Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 1, с. 3 – 8

Спектрально-угловые распределения рентгеновских крученых фотонов, излучаемых релятивистскими электронами при осевом каналировании

К. Б. Коротченко[+1)], *Ю. П. Кунашенко*[*]

[+]*Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 634050 Томск, Россия*

[*]*Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 634050 Томск, Россия*

Поступила в редакцию 15 мая 2026 г.
После переработки 2 июня 2026 г.
Принята к публикации 2 июня 2026 г.

В рамках квантовой электродинамики было исследовано спектрально-угловое распределение крученых фотонов, испускаемых релятивистскими электронами в процессе аксиального каналирования. Вероятность излучения имеет резкие пики при определенных энергиях, положение которых совпадает с положениями пиков излучения при каналировании. Распределение фотонов имеет два максимума в плоскости "энергия–угол".

DOI: 10.7868/S3034576626070018

1. Введение. В нашей предыдущей работе [1] мы исследовали угловые распределения крученых фотонов (TW-фотонов), испускаемых релятивистскими электронами при аксиальном каналировании. Была разработана теория излучения TW-фотонов аксиально каналированными электронами в рамках квантовой электродинамики. Эта теория позволила нам впервые рассчитать угловые распределения TW-фотонов, испускаемых каналированными электронами. В данной работе мы продолжаем наше исследование излучения TW-фотонов. Цель работы – исследование спектрально-угловых распределений TW-фотонов, испускаемых аксиально каналированными релятивистскими электронами.

TW-фотоны – это суперпозиция плоских волн с определенной проекцией орбитального углового момента на направление его распространения [2]. TW-фотоны характеризуются продольным импульсом, модулем поперечного импульса и проекцией полного углового момента на продольный импульс.

Теория TW-фотонов в рамках квантовой электродинамики была разработана Сербо и др. На основе этой теории были предложены методы получения пучков TW-фотонов и изучены возможные эксперименты с ними [3–5]. Генерация TW-фотонов открывает новые возможности для изучения фотоядерных реакций и предлагает новые инструменты в ядерной физике. TW-излучение нашло многочисленные применения как в классической, так и в квантовой оптике конденсированных сред, физике высоких энергий, оптике и т.д. (см., например, [2, 6–10] и ссылки там).

В работах Богданова и др. ([11–15] разработана теория излучения TW-фотонов релятивистскими заряженными частицами в различных условиях. Эти работы основаны на полуклассическом подходе, разработанном Байером и др. [16].

Главным недостатком этих работ является то, что они рассматривают излучение фотонов строго вперед. Однако фотоны могут испускаться под любым углом относительно скорости частицы [1].

Известно, что излучение при каналированвании (ИК) существенно интенсивнее обычного тормозного излучения. В настоящее время этот эффект позволяет создавать интенсивные источники излучения [18–24].

Мы надеемся, что каналирование электронов в кристаллах также увеличит интенсивность излучения TW-фотонов по сравнению с излучением в аморфной мишени.

Аксиально каналированные электроны обладают орбитальным моментом согласно как классической, так и квантовой модели. В процессе излучения электрон может передать часть своего углового момента фотону и, следовательно, испустить TW-фотон.

2. Вероятность излучения TW-фотонов. Волновая функция TW-фотона была подробно изучена Сербо и соавторами [2, 3, 7]. В [1] мы ввели аббревиатуру для TW-фотонов, излученых при каналировании – TWcr-фотоны.

1)korotchenko@tpu.ru

На рисунке 1 приведен фрагмент (с небольшими дополнениями) из нашей статьи [1] для пояснения основных параметров TW-фотона. На этом рисунке ось z системы координат, связанной с TW-фотоном, направлена вдоль волнового вектора TW-фотона κ_z. Соответственно, полярный угол θ_κ и азимутальный угол φ_κ – "внутренние" углы TW-фотона. При этом полярные углы Θ и азимутальные углы Φ определяют направления продольного импульса κ_z TW-фотона относительно системы отсчета, связанной с кристаллом. Ось Z системы координат, связанной с кристаллом, направлена вдоль оси кристалла.

