Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 1, с. 18 – 26

Ярко-темные световые пули в условиях генерации третьей гармоники

С. В. Сазонов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 мая 2026 г.
После переработки 22 мая 2026 г.
Принята к публикации 25 мая 2026 г.

Исследована возможность формирования ярко-темной световой пули при генерации третьей гармоники с учетом рассогласования фазовых и групповых скоростей в градиентном световоде, обладающем керровской нелинейностью. Рассматриваемая световая пуля представляет собой узкий двухчастотный лазерный пучок, вдоль которого с групповой скоростью на частоте третьей гармоники распространяется темное пятно провала интенсивности. Показано, что формирование возможно при нормальной дисперсии групповой скорости на основной частоте. При этом показатель преломления световода на основной частоте должен превышать соответствующий показатель на частоте третьей гармоники, а знак отстройки групповых скоростей не имеет принципиально значения. Установлено, что временная длительность темного пятна превышает определенный нижний порог, а интервал возможных значений поперечного радиуса пучка имеет нижнюю и верхнюю границы. Увеличение отстройки от фазово-группового синхронизма сопровождается понижением степени поперечной локализации лазерного пучка.

DOI: 10.7868/S3034576626070034

1. Введение. Пространственно-временные оптические солитоны или, другими словами, свето- вые пули представляют собой локализованные во всех направлениях устойчивые сгустки энергии электромагнитного поля, способные распространяться на достаточно большие расстояния, практически не изменяя своей формы [1]. Под большими расстояниями здесь подразумеваются дистанции, значительно превышающие характерные длины дисперсионного расплывания и дифракционного уширения трехмерного волнового пакета. Эти два процесса при определенных условиях могут компенсироваться нелинейным эффектом самофокусировки, что и способствует формированию световой пули.

К настоящему времени световые пули достаточно детально исследованы как в изотропных, так и в анизотропных средах [2–7]. Особое внимание здесь привлекает изучение многочастотных световых пуль, формирующихся при генерации оптических гармоник [8, 9]. При этом в анизотропных кристаллах проявляет себя формирование световых пуль в режиме генерации второй гармоники [10–19]. В изотропных средах способны формироваться двухчастотные световые пули при генерации третьей гармоники [20, 21]. Хорошо известно, что в изотропной однородной среде для формирования световой пули недостаточно одной только керровской нелинейности [1, 22]. Однако в неоднородной среде типа фокусирующего градиентного световода при определенных условиях такое формирование возможно [23, 24]. Здесь к упомянутым выше эффектам дисперсии, дифракции и фокусирующей керровской нелинейности добавляется явление линейной рефракции из-за поперечной неоднородности показателя преломления световода.

В работе [25] предсказаны ярко-темные двухчастотные световые пули в режиме генерации второй гармоники. Такие пули представляют собой темные солитоны в направлении распространения. В поперечных же направлениях данные формирования являются яркими пространственными солитонами. Можно сказать и так, что ярко-темная световая пуля представляет собой непрерывный узкий лазерный пучок, вдоль которого распространяется темное пятно провала интенсивности.

После изложенного выше возникает естественный вопрос о возможности формирования в градиентном световоде двухчастотной ярко-темной световой пули при генерации третьей гармоники. Теоретическому исследованию данного вопроса и посвящена настоящая работа.

2. Темные временные солитоны. Пусть линейно поляризованный лазерный пучок распро-

1)e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

страняется вдоль центральной оси z градиентного аксиально-симметричного световода. В этом случае режим гене- рации третьей гармоники в параксиальном приближении описывается системой уравнений вида [21, 26]

$$i\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+\frac{1}{v_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)=-\frac{\beta_1}{2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}+$$
$$+\alpha_1\psi_1^{*2}\psi_3-\omega q_1\psi_1+\frac{c}{2n_1\omega}\Delta_\perp\psi_1, \quad (1)$$

$$i\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial z}+\frac{1}{v_3}\frac{\partial\psi_3}{\partial t}\right)=-\frac{\beta_3}{2}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2}-$$
$$-\delta\psi_3+\alpha\psi_1^3-3\omega q_3\psi_3+\frac{c}{6n_3\omega}\Delta_\perp\psi_3. \quad (2)$$

Здесь и везде далее нижние индексы “1” и “3” относятся к параметрам на основной частоте ω и на частоте 3ω третьей гармоники соответственно, t – время, $\Delta_\perp$ – поперечный лапласиан, $\psi_{1,3}$ – медленно меняющиеся амплитуды электрического поля импульса, $v_{1,3}$ – групповые скорости, $\beta_{1,3}$ – параметры дисперсии групповой скорости (ДГС) второго порядка, $n_{1,3}$ – показатели преломления на центральной оси световода, коэффициенты при нелинейных слагаемых выражаются через компоненты нелинейной восприимчивости $\chi^{(3)}$ третьего порядка: $\alpha_1=6\pi\omega\chi^{(3)}(-\omega,-\omega,3\omega)/cn_1$, $\alpha_3=6\pi\omega\chi^{(3)}(\omega,\omega,\omega)/cn_3$, параметрами $q_{1,3}$ учитывается зависимость показателей преломления от поперечной координаты , отсчитываемой от центральной оси световода:

$$q_{1,3}=\frac{n_{1,3}^2-n_{1,3}^2(r)}{2cn_{1,3}}, \quad (3)$$

$n_{1,3}(r)$ – показатели преломления на расстоянии r от центральной оси (при этом $n_{1,3}(0)=n_{1,3}$), c – скорость света в вакууме, параметром δ учитывается отстройка от фазового синхронизма:

$$\delta=\frac{3\omega}{c}(n_1-n_3). \quad (4)$$

В правых частях уравнений (1) и (2) отброшены нелинейные слагаемые $\sim|\psi_{1,3}|^2\psi_{1,3}$ и $\sim|\psi_{1,3}|^2\psi_{3,1}$, учитывающие самовоздействие обеих частотных компонент. Данное приближение достаточно хорошо оправдывает себя при решении задач, связанных с генера цией гармоник [26]. При этом учет эффектов самовоздействия может быть проведен отдельно и выявлены случаи, когда данный учет необходим [27].

