Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 1, с. 46 – 54 © 2026 г. 10 июля

Локальная структура вихря Абрикосова в гранулированном сверхпроводнике

А. А. Голубов[+*1)], *М. М. Хапаев*[×], *В. С. Столяров*[+○], *М. Ю. Куприянов*[+∇]

[+]*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия*

[*]*Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 101000 Москва, Россия*

[×]*Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия*

[○]*Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова (ВНИИА), 127030 Москва, Россия*

[∇]*Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 мая 2026 г.
После переработки 22 мая 2026 г.
Принята к публикации 27 мая 2026 г.

Исследована локальная структура вихря Абрикосова, центрированного в мезоскопической диффузионной сверхпроводящей грануле, встроенной в объемный сверхпроводник. В рамках квазиклассического формализма Узаделя рассчитаны пространственные зависимости параметра порядка, плотности сверхтока и локальной плотности электронных состояний. Показано, что конечная прозрачность межгранульной границы приводит к скачкам указанных величин на границе гранулы. Получен явный критерий существования вихревого состояния в изолированной грануле и найден критический радиус, ниже которого вихревое решение отсутствует. Полученные результаты могут быть использованы для определения параметров межгранульных границ по данным туннельной спектроскопии гранулированных сверхпроводников.

DOI: 10.7868/S3034576626070075

Введение. Вихри Абрикосова являются одной из фундаментальных особенностей сверхпроводников второго рода. Их структура определяется взаимодействием сверхпроводящего конденсата, магнитного поля и квазичастичных возбуждений. Пространственные зависимости параметра порядка и локальной плотности электронных состояний в области керна вихря содержат важную информацию о микроскопических свойствах сверхпроводящего состояния.

Развитие методов сканирующей туннельной микроскопии (СТМ) открыло возможность прямого исследования электронной структуры керна вихря с субнанометровым пространственным разрешением [1–14]. Уже первые СТМ-эксперименты выявили подавление сверхпроводящей щели и характерную перестройку спектра квазичастиц в области керна вихря [1, 2]. Впоследствии аналогичные исследования были выполнены для широкого круга сверхпроводящих материалов, включая многозонные сверхпроводники, тонкие пленки и сильно неупорядоченные системы [7, 15]. Было показано, что локальная плотность электронных состояний является чувствительным инструментом исследования структуры керна вихря, а также влияния беспорядка, размерных эффектов и эффектов близости.

Теоретическое описание вихрей Абрикосова подробно изучалось как в микроскопических теориях, так и в рамках квазиклассического подхода. В диффузионном пределе естественным инструментом являются уравнения Узаделя [16], позволяющие рассчитывать пространственное распределение сверхпроводящих корреляций. Для вихревых состояний такие уравнения были исследованы в различных приближениях, включая приближение круговой ячейки Вигнера–Зейтца, которое адекватно воспроизводит основные свойства вихревой решетки [17–19].

Особый интерес представляет влияние неоднородностей и межгранульных границ на структуру вихря. В гранулированных сверхпроводниках и

[1)]e-mail: a.golubov1960@gmail.com

структурах с эффектом близости конечная прозрачность границ приводит к существенной модификации сверхпроводящих корреляций и локального квазичастичного спектра [9, 20, 21]. В результате на межгранульных границах могут возникать скачки параметра порядка и локальной плотности состояний. В наших предыдущих работах [22–24] эти эффекты исследовались численно в рамках уравнений Узаделя. Однако аналитическое описание, позволяющее непосредственно связать характеристики локальной плотности состояний с параметрами межгранульной границы, до настоящего времени отсутствовало.

В настоящей работе рассматривается локальная структура одиночного вихря Абрикосова в мезоскопической сверхпроводящей грануле, связанной с окружающим сверхпроводником через границу конечной прозрачности. Предполагается, что внешнее магнитное поле удовлетворяет условию $H \ll H_{c2}$, так что взаимодействием между вихрями можно пренебречь. На основе аналитического и численного решения уравнений Узаделя исследованы пространственные распределения параметра порядка, сверхтока и локальной плотности электронных состояний. Кроме того, получен аналитический критерий существования вихревого состояния в изолированной грануле и установлена связь между микроскопическим описанием Узаделя и теорией Гинзбурга–Ландау.

Постановка задачи. Рассматривается сверхпроводящая гранула в форме диска радиуса r_0, связанная с окружающей сверхпроводящей пленкой через границу конечной прозрачности с удельным сопротивлением R_B. Предполагается, что размер гранулы сравним с длиной когерентности $\xi_s = (D/\pi T_c)^{1/2}$, где T_c – температура сверхпроводящего перехода, D – коэффициент электронной диффузии. Далее предполагается выполнение условий грязного предела. Внешнее магнитное поле H приложено перпендикулярно плоскости пленки. Нас будет интересовать локальная структура вихря Абрикосова, центрированного в грануле.