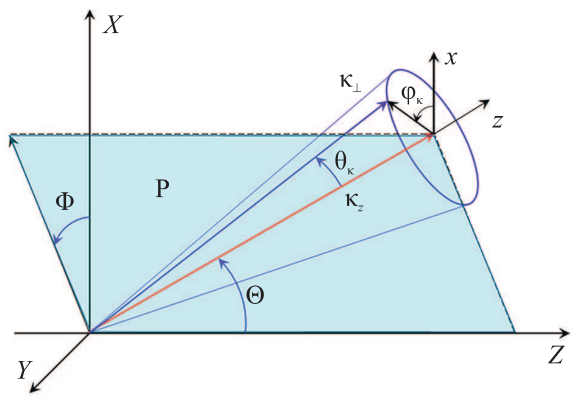

Рис. 1. (Цветной онлайн) Модель геометрии излучения TW-фотона при каналировании. Здесь Z – ось каналирования, z – ось TWcr-фотона (направленная вдоль проекции импульса фотона на z)

Согласно [1], вероятность излучения TWcr-фотонов имеет вид

$$dW_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}|M_{fi}|^2\delta(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f - \hbar\omega)\frac{\omega}{c^2}\frac{d\omega d\theta_\kappa}{2\pi^2}\frac{Ldp_z}{2\pi\hbar}. \quad (1)$$

Здесь L – нормированная длина, ω – частота TWcr-фотона, c – скорость света.

Матричный элемент излучения TWcr-фотона M_{fi} равен

$$M^{cr}_{fi} = \boldsymbol{i}^{-m}\frac{c\hbar}{2}m^{cr}_{fi}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi LR}}\sin\theta_\kappa\,, \quad (2)$$

$$m^{cr}_{fi} = \sum_{m_s=-1}^{1}\int \boldsymbol{\alpha}_{fi} d^1_{m_s\Lambda}(\theta_\kappa)\boldsymbol{\varepsilon}^{m_s}_{CR} e^{\boldsymbol{i}(m-m_s)\varphi_\kappa} e^{\boldsymbol{i}\kappa_Z(\varphi_\kappa)Z} d\varphi_k$$
$$\frac{1}{L}\int e^{-\boldsymbol{i}\frac{\Delta p_{fi,Z}}{\hbar}Z} dZ\,.$$

Здесь α- - постоянная тонкой структуры, $d^1_{m_s\Lambda}(\theta_\kappa)$ – матрица Вигнера (малая), m – проекция полного углового момента (*total angular momentum* – TAM) и $m_s = \pm 1$ – проекция спина TW-фотона на ось z, Λ – его спиральность, $\boldsymbol{\varepsilon}^{m_s}_{CR}$ – вектор поляризации TW-фотона в системе координат, связанной с фотоном [1] и πLR – нормировочный "объем" TW-фотона (детали см. в [2]), $\Delta p_{fi} = p_{z_i} - p_{z_f}$, где p_{z_i} и p_{z_f} – продольный (вдоль оси Z) импульс каналированного электрона до и после излучения.

Вектор $\boldsymbol{\alpha}_{fi}$ имеет вид [25]

$$\boldsymbol{\alpha}_{fi} = \left(\frac{\Omega_{fi}}{c}\kappa_Y,\ \frac{\Omega_{fi}}{c}\kappa_X,\ \beta\kappa_X\kappa_Y\right)\langle XY\rangle_{fi}\,, \quad (3)$$

где

$$\kappa_X = \kappa_z\sin\Theta\cos\Phi + \varkappa(\cos\Theta - 1)\cos\Phi\sin\varphi_\kappa\sin\Phi + \varkappa\cos\varphi_\kappa(\cos\Theta\cos^2\Phi + \sin^2\Phi)\,,$$
$$\kappa_Y = \kappa_z\sin\Theta\sin\Phi + \varkappa(\cos\Theta - 1)\cos\Phi\cos\varphi_\kappa\sin\Phi + \varkappa\sin\varphi_\kappa(\cos\Theta\sin^2\Phi + \cos^2\Phi)\,,$$
$$\kappa_Z = \kappa_z\cos\Theta - \varkappa\cos(\varphi_\kappa - \Phi)\sin\Theta\,. \quad (4)$$