Ниже будем считать, что $\beta_1\gg\beta_3$. Это позволит далее полагать $\beta_3=0$ и $\beta_1\equiv\beta$. При аномальной ДГС на основной частоте это предположение может быть вполне реализовано в ближнем инфракрасном диапазоне для широкого класса сред, так как в областях прозрачности параметр ДГС обычно возрастает с увеличением частоты [28]. В рассматриваемом нами ниже случае нормальной ДГС неравенству $\beta_1\gg\beta_3$ можно удовлетворить, внедрив в кристалл определенную концентрацию квазирезонансных примесей с частотой ω_0 квантового перехода, близкой к основной частоте ω [29].

В целях простоты пренебрежем ниже частотной зависимостью нелинейной восприимчивости $\chi^{(3)}$. Считая также, что значения показателей преломления n_1 и n_3 достаточно близки друг к другу, можно с хорошей точностью положить $\alpha_1=\alpha_3\equiv\alpha=6\pi\omega\chi^{(3)}/cn_1$.

Получим сначала одномерные решения системы (1), (2) в виде темных временных солитонов. Полагая в этом случае $q_{1,3}=\Delta_\perp\psi_{1,3}=0$, будем иметь искомое решение:

$$\psi_1=\frac{1}{\tau_p}\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}[3(1+\mu\tau_p^2)]^{1/4}\times$$
$$\times e^{i(\Omega t+qz)}\frac{\tanh(\tau/\tau_p)}{\sqrt{1+0.5\mathrm{sech}^2(\tau/\tau_p)}}, \quad (5)$$

$$\psi_3=\frac{1}{\tau_p}\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}[3(1+\mu\tau_p^2)]^{-1/4}\times$$
$$\times e^{3i(\Omega t+qz)}\frac{\tanh^3(\tau/\tau_p)}{(1+0.5\mathrm{sech}^2(\tau/\tau_p))^{3/2}}, \quad (6)$$

где $\tau=t-z/v_3$, параметры группового Ω и фазово-группового μ рассогласований определяются выражениями

$$\Omega=\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{v_3}-\frac{1}{v_1}\right),\quad \mu=\frac{2\delta}{3\beta}-\Omega^2. \quad (7)$$

При этом добавка q к волновому числу имеет вид

$$q=\frac{\beta}{2}\left(\Omega^2-\frac{1}{\tau_p^2}\right)-\frac{\Omega}{v_3}. \quad (8)$$

В полученном решении временная длительность τ_p темного солитона выступает в качестве свободного параметра.

Из (5) и (6) следует, что интенсивности $I_{1,3}=c|\psi_{1,3}|^2/(2\pi n_{1,3}$ обеих компонент темного временного солитона зависят от параметра μ фазово-групповой отстройки. Как видно из (4) и (7), данный параметр нечувствителен к знаку отстройки групповых скоростей, но весьма чувствителен к знаку отстройки показателей преломления на оси световода. Более детальное обсуждение после учета поперечных пространственных измерений проводится ниже, в последнем разделе.

3. Ярко-темные световые пули. Для нахождения приближенных решений уравнений (1) и (2) в виде трехмерных пространственно-временных солитонов применим метод усредненного лагранжиана (УЛ) [30, 31]. Сначала, совершая в (5) и (6) замены $1/\tau_p \to Q$, $qz \to -n_1\omega\varphi/c$, где Q и φ – соответственно "медленная" и "быстрая" функции координат, запишем пробное решение в виде

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}[3(Q^4+\mu Q^2)]^{1/4} \times$$

$$\times\, e^{i(\Omega t - n_1\omega\varphi/c)}\frac{\tanh Q\tau}{\sqrt{1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau}}, \qquad (9)$$

$$\psi_3 = \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}Q^2[3(Q^4+\mu Q^2)]^{-1/4} \times$$

$$\times\, e^{3i(\Omega t - n_1\omega\varphi/c)}\frac{\tanh^3 Q\tau}{(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau)^{3/2}}, \qquad (10)$$

При поперечном удалении от центра светового пучка амплитуды его обеих компо- нент уменьшаются, стремясь к нулевым значениям. Как следует из (9) и (10), при этом $Q \to 0$. Следовательно, пробное решение имеет смысл при $\mu \geq 0$. Из этих же решений следует, что $\beta/\alpha > 0$.

Системе (1), (2) при оговоренных в предыдущем разделе условиях соответствует плотность лагранжиана

$$L = L_1 + L_3 + L_{\mathrm{int}}, \qquad (11)$$

где

$$L_1 = \frac{i}{2}\left(\psi_1^*\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \psi_1\frac{\partial\psi_1^*}{\partial z}\right) +$$

$$+\,\frac{i}{2v_1}\left(\psi_1^*\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - \psi_1\frac{\partial\psi_1^*}{\partial t}\right) - \frac{\beta}{2}\left|\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right|^2 +$$

$$+\,\omega q_1|\psi_1|^2 + \frac{c}{2n_1\omega}|\nabla_\perp\psi_1|^2, \qquad (12)$$

$$L_3 = \frac{i}{6}\left(\psi_3^*\frac{\partial\psi_3}{\partial z} - \psi_3\frac{\partial\psi_3^*}{\partial z}\right) +$$

$$+\,\frac{i}{6v_1}\left(\psi_3^*\frac{\partial\psi_3}{\partial t} - \psi_3\frac{\partial\psi_3^*}{\partial t}\right) + \frac{\delta}{3}|\psi_3|^2 +$$

$$+\,\omega q_3|\psi_3|^2 + \frac{c}{18n_3\omega}|\nabla_\perp\psi_3|^2, \qquad (13)$$

$$L_{\mathrm{int}} = -\frac{\alpha}{3}(\psi_1^3\psi_3^* + \psi_1^{*3}\psi_3), \qquad (14)$$

$\nabla_\perp$ – оператор поперечного градиента.

