* **129**, 285 (1985).
25. Е. А. Кuznetsov, A. M. Rubenchik, and V. E. Zakharov, “Soliton stability in plasmas and hydrodynamics”, *Phys. Rep.* **142**, 103 (1986).