Здесь мы использовали соотношения для TW-фотона из [1, 2]

$$\hbar\omega = c\hbar\sqrt{\varkappa^2 + \kappa_z^2},\quad \tan\theta_\kappa = \frac{\varkappa}{\kappa_z}\,. \quad (5)$$

где $\hbar\varkappa = |\kappa_\perp|$ – модуль поперечного импульса TW-фотона. Другие обозначения в (3): $\beta = v_\parallel/c$ ($v_\parallel$ – продольная скорость каналированного электрона), $\hbar\Omega_{fi} = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f$ и $\mathcal{E}_{i(f)}$ – энергии $i(f)$-го поперечного квантового состояния, а $\langle XY\rangle_{fi}$ равно [25]

$$\langle XY\rangle_{fi} = C^{m_i,n_i}_{i,i_n} C^{m_f,n_f}_{f,f_n}\frac{(-1)^{m_f+m_i+n_f+n_i}a_p^2}{16\pi^2(m_f - m_i)(n_f - n_i)}\,. \quad (6)$$

где C^{m_i,n_i}_{i,i_n} – компоненты Фурье поперечной волновой функции каналированного электрона, m_i и n_i – номера Фурье компонент для i-й энергетической зоны поперечного движения каналированного электрона, a_p – постоянная решетки [1]. При этом в качестве волновых функций релятивистского электрона использованы функции (см. формулу (17) в [1]), полученные в [19, 23] из уравнения Дирака для электрона в условиях каналирования – так называемое уравнение Шредингера с релятивистской массой (аналогичные результаты можно найти в [22]).

3. Спектрально-угловые распределения TW-фотонов. Как и в [1, 25], мы просуммировали вероятности испускания TWcr-фотонов по спиральности фотонов.

Аналогично [19–23], в [1] было показано, что закон сохранения энергии для TWcr-фотонов имеет вид $\hbar\omega \approx \hbar(\beta c\Delta + \Omega_{fi})$ где $\Delta = \Delta p_{fi}/\hbar$ (см. (2)).

Интегрирование вероятности (1) по продольному импульсу электрона dp_z (т.е. Δ), с учетом δ-функции сводится к замене Δ на $\omega/(c\beta)$).

$$\frac{dW_{fi}}{d\theta_\kappa d\omega} = \frac{\alpha}{16\hbar\pi^3 c\beta}\sin\theta_\kappa \langle XY\rangle_{fi}^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |m_{fi}^{cr}(\Theta,\Phi,\theta_\kappa,\omega)|^2. \tag{7}$$

По сравнению с [11–15] эта вероятность дополнительно зависит от углов Θ и Φ, описывающих направление вектора TWcr-фотона относительно кристаллической системы отсчета.

Учитывая, что для полного углового момента (TAM) $m \geq 3$ TWcr-фотона вероятность его излучения симметрична относительно угла Φ (см. [1]), мы можем усреднить вероятность (7) по этому углу. Тогда для "интенсивности" $dI_{fi} = \hbar\omega dW_{fi}$ получим

$$\frac{dI_{fi}}{d\theta_\kappa d\omega} = \frac{\alpha}{16\pi^3\beta}\sin\theta_\kappa \langle XY\rangle_{fi}^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^5 |\langle m_{fi}^{cr}(\Theta,\theta_\kappa,\omega)\rangle_\Phi|^2. \tag{8}$$

Полученное уравнение (8) по-прежнему параметрически зависит от угла Θ излучения TWcr-фотона, поэтому мы называем его спектрально-угловым распределением. Как и в [1], мы проводим расчет для $\omega \gg \Omega_{fi}$ (т. е. для рентгеновских TWcr-фотонов).

На рисунке 2 показаны рассчитанные спектрально-угловые распределения "интенсивности"

$$I = \sum_{fi} \frac{dI_{fi}}{d\theta_\kappa d\omega} P_i(\theta_0) \tag{9}$$

TWcr-фотонов с z-проекцией полного углового момента (TAM) $m = 6$ и "внутренним" углом $\theta_\kappa = 30°$. Здесь и далее расчеты проводились для электронов с энергией 10 МэВ, направленных вдоль осей $\langle 100\rangle$ кристалла Si (как в [1, 25]).