Так как показатели преломления n_1 и n_2 отличаются друг от друга незначительно ($|n_3 - n_1| \ll n_{1,3}$), то в последнем слагаемом правой части выражения (13) положим приближенно $n_3 \approx n_1$. В силу этого же обстоятельства ниже будем считать, что $q_3 = q_1$ (см. (3)). При этом фазовое рассогласование учтено в правой части этого же выражения слагаемым $\delta|\psi_3|^2/3$. Если (9) и (10) подставить в (11)–(14) с учетом производных по координатам только от быстрой функции φ и в пренебрежении соответствующими производными от функции Q, будем иметь приближение геометрической оптики [30]. Соответствующую часть УЛ будем называть рефракционным лагранжианом и обозначать Λ_R. Однако для описания световой пули необходимо, как было сказано выше, принимать во внимание эффекты дифракции. Данным эффектам соответствует учет производных функции Q по поперечным координатам (см. последние слагаемые в правых частях (12) и (13)). Часть УЛ, содержащую поперечный градиент от Q, будем называть дифракционным лагранжианом и обозначать Λ.

В соответствии с методом УЛ выражения (9) и (10) следует подставить в (11)–(14) и проинтегрировать в неограниченных пределах по бегущему времени τ. При этом мы столкнемся с расходящимися интегралами при возведении в степени выражений $\tanh Q\tau/\sqrt{1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau}$, $\tanh^3 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau)^{3/2}$ и $\tanh^3 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau)^{5/2}$ (см. (9), (10) и (11)–(14)). В соответствующих подынтегральных выражениях лагранжиана проводится регуляризация, выражающаяся заменами

$$\tanh^2 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau) \to$$

$$\to \tanh^2 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau) - 1,$$

$$\tanh^6 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau)^3 \to$$

$$\to \tanh^6 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau)^3 - 1,$$

$$\tanh^6 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau)^5 \to$$

$$\to \tanh^6 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau)^5 - 1,$$

С помощью данных замен мы отбрасываем светлый фон и учитываем, таким обра- зом, динамику провала интенсивности. Очевидно, приведенные выше замены формально эквивалентны заменам вещественных выражений

$$\tanh Q\tau/\sqrt{1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau},$$

$$\tanh^3 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau)^{3/2}$$

и

$$\tanh^3 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau)^{5/2}$$

на соответствующие мнимые выражения $i\sqrt{1-\tanh^2 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau)}$, $i\sqrt{1-\tanh^6 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau)^3}$ и $i\sqrt{1-\tanh^6 Q\tau/(1+0.5\mathrm{sech}^2 Q\tau)^5}$. Здесь важно, что после такой регуляризации выписанные выше нечетные относительно τ квадратично неинтегрируемые функции становятся четными и квадратично интегрируемыми. В дифракционной части лагранжиана при возведении в квадрат скобок, умножаемых на $\nabla_\perp Q$, следует использовать эти замены. При выполнении данной операции появятся произведения нечетных относительно τ квадратично интегрируемых выражений на выписанные выше мнимые четные выражения. Поэтому перекрестные произведения являются нечетными функциями переменной τ. Как результат, интегралы от таких произведений обращаются в ноль. Таким образом, усредненный по регуляризованный лагранжиан Λ^{reg} содержит только вещественные слагаемые. Полагая, кроме того, в дифракционной части лагранжиана равным нулю параметр μ фазово-группового рассогласования [32] и использования в его рефракционной части соотношения (7) будем иметь

$$\Lambda^{\mathrm{reg}} \equiv -\frac{\alpha}{1.1405\sqrt{3\mu}\beta}\frac{c}{n_1\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} L^{\mathrm{reg}} d\tau = \Lambda_R + \Lambda_D, \quad (15)$$

где

$$\Lambda_R = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\nabla_\perp\varphi)^2}{2} + \frac{c}{n_1\omega}\left(\frac{\beta\Omega^2}{2} - \frac{\Omega}{v_3}\right) + \frac{c}{n_1}\right] \times$$
$$\times \frac{3u^2+2}{2\sqrt{u^2+1}} - \frac{c\beta\mu}{4n_1\omega}\frac{u^4}{\sqrt{u^2+1}}, \quad (16)$$

$$\Lambda_D = \frac{2}{5}\left(\frac{c}{n_1\omega}\right)^2 \frac{(\nabla_\perp u)^2}{u}, \quad (17)$$

$$u = \frac{Q}{\sqrt{\mu}}. \quad (18)$$

Записывая уравнения Эйлера–Лагранжа относительно переменных φ и u с использованием (15)–(17), придем к системе гидродинамического типа

$$\frac{\partial\rho}{\partial z} + \nabla_\perp\left[\left(\rho + \frac{2}{3}\right)\nabla_\perp\varphi\right] = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{(\nabla_\perp\varphi)^2}{2} + \frac{c}{n_1\omega}\left(\frac{\beta\Omega^2}{2} - \frac{\Omega}{v_3}\right) + \frac{c}{n_1}q_1 - \frac{c\beta\mu}{2n_1\omega}u^2 =$$
$$= \frac{16}{15}\left(\frac{c}{n_1\omega}\right)^2 \frac{\Delta_\perp\sqrt{u}}{\sqrt{u}}. \quad (20)$$

Здесь введена переменная ρ, определенная соотношением

$$\rho = \frac{u^2+2/3}{\sqrt{u^2+1}} - \frac{2}{3}. \quad (21)$$

Зависимость $\rho(u)$ представляет собой монотонно возрастающую функцию. При этом $\rho(0)=0$. В случае $u^2 \gg 1$ имеем $\rho \approx u$. Из (21) можно найти точную обратную зависимость $u(\rho)$, решив биквадратное уравнение. Однако удобнее использовать хорошую аппроксимацию

$$u^2 = \rho^2 + \sqrt{2}\rho, \quad (22)$$

с точностью до одного процента, совпадающую с выражением $u(\rho)$, вытекающим из (21) при всех возможных значениях $\rho > 0$.

Для решения системы (19), (20) вначале сепарируем уравнение (19) на два уравнения

$$\frac{\partial\rho}{\partial z} + \nabla_\perp(\rho\nabla_\perp\varphi) = 0, \quad \Delta_\perp\varphi = 0. \quad (23)$$

Первое уравнение (23) обладает известным аксиально-симметричным локализо- ванным в поперечных направлениях решением вида [33]

$$\rho = \rho_0\frac{R_0^2}{R^2}e^{-r^2/R^2}, \quad \varphi = f(z) + \frac{r^2}{2R}\frac{dR}{dz}, \quad (24)$$

где $R(z)$ и $f(z)$ – подлежащие определению функции координаты z, R_0 – некое равновесное значение поперечного радиуса лазерного импульса, соответствующее его устойчивому профилю, постоянная ρ_0, как следует из (22), связана с временной длительностью τ_p провала интенсивности на центральной оси световода соотношением

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{1}{\mu\tau_p^2} + \frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (25)$$

Здесь мы учли, что $u_0 = Q_0/\sqrt{\mu}$ и $Q_0 = 1/\tau_p$ (см. (13), (14) и (18)).

Ниже будем искать решение в виде устойчивой ярко-темной световой пули. В этом случае при $R = R_0$ имеем $dR/dz = 0$, $\varphi = \varphi(z)$, $\rho = \rho_0 e^{-r^2/R_0^2}$. Данные выражения автоматически удовлетворяют обеим уравнениям (23). При малом отклонении R от R_0 в устойчивом случае функция $R(z)$ будет совершать колебания относительно значения $R = R_0$. Тогда второе уравнение (23) удовлетворяется в среднем относительно координаты z. Более детальное обоснование см. ниже.

Пусть линейная восприимчивость $\chi_1(r)$ уменьшается от значения χ в центре световода к его периферии по параболическому закону $\chi_1(r) = \chi(1 - r^2/a^2)$, где a – радиус световода. Тогда $n_1^2(r) = n_1^2 - (n_1^2 - 1r^2/a^2$. Отсюда и из (3) следует

$$\frac{c}{n_1}q = \frac{n_1^2 - 1}{2n_1^2}\frac{r^2}{a^2}. \tag{26}$$

При подстановке (24)–(26) в (20) будем использовать в левой части уравнения приосевое приближение [34]: $e^{-r^2/R^2} \approx 1 - r^2/R^2$, а в правой части положим $u = \rho$. Тогда после приравнивания в левой и правой частях выражений при r^0 и r^2, с учетом (22) придем к уравнениям

$$\frac{df}{dz} = -\frac{c}{n_1\omega}\left(\frac{\beta\Omega^2}{2} - \frac{\Omega}{v_3}\right) +$$

$$+\frac{c\beta\mu}{2n_1\omega}\left(\frac{\rho_0^2R_0^4}{R^4} + \sqrt{2}\frac{\rho_0R_0^2}{R^2}\right) - \frac{32}{15}\left(\frac{c}{n_1\omega}\right)^2\frac{1}{R^2}, \tag{27}$$

$$\frac{d^2R}{dz^2} = -\frac{\partial U}{\partial R}, \tag{28}$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2a^2}R + \frac{c\beta\mu}{n_1\omega}\left(2\frac{\rho_0^2R_0^4}{R^5} + \sqrt{2}\frac{\rho_0R_0^2}{R^3}\right) -$$

$$-\frac{32}{15}\left(\frac{c}{n_1\omega}\right)^2\frac{1}{R^3}. \tag{29}$$

Уравнение (28) представляет собой уравнение движения ньютоновской частицы единичной массы во внешнем поле с “потенциальной энергией” $u(r)$, где r и z формально играют роли координаты частицы и времени соответственно.

Первое слагаемое в правой части (29) соответствует линейной рефракции, создаваемой градиентным световодом. Следующая сумма двух слагаемых в скобках описывает нелинейную рефракцию, возникающую из-за керровской нелинейности. Последнее слагаемое в правой части (29) описывает дифракцию лазерного пучка.

Условия устойчивости решения (24) при $R = R_0$ соответствуют минимуму функции $U(R)$ в данной точке:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{R=R_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)_{R=R_0} > 0. \tag{30}$$

Подставляя сюда (29), придем к условиям вида

$$\frac{2}{T^2} + M - \sqrt{\frac{2M}{T^2} + M^2} - \frac{1}{W^2} = 0, \tag{31}$$

$$-\frac{10}{T^2} - 7M + 7\sqrt{\frac{2M}{T^2} + M^2} + \frac{3}{W^2} + W^2 > 0. \tag{32}$$

Здесь введены безразмерные переменные

$$W = \frac{R_0}{R_{\max}}, \quad T = \frac{\tau_p}{\tau_0}, \quad M = \mu\tau_0^2, \tag{33}$$

где

$$R_{\max} = 0.48\frac{\sqrt{\lambda a}}{(n_1^2 - 1)^{1/4}}, \quad \tau_0 = 0.83\frac{\sqrt{n_1\beta a}}{(n_1^2 - 1)^{1/4}}, \tag{34}$$

$\lambda = 2\pi c/\omega$ – длина волны, соответствующая частоте ω.