Мы просуммировали интенсивность dI_{fi} по всем возможным переходам каналированного электрона между поперечными энергетическими зонами и учли их начальную заселенность $P_i(\theta_0)$. Начальная заселенность энергетических уровней каналированных электронов – это вероятность захвата электрона в каналированные состояния [20, 21], хорошо известная характеристика (см., например, [25] и ссылки там). При этом θ_0 – угол продольного импульса электрона относительно кристаллической оси (более подробную информацию см. в [1, 25]). В режиме каналирования происходит эволюция заселенностей уровней поперечного движения и электроны переходят в наиболее вероятные состояния, соответствующие некоторому углу, заселенность которого максимальна. В наших расчетах мы приняли этот угол равным $\theta_0 = 2\theta_C/15$, где θ_C – критический угол каналирования.

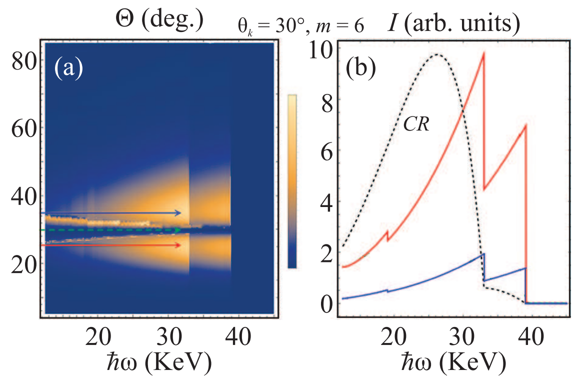

Рис. 2. (Цветной онлайн) Спектрально-угловое распределение рентгеновских TWcr-фотонов с TAM z-проекцией $m = 6$ и "внутренним" углом $\theta_\kappa = 30°$. Черная пунктирная линия показывает спектральное распределение ИК от аксиально каналированных электронов (см. [25])

На рисунке 2 (а также на рис. 3a и рис. 4a) показана зависимость "интенсивности" I от энергии TWcr-фотона $\hbar\omega$ и угла излучения Θ (рассчитан с помощью функции DensityPlot системы Wolfram). На всех этих рисунках зеленая пунктирная стрелка указывает угол $\Theta = \theta_\kappa$. На рисунках 2a-4a отчетливо видно, что спектрально-угловое распределение TWcr-фотонов имеет два максимума. На этих рисунках показаны положения спектрально-углового распределения TWcr-фотонов в плоскости "угол–энергия". К сожалению, эти рисунки не позволяют проводить количественное сравнение "интенсивностей" для разных углов и энергий. Поэтому на рис. 2b–4b показана зависимость "интенсивности" (используются относительные единицы) от энергии TWcr-фотонов $\hbar\omega$ для двух углов излучения, синяя линия - $\Theta \simeq 35.7°$, красная линия $\Theta \simeq 25.4°$. На рис. 2a–4a этим углам соответствуют стрелки такого же цвета.

Как известно, интенсивность ИК от релятивистских электронов имеет максимумы при определенных частотах фотонов (см., например, [20–25]). Видно, что "интенсивность" I на рис. 2b (и далее) также имеет максимумы при определенных частотах фотонов. Это подчеркивает, что мы имеем дело с ИК TW-фотонов, каналированным электроном.

На рисунках 2a и рис. 3a, 4a "яркие" области имеют треугольную форму. Чем выше энергия фотона, тем ярче треугольник (тем выше "интенсивность"). При определенной энергии ширина треугольника уменьшается, и он темнеет. Эта энергия совпадает с энергией, при которой наблюдается падение "интенсивности" (рис. 2b–4b).

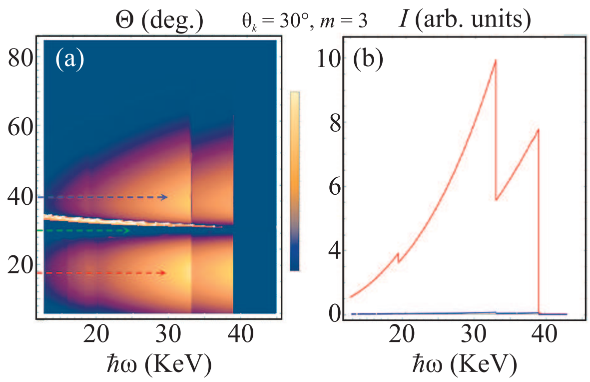

Рис. 3. (Цветной онлайн) То же, что и на Рис.1, но для $m = 3$ и $\theta_\kappa = 30°$; $\Theta \simeq 35.5°$ (синяя линия) и $\Theta \simeq 24.9°$ (красная линия). Зеленая пунктирная стрелка указывает угол $\Theta = \theta_\kappa$