Введем переменную $\tilde{T}$ согласно соотношению

$$\frac{1}{\tilde{T}^2} = \frac{1}{T^2} + \frac{1}{2}\left(M - \sqrt{\frac{2M}{T^2} + M^2}\right).$$

Простой анализ показывает, что отношение $\tilde{T}/T$ монотонно возрастает от 1 до $\sqrt{2}$ при непрерывном увеличении параметра M от нуля до бесконечности. Данная ситуация достаточно хорошо описывается приближенным факторизованным выражением $\tilde{T} = gT$ где

$$g = \sqrt{\frac{1 + 2M}{1 + M}}. \tag{35}$$

Тогда из (31) и (33) следует зависимость радиуса лазерного пучка от временной длитель- ности провала его интенсивности

$$R_0 = R_{\max} = \frac{gT}{(1 + \sqrt{1 + g^4T^4})^{1/2}}. \tag{36}$$

Используя (32), (33) и (36), придем к условиям вида

$$R_{\min} < R_0 < R_{\max}, \quad \tau_p > \tau_{\min}, \tag{37}$$

где

$$R_{\min} = R_{\max}\frac{(8 - 6g^2 + g^4)^{1/4}}{\sqrt{4 - g^2}},$$

$$\tau_{\min} = \tau_0\frac{(8 - 6g^2 + g^4)^{1/4}}{g}. \tag{38}$$

Из второго равенства (34) следует, что яркотемная световая пуля способна сфор- мироваться при положительной ДГС на основной частоте. Принимая также во внимание использованное выше неравенство $\mu \geq 0$ (см. комментарий после пробного решения (9), (10)), а также выражения (4) и (7), запишем

$$\beta > 0, \quad n_1 - n_3 \geq \frac{c}{2\beta\omega}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3}\right)^2. \qquad (39)$$

С другой стороны, из неравенства $\beta/\alpha > 0$ вытекает условие $\alpha > 0$. Таким образом, керровские нелинейные восприимчивости должны иметь фокусирующий характер

$$\chi^{(3)}(-\omega, -\omega, 3\omega), \quad \chi^{(3)}(\omega, \omega, \omega) > 0. \qquad (40)$$

Это необходимо для нелинейной локализации пучка в поперечных направлениях, которая компенсируется его дифракционным уширением.

Вернемся к обоснованию приближенной сепарации уравнения (19) на два уравнения (23). После подстановки второго выражения (24) во второе уравнение (23) получим $dR/dz = 0$. Данное равенство справедливо, если $R = R_0$, как и было принято выше. При малых отклонениях R от R_0 из (28)–(38) нетрудно получить уравнение

$$\frac{d^2R}{dz^2} = -8\frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 a^2}\left(\frac{R_{\max}^2}{R_0^2} - 1\right)\left(1 - \frac{R_{\min}^2}{R_0^2}\right)(R - R_0).$$

Как и следовало ожидать, по мере распространения ярко-темного солитона его поперечный радиус R совершает гармонические колебания относительно равновесного значения R_0. Принимая во внимание приведенные выше формулы (34) и (38), придем к выводу, что характерный пространственный период таких колебаний $\sim a$. Дистанции распространения исследуемой здесь световой пули значительно превышают поперечный радиус световода. Поэтому с хорошей точностью на таких дистанциях среднее значение $R - R_0$ по z равно нулю. Таким образом, второе уравнение (23) выполняется в среднем по дистанции распространения ярко-темной световой пули. Здесь же отметим, что при исследовании процессов типа самофокусировки сепарация уравнения (19) на два уравнения (23) неправомерна, так как в этих случаях R_0 уже не является равновесным значением поперечного радиуса. Однако данные исследования выходят за рамки настоящей работы.

Амплитуды обеих компонент световой пули при $R = R_0$ определяются выражениями (9) и (10). При этом

$$Q^2 = \frac{1}{\tau_p^2}e^{-2r^2/R_0^2} + \left(\sqrt{\frac{2\mu}{\tau_p^2} + \mu^2}\right)(e^{-r^2/R_0^2} - e^{-2r^2/R_0^2}). \qquad (41)$$

Как следует из (22) и (27), выражение для фазы имеет вид

$$-\frac{n_1\omega}{c}\varphi = \left(q + 0.34\frac{\lambda}{n_1 R_0^2}\right)z, \qquad (42)$$

где параметр q определяется выражением (8).

Полагая в (41) и (42) формально $R_0 \to \infty$, получим $Q^2 = 1/\tau_p^2$ и $-n_1\omega\varphi/c = qz$. Подставляя данные выражения в (9) и (10), придем к точному одномерному решению (5)–(8) в виде двухчастотного темного временного солитона. Таким образом, в одномерном случае имеем точное совпадение решения (9), (10), (41), (42) с решением в виде временного солитона. Данное обстоятельство является важным аргументом в пользу корректности процедуры, с помощью которой здесь найдено приближенное решение в виде ярко-темной световой пули.