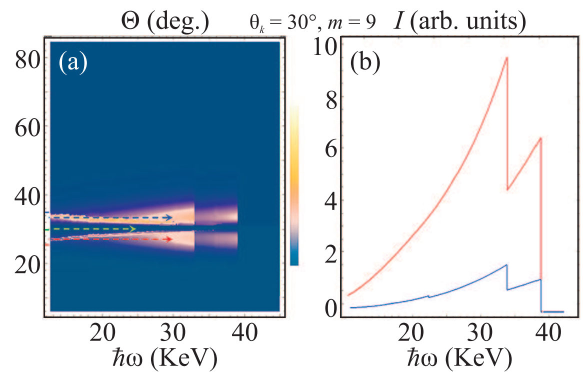

Рис. 4. (Цветной онлайн) То же, что и на рис. 1, но для $m = 9$, $\theta_\kappa = 30°$; $\Theta \simeq 33.4°$ (синяя линия) и $\Theta \simeq 26.4°$ (красная линия). Зеленая пунктирная стрелка указывает угол $\Theta = \theta_\kappa$

На рисунках 3 и 4 показаны рассчитанные спектрально-угловые распределения "интенсивности" I рентгеновских TWcr-фотонов с z-проекцией TAM $m = 3$ и $m = 9$ для одного и того же "внутреннего" угла $\theta_\kappa = 30°$.

На рисунке 5 показан "спектр" TAM m в диапазонах $m = 5...15$ и $m = -5... - 15$.

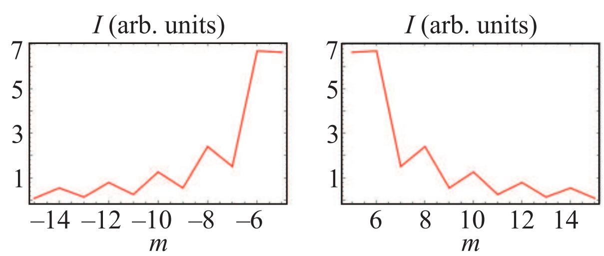

Рис. 5. (Цветной онлайн) Спектральное распределение z проекции TAM $m = 5...15$ и $m = -5... - 15$ для рентгеновских TWcr-фотонов с энергией $\hbar\omega = 30$ КэВ

Наиболее удивительный результат, представленный на рис. 2–4, заключается в том, что значение "внутреннего" угла θ_κ определяет азимутальный угол $\Theta = \theta_\kappa$, вблизи которого испускаются рентгеновские TWcr-фотоны.

Интенсивность имеет два максимума: один – при углах немного меньших $\Theta = \theta_\kappa$, и второй – при углах, немного больших $\Theta = \theta_\kappa$.

Для проверки этого были выполнены расчеты спектрально-угловых распределений рентгеновских TWcr-фотонов с "внутренним" углом $\theta_\kappa = 60°$. Результаты показаны на рис. 6.

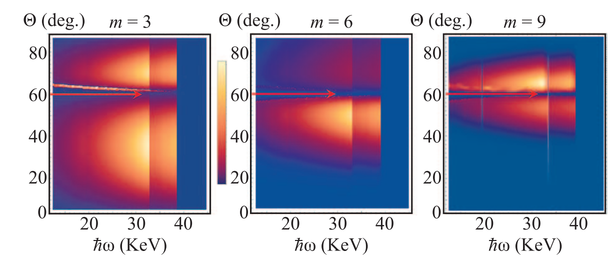

Рис. 6. (Цветной онлайн) Сравнение спектрально-угловых распределений рентгеновских TWcr-фотонов с "внутренним" углом $\theta_\kappa = 60°$ и z-проекциями TAM $m = 3, 6, 9$

Интенсивность I TWcr-фотонов, испускаемых под углами $\Theta < \theta_\kappa$, больше, чем интенсивность I TWcr-фотонов, испускаемых под углами $\Theta > \theta_\kappa$.