4. Обсуждение результатов. Полученное в настоящей работе приближенное аналитическое решение (9), (10), (41), (42) системы уравнений (1), (2) в виде ярко-темной световой пули представляет собой узкий двухчастотный лазерный пучок, вдоль которого распространяется темное пятно провала интенсивности. Данное решение обладает одним свободным параметром, в качестве которого здесь выбрана центральная временная длительность τ_p провала интенсивности ярко-темной световой пули. Из (36) (см. также (33)) видно, что с увеличением данной временной длительности радиус лазерного пучка возрастает, достигая формально при $gT \to \infty$ своего максимального значения $R_{\max}$. Как видно из (37), значение τ_p обладает нижней границей $\tau_{\min}$, которой, в свою очередь, определяется нижняя граница радиуса $R_{\min}$ лазерного пучка. Обе эти нижние границы зависят от параметра фазово-группового рассогласования в соответствии с выражениями (35) и (38). При выполнении условий фазового и группового синхронизмов ($\mu, M = 0$) из (35) имеем $g = 1$. Тогда из (38) видно, что $R_{\min} = R_{\max}/3^{1/4}$, $\tau_{\min} = 3^{1/4}\tau_0 \approx 1.32\tau_0$. Здесь обращает на себя внимание то обстоятельство, что возможные значения R_0 лазерного пучка лежат в достаточно узком интервале $0.76R_{\max} < T_0 < R_{\max}$.

С увеличением безразмерного параметра M фазово-группового рассогласования, как было сказано выше и как видно из формулы (35), параметр g монотонно возрастает до предельного значения $\sqrt{2}$. Из (38) следует, что такое возрастание параметра g сопровождается понижением нижних порогов $R_{\min}$ и $\tau_{\min}$ в пределе до нулевых значений. Таким образом, с увеличением фазово-группового рассогласования расширяется интервал возможных значений поперечного радиуса R_0 ярко-темной световой пули. Поэтому становится проще удовлетворить условиям (37). С другой стороны, с увеличением фазово-группового рассогласования по понятным причинам уменьшается эффективность генерации третьей гармоники. Из (5) и (6) видно, что отношение интенсивности I_3 компоненты световой пули на частоте третьей гармоники к интенсивности I_1 компоненты на основной частоте вне темного пятна $I_3/I_1 \approx |\psi_3/\psi_1|^2 = [3(1+\mu\tau_p^2)]^{-1} < [3(1+\mu\tau_{\min}^2)]^{-1}$.

Как следует из (41), при точном выполнении условий фазового и группового синхронизмов имеем $Q^2 = \tau_p^{-2} e^{-2r^2/R_0^2}$. В этом случае (см. (9) и (10)) масштабы поперечной локализации интенсивностей обеих компонент совпадают между собой: $I_{1,3} \sim Q^2 \sim e^{-2r^2/R_0^2}$. В случае же сильного фазово-группового рассогласования ($\mu\tau_p^2 \gg 1$) из (41) находим $Q^2 \approx \tau_p^{-2} e^{-r^2/R_0^2}$. Используя, в свою очередь, (9) и (10), для интенсивностей компонент имеем $I_1 \sim Q \sim e^{-r^2/2R_0^2}$, $I_3 \sim Q^3 \sim e^{-3r^2/2R_0^2}$. Таким образом, генерируемая компонента на частоте третьей гармоники локализована значительно сильнее, чем компонента на основной частоте. При этом степени поперечной локализации обеих составляющих ярко-темной световой пули при значительном фазово-групповом рассогласовании ниже степени их локализации при условии фазово-группового синхронизма.

Очень важными представляются условия (39). В соответствии с первым условием основная несущая частота должна лежать в области нормальной ДГС. Такая ситуация реализуется, например, в плавленом кварце при частотах, принадлежащих ближнему инфра- красному и видимому диапазоном [28, 35]. Для выполнения второго условия (39) показа- тель преломления на основной частоте должен как минимум превышать соответствующий показатель на частоте третьей гармоники. При этом знак отстройки групповых скоростей здесь не имеет значения. Обоим условиям (39) можно удовлетворить, как было сказано во втором разделе настоящей работы, внедрив в световод примесные атомы, содержащие квантовые переходы, характерная частота ω_0 которых превышает основную частоту ω. При этом важно выполнение квазирезонансного условия $0 < \omega_0 - \omega \ll \omega, \omega_0$. Кроме того, несущая частота должна лежать вне линии поглощения, центрированной на частоте ω_0. Особо подчеркнем, что условия (39), полученные здесь для ярко-темных световых пуль, прямо противоположны соответствующим условиям, при которых в режиме генерации третьей гармоники способны формироваться яркие световые пули [32].

Условия (37) и (38), как видно из (34), не могут быть выполнены в однородной среде, для которой $\alpha = \infty$. Это согласуется с общеизвестным фактом о невозможности формирования световых пуль в однородной среде, обладающей только керровской нелинейностью [1, 22].

Приведем некоторые численные оценки. Использованное при выводе исходных уравнений (1) и (2) приближение медленно меняющихся амплитуд справедливо, если $\Omega \ll \omega$. Тогда, полагая $\omega \sim 10^{15}$ с$^{-1}$, $|v_1 - v_3| \sim 10^{-2}$ с, с учетом первого выражения (7) будем иметь $\beta \gg 10^{-2}/\omega c \sim 10^{-27}$ с^2/см. В присутствии упомянутых выше квазирезонансных примесей можно достичь значений ДГС $\beta \sim 10^{-25}$ с^2/см [29]. Тогда $\Omega \sim 10^{13}$ с$^{-1}$.

Полагая в (34) $\lambda \sim 10^{-4}$ см, $a \sim 1$ мм, будем иметь $R_{\max} \sim 10^{-3}$ см. Пусть $|\beta| \sim 10^{-26}$ с^2/см. Тогда $\tau_0 \sim 10^{-14}$ с. В этих же условиях $\mu\tau_0^2 \sim 1$ и $\tau_{\min} \sim \tau_0 \sim 10$ фс. Примем, что длительность темного пятна $\tau_p \sim 100$ фс. При этом с хорошим запасом выполняется второе условие (37).