Эти результаты можно визуализировать с помощью графика интенсивности $I = I(\Theta, \theta_\kappa)$ TWcr-фотонов (см. рис. 7).

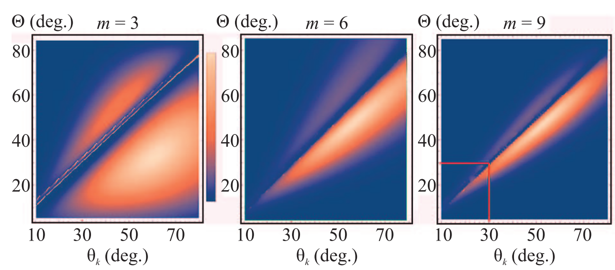

Рис. 7. (Цветной онлайн) Графики зависимости интенсивноси I TWcr-фотонов с z-проекцией TAM $m = 3, 6, 9$ от углов излучения Θ и "внутреннего" угла θ_κ

4. Заключение. В рамках квантовой электродинамики были исследованы спектрально-угловые распределения TW-фотонов, испускаемых аксиального каналированными релятивистскими электронами.

В заключение отметим:

- Вероятность испускания TWcr-фотонов имеет резкие пики при определенных энергиях. Положения этих пиков совпадают с положениями пиков для обычного ИК (см. рис. 2–4).

- Распределение TWcr-фотонов имеет два максимума вблизи $\Theta = \theta_\kappa$. "Интенсивность" I (9) TWcr-фотонов, испускаемых под углами $\Theta \le \theta_\kappa$, больше, чем под углами $\Theta \ge \theta_\kappa$.