Из (5), (6) и (37) видно, что интенсивности I_1 и I_3 компонент на основной частоте и на частоте третьей гармоники вне темного пятна ярко-темной световой пули удовлетворяют условиям $I_{1,3} < I_{1,3}^{\max}$, где $I_{1,3}^{\max} = \frac{\beta\lambda}{4\pi\tilde{n}_2\tau_{\min}^2}[3(1+\mu\tau_{\min}^2)]^{\pm 1/2}$. Здесь введен нелинейный показатель преломления $\tilde{n}_2$, связанный с коэффициентом α соотношением $\alpha = \omega\tilde{n}_2/2\pi n_1$ [36]. При принятых выше параметрах и $\tilde{n}_2 \sim 10^{-16}$ см^2/Вт [35] в случае плавленого кварца для верхних пороговых значений интенсивностей находим $I_{1,3}^{\max} \sim 10^{13}$ Вт/см^2. В рассматриваемом здесь случае рассогласование фазовых и групповых скоростей является весьма значительным: $\mu\tau_p^2 \sim 10^2$. Тогда для интенсивностей обеих компонент на оси световода имеем $I_1 \sim 10^{12}$ Вт/см^2, $I_3 \approx I_1(\mu\tau_p^2) \sim 10^{10}$ Вт/см^2.

Двухчастотные солитоны в режиме генерации третьей гармоники исследовались и ранее во многих работах. Получено большое количество различных результатов (см., например, [37–41]). Однако полученные здесь важные условия (37) и второе неравенство (39) ранее не встречались. Важной представляется также зависимость (36) поперечного радиуса солитона от временной длительности темного пятна и от фазово-групповой расстройки. Во многих предыдущих работах совершалось усреднение по поперечной моде солитона, и исследование, таким образом, сводилось к одномерным уравнениям [35]. Такой подход априори предполагает устойчивость солитонов по отношению к поперечным возмущениям. Как результат, наряду с равенством (36) маскировались условия (37) и (39).

В настоящей работе учитывались только члены керровской нелинейности, ответственные за генерацию третьей гармоники. В то же время мы пренебрегли членами данной нелинейности, которые описывают упомянутое во втором разделе самовоздействие компонент световой пули [27]. Данное самовоздействие, учтенное в работе [25] в случае ярких световых пуль, не оказывает принципиального влияния на их формирование [32]. При этом выражения для $\tau_{\min}$, $R_{\min}$ и $R_{\max}$, полученные с помощью разных подходов в работах [25] и [32], отличаются друг от друга лишь множителями порядка единицы. Поэтому есть основания предполагать, что учет керровского самовоздействия не изменит принципиально полученные здесь результаты для ярко-темных световых пуль.

Финансирование работы. Работа проведена в рамках выполнения государственного задания Национального исследовательского центра "Курчатовский институт".

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам* (Физматлит, М., 2005) [Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (Academic Press, N.Y., 2003)].
2. D. Mihalache, "Linear and nonlinear light bullets: recent theoretical and experimental studies", Rom. J. Phys. **57**, 352 (2012).
3. C. Guo, M. Xiao, M. Orenstein, and S. Fan, Light: Science & Applications **10**, 160 (2021).
4. Ya. V. Kartashov, "Light bullets in moiré lattices", Opt. Lett. **47**, 4528 (2022).
5. S. K. Ivanov, Ya. V. Kartashov, and L. Torner, "Light bullets in Su-Schrieffer-Heeger photonic topological insulators", Phys. Rev. A **107**, 033514 (2023).
6. В. П. Кандидов, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, "Роль многофотонной ионизации в коротковолновом уширении спектра световой пули среднего ИК-диапазна", Письма в ЖЭТФ **108**, 307 (2018) [V. P. Kandidov, V. O. Kompanets, and S. V. Chekalin, "Role of multiphoton ionization in the short-wavelength broadening of the spectrum of a light bullet in the middle infrared range", JETP Lett. **108**, 287 (2018)].
7. С. В. Чекалин, В. О. Компанец, А. Е. Дормидонов, В. П. Кандидов, "Динамика световых пуль в однородных диэлектриках", УФН **189**, 299 (2019) [S. V. Chekalin, V. O. Kompanets, A. E. Dormidonov, and V. P. Kandidov, Phys.-Uspekhi **62**, 282 (2019)].
8. Z. Xu, Ya. V. Kartashov, L. C. Crasovan, D. Mihalache, and L. Torner, "Spatiotemporal discrete multicolor solitons", Phys. Rev. E **70**, 066618 (2004).
9. S. V. Sazonov, "On the Generation of Harmonics in Modes of Spatiotemporal Solitons", J. Phys. Soc. Jpn. **85** 124404 (2016).
10. A. A. Kanashov and A. M. Rubenchik, "On diffraction and dispersion effect on three wave interaction", Physica D **4**, 122 (1981).
11. B. A. Malomed, P. Drummond, H. He, A. Berntson, D. Anderson, and M. Lisak, "Spatiotemporal solitons in multidimensional optical media with a quadratic nonlinearity" Phys. Rev. E **56**, 4725 (1997).
12. X. Liu, L. J. Qian, and F. W. Wise, "Generation of Optical Spatiotemporal Solitons", Phys. Rev. Lett. **82**, 4631 (1999).
13. X. Liu, K. Beckwitt, and F. Wise, "Two-dimensional optical spatiotemporal solitons in quadratic media", Phys. Rev. E **62**, 1328 (2000).
14. D. Mihalache, D. Mazilu, L.-C. Crasovan, L. Torner, B. A. Malomed, and F. Lederer, "Three-dimensional walking spatiotemporal solitons in quadratic media", Phys. Rev. E **62**, 7340 (2000).
15. H. Leblond, D. Kremer, and D. Mihalache, "Ultrashort spatiotemporal optical solitons in quadratic nonlinear media: Generation of line and lump solitons from few-cycle input pulses", Phys. Rev. A **80**, 053812 (2009).
16. P. Y. P. Chen and B. A. Malomed, "Stabilization of spatiotemporal solitons in second-harmonic generating media", Opt. Commun. **282**, 3804 (2009).
17. R. Suminas, G. Tamošauskas, G. Valiulis, and A. Dubietis, "Spatiotemporal light bullets and supercontinuum generation in β-BBO crystal with competing quadratic and cubic nonlinearities", Opt. Lett. **41**, 2097 (2016).
18. S. V. Sazonov, M. S. Mamaikin, M. V. Komissarova, and I. G. Zakharova, "Planar light bullets under conditions of second harmonic generation", Phys. Rev. E **96**, 022208 (2017).
19. С.В. Сазонов, М.В. Комисарова, "Параметрические световые пули при отсутствии дисперсии групповой скорости на частоте второй гармоники", Письма в ЖЭТФ **111**, 355 (2020) [S. V. Sazonov and M. V. Komissarova, "Parametric Light Bullets in the Absence of Group Velocity Dispersion at the Second Harmonic Frequency", JETP Lett. **111**, 320 (2020)].
20. I. Gražulevičiūtė, R. Šuminas, G. Tamošauskas, A. Couairon, and A. Dubietis, "Carrier-envelope phase-stable spatiotemporal light bullets", Opt. Lett. **40**, 3719 (2015).
21. S. V. Sazonov, "Light bullets under conditions of third harmonics generation", Laser Phys. Lett. **21**, 125202 (2024).
22. Ya. Silberberg, "Collapse of optical pulses", Opt. Lett. **15**, 1282 (1990).
23. O. V. Shtyrina, M. P. Fedoruk, Yu. S. Kivshar, and S. K. Turitsyn, "Coexistence of collapse and stable spatiotemporal solitons in multimode fibers", Phys. Rev. A **97**, 013841 (2018).
24. S. V. Sazonov, "Analytical description of the propagation of spatiotemporal solitons in fibers", Phys. Rev. A **100**, 043828 (2019).