В данной работе мы исследовали излучение TWcr-фотонов при аксиальном каналировании электронов только под большими углами к кристаллической оси, так как, по нашему мнению, излучение под малыми углами будет сложно отличить от ИК. Тем не менее, в дальнейшем мы планируем более подробно изучить этот вопрос.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Национального исследовательского Томского политехнического университета и Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. K. B. Korotchenko and Yu. P. Kunashenko, "Twisted-photons distribution emitted by relativistic electrons at axial channeling", Radiation Physics and Chemistry **223**, 111940 (2024); https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2024.111940.
2. Б. А. Князев, В. Г. Сербо, "Пучки фотонов с ненулевой проекцией орбитального момента импульса: новые результаты" УФН, **188**, 508 (2018) [B. A. Knyazev and V. G. Serbo, "Beams of photons with nonzero orbital angular momentum projection: new results", Phys.-Uspekhi **61**, 449 (2018)]; http://dx.doi.org/10.3367/UFNr.2018.02.038306
3. U. D. Jentschura and V. G. Serbo, "Compton upconversion of twisted photons: backscattering of particles with non-planar wave functions", Eur. Phys. J. C **71**, 1571 (2011); http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-011-1571-z.
4. U. D. Jentschura and V. G. Serbo, "Generation of High-Energy Photons with Large Orbital Angular Momentum by Compton Backscattering", Phys. Rev. Lett. **106**, 013001 (2011); http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.013001.
5. H. M. Scholz-Marggraf, S. Fritzsche, V. G. Serbo, A. Afanasev, and A. Surzhykov, "Absorption of twisted light by hydrogenlike atoms", Phys. Rev. A **90**, 013425 (2014); http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.90.013425.
6. C. Hernandez-Garcia, J. Vieira, J. T. Mendonca, L. Rego, J. San Roman, L. Plaja, P. R. Ribic, D. Gauthier, and A. Picon, "Generation and Applications of Extreme-Ultraviolet Vortices", Photonics **4**, 28 (2017); https://doi.org/10.3390/photonics4020028.
7. A. Afanasev, V. G. Serbo, and M. Solyanik, "Radiative Capture of Cold Neutrons by Protons and Deuteron Photodisintegration with Twisted Beams", https://arxiv.org/abs/1709.05625 (2017).
8. Е. Г. Абрамочкин, В. Г. Волостников, "Спиральные пучки света", УФН **174**, 1273 (2004) [E. G. Abramochkin and V. G. Volostnikov, "Spiral light beams" Phys.-Uspekhi **47**, 1177 (2004)]; https://doi.org/10.1070/PU2004v047n12ABEH001802.
9. J. P. Torres and L. Torner, *Twisted Photons: Applications of Light with Orbital Angular Momentum* (Wiley-VCH, N.Y., 2011); SBN: 978-3-527-40907-5.
10. D. L. Andrews and M. Babiker, *The Angular Momentum of Light* (Cambridge University Press, 2012); https://doi.org/10.1017/CBO9780511795213.
11. O. V. Bogdanov, P. O. Kazinsky, and G. Yu. Lazarenko, "Probability of radiation of twisted photons in the infrared domain", (2018); https://arxiv.org/abs/1803.03447.
12. O. V. Bogdanov, P. O. Kazinsky, and G. Yu. Lazarenko, "Probability of radiation of twisted photons by classical currents", Phys. Rev. A **97**, 033837 (2018); http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.97.033837.
13. O. V. Bogdanov, P. O. Kazinsky, and G. Yu. Lazarenko, "Semiclassical probability of radiation of twisted photons in the ultrarelativistic limit", Phys. Rev. D **99**, 116016 (2019); http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.99.116016.
14. O. V. Bogdanov, P. O. Kazinsky, and G. Yu. Lazarenko, "Generation of hard twisted photons by charged particles in cholesteric liquid crystals", Eur. Phys. J. Plus **135**, 901 (2020); http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.104.024701.
15. O. V. Bogdanov, P. O. Kazinsky, and G. Yu. Lazarenko, "Planar wiggler as a tool for generating hard twisted photons", J. Instrum. **15**, C04008 (2020); http://dx.doi.org/10.1088/1748-0221/15/04/C04008.
16. V. N. Baier, V. M. Katkov, and V. M. Strakhovenko, *Electromagnetic Processes at High Energy in Oriented Single Crystals* (Singapore World Scientific Publishing Co. 1998); https://doi.org/10.1142/2216.
17. А. И. Ахиезер, Н. Ф. Шульга, *Электродинамика высоких энергий в веществе* (Наука, М. 1993) [A. I. Akhiezer and N. F. Shul'Ga, *High Energy Electrodynamics in Matter* (CRC Press 1996)]; https://books.google.ru/books?id=TEe_4YwntGQC].
18. H. Überall, "High-Energy Interference Effect of Bremsstrahlung and Pair Production in Crystals", Phys. Rev. **103**, 1055 (1956); https://www.amazon.com/-/es/I-Akhiezer/dp/2884490140?language=en_US.

19. M. A. Kumakhov, "On the theory of electromagnetic radiation of charged particles in a crystal", Phys. Lett. A **57**, 17 (1976), https://doi.org/10.1016/0375-9601(76)90438-2

20. В. Г. Барышевский, *Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях* (Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1982) [V. Baryshevsky, *Channeling, Radiation and Reactions in Crystals at High Energy*, arXiv:2411.01699 [hep-ph]]; https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.01699.

21. В. А. Базылев, Н. К. Жеваго, *Излучение быстрых частиц в веществе и внешних полях* (Наука, М.1987) [V. A. Bazylev and N. K. Zhevago, *Radiation of Fast Particles in Matter and External Fields* (Nauka, Moscow, 1987)].

22. J. C. Kimball and N. Cue, *Quantum electrodynamics and channeling in crystals*, Phys. Rep. **125**, 69 (1985); https://doi.org/10.1016/0370-1573(85)90021-3.

23. М. А. Кумахов, Ф. Ф. Комаров, *Излучение заряженных частиц в твердых телах* (Издательство "Университетское", Минск 1985) [M. A. Kumakhov and F. F. Komarov, *Radiation from Charged Particles in Solids* (AIP, N.Y., 1989)]; ISBN: 0883186004.

24. P. Rullhusen, X. Artru, and P. Dhez, *Novel Radiation Sources Using Relativistic Electrons: From Infrared to X-rays* (Published by Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998); https://doi.org/10.1142/3398.

25. K. B. Korotchenko, Yu. P. Kunashenko, and S. B. Dabagov, "On angular features of axial channeling radiation in crystals", Eur. Phys. J. C **82**, 196 (2022); https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10147-w.