25. С. В. Сазонов, “Параметрический светло-темный пространственно-временной солитон”, Письма в ЖЭТФ **121**, 273 (2025) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **121**, 262 (2025)].
26. Дж. Райнтжес, *Нелинейные оптические параметрические процессы в жидкостях и газах* (Мир, М. (2001) [J. F. Reintjes, *Nonlinear Optical Parametric Processes in Liquids and Gases* (Academic Press, N.Y. (1984)].
27. И. А. Кулагин, Т. Б. Усманов, “Генерация третьей гармоники в изотропных средах в условиях самовоздействия”, Квантовая электроника **16**(3), 570 (1989) [I. A. Kulagin and T. B. Usmanov, “Generation of the third harmonic in isotropic media under self- interaction conditions”, Sov. Quant. Electron. **19**, 376 (1989)].
28. F. Zernike, “Refractive Indices of Ammonium Dihydrogen Phosphate and Potassium Dihydrogen Phosphate between 2000 Å and 1.5 μ”, J. Opt. Soc. Am. **54**, 1215 (1964).
29. С. В. Сазонов, “Солитонный режим генерации второй гармоники в присутствии квазирезонансных примесей”, Квантовая электроника **5**5, 9 (2025) [S. V. Sazonov, “Soliton Regime of Second Harmonic Generation in the Presence of Quasi-Resonant Impurities”, Bulletin of the Lebedev Physics Institute **52**, S388 (2025)].
30. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, “Газовое” приближение в нелинейной теории устойчивости солитонов Кортевега–де Вриза”, ЖЭТФ **92**, 1612 (1987) [S. K. Zhdanov and B. A. rubnikov, “The “‘gas” approximation in the nonlinear stability theory for Korteweg–de Vries solitons”, Sov. Phys. JETP **65**, 904 (1987)].
31. D. Anderson, M. Desaix, M. Lisak, and M. L. Quorida-Teixeiro, “Wave breaking in nonlinear-optical fibers”, J. Opt. Soc. Am. B **9**, 1358 (1992).
32. S. V. Sazonov, “Light bullets in the third harmonic generation mode without matching of phase and group velocities”, Laser Phys. Lett. **23**, 055202 (2026).
33. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры* (Физматлит, М. 2001).
34. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, “Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде”, УФН **93**, 19 (1967) [S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov, and R. V. Khokhlov, “Self-focusing and diffraction of light in a Nonlinear medium”, Sov. Phys.-Uspekhi **10**, 609 (1968)].
35. Г. Агравал, *Нелинейная волоконная оптика* (Мир, М. 1996) [G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Nonlinear Fiber Optics, Academic Press, N.Y. 1989)].
36. S. V. Sazonov, “On the propagation modes of light bullets in the gradient fibers”, Laser Phys. **29**, 124003 (2019).
37. Y. Chen, “Solitons states in wave mixing and third-harmonic generation”, Phys. Rev. A **50**, 5145 (1994).
38. R. A. Sammut and A. V. Buryak, “Bright and dark solitary waves in the presence of third- harmonic generation”, J. Opt. Soc. Am. B **15**, 1488 (1998).
39. R. S. Tasgal, Y. B. Band, and B. A. Malomed, “Gap solitons in a medium with third-harmonic generation”, Phys. Rev. E **72**, 016624 (2005).
40. T. Cheng, R. Usaki, Zh. Duan, W. Gao, D. Deng, M. Liao, Ya. Kanou, M. Matsumoto, T. Misumi, T. Suzuki, and Ya. Ohishi, “Soliton self-frequency shift and third-harmonic generation in a four-hole As_2S_5 microstructured optical fiber”, Optics Express **22**, 3740 (2014).
41. T. Hansson, P. Parra-Rivas, and S. Wabnitz, “Modeling of dual frequency combs and bistable solitons in third-harmonic generation”, Commun. Phys. **6**, 59 (2023); https://doi.org/10.1038/s42005-023-01176-2.