Для описания вихревого состояния используется приближение круговой ячейки Вигнера–Зейтца [17, 18]. В рамках этого подхода гексагональная элементарная ячейка вихревой решетки заменяется круговой ячейкой радиуса

$$r_s = \sqrt{\frac{\Phi_0}{\pi \xi_s^2 H}}, \tag{1}$$

где начало координат помещено в центр вихря, Φ_0 – квант магнитного потока, а радиус r_s нормирован на ξ_s. Ранее данное приближение использовалось при исследовании динамики вихрей в сверхпроводящих пленках [25, 26], а также при анализе влияния захваченных вихрей Абрикосова на характеристики джозефсоновских туннельных переходов [27–29].

Предполагая далее, что $\lambda/r_s \gg 1$, где λ – эффективная глубина проникновения магнитного поля в пленке, приходим к следующей системе уравнений Узаделя [18, 27–29].

$$\frac{d^2\theta_s}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta_s}{dr} - (\Omega + Q^2\cos\theta_s)\sin\theta_s = -\Delta\cos\theta_s, \tag{2}$$

$$Q = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r^2}{r_s^2}\right), \tag{3}$$

$$\Delta \ln t + 2t\sum_{\Omega \geq 0}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{\Omega} - \sin\theta_s\right) = 0, \tag{4}$$

где $\Omega = (2n+1)t$ – положительные безразмерные мацубаровские частоты, $t = T/T_c$, а координата r нормирована на ξ_s. Калибровочно-инвариантный векторный потенциал $\mathbf{Q} = (0, Q, 0)$ и потенциал спаривания Δ нормированы на $\Phi_0/2\pi\xi_s$ и πT_c соответственно. Уравнение (3) соответствует приближению круговой ячейки в пределе пренебрежимо малого магнитного экранирования.

Уравнения (2)–(4) следует дополнить граничными условиями [30] на границе гранулы ($r = r_0$)

$$\gamma_B \cos(\theta_s(r_0 - 0))\frac{d\theta_s(r_0 - 0)}{dr} = \sin(\theta_s(r_0 + 0) - \theta_s(r_0 - 0)), \tag{5}$$

$$\frac{d\theta_s(r_0 + 0)}{dr} = \frac{d\theta_s(r_0 - 0)}{dr}, \tag{6}$$

где

$$\gamma_B = \frac{R_B}{\rho_s \xi_s} \tag{7}$$

– параметр подавления, ρ_s – удельное сопротивление S-металлов. При $r = r_s$ и $r = 0$ имеем

$$\frac{d\theta_s(r_s)}{dr} = 0, \ \theta_s(0) = 0. \tag{8}$$

После решения краевой задачи (2)–(8) определяется пространственная зависимость потенциала спаривания $\Delta(r)$. Далее осуществляется аналитическое продолжение с мацубаровских частот на действительные энергии заменой $\Omega \to -i\varepsilon$. Полученные уравнения решаются в энергетическом представлении, после чего локальная плотность состояний вычисляется по формуле

$$N(\varepsilon, r) = \mathrm{Re}(\cos\theta_s(\varepsilon)). \tag{9}$$

Аналитические результаты для малой гранулы. В СТМ-экспериментах основной интерес представляет область керна вихря. Поэтому сначала рассмотрим гранулы, радиус которых мал по сравнению с длиной когерентности

$$r_0 \ll 1. \tag{10}$$

В этом пределе как потенциал спаривания Δ, так и функция θ_s малы. Ограничиваясь главным членом разложения $Q(r) \simeq 1/r$, линеаризуем уравнение Узаделя и получаем

$$\frac{d^2\theta_s}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta_s}{dr} - \left(\Omega + \frac{1}{r^2}\right)\theta_s = -\Delta(r). \tag{11}$$

Условия применимости данного приближения будут обсуждены ниже.

Будем искать решение в виде

$$\theta_s(r) = \frac{\Delta(r)}{\Omega + \kappa^2}. \tag{12}$$

Подстановка выражения (12) в уравнение (11) приводит к уравнению

$$\frac{d^2\Delta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Delta}{dr} - \frac{\Delta}{r^2} + \kappa^2\Delta = 0. \tag{13}$$

Регулярное в центре вихря решение имеет вид

$$\Delta(r) = AJ_1(\kappa r), \qquad \theta_s(r) = \frac{A}{\Omega + \kappa^2}J_1(\kappa r), \tag{14}$$

где A – постоянная интегрирования.

Подставляя выражение (12) в уравнение самосогласования (4) и используя приближение $\sin\theta_s \simeq \theta_s$, получаем

$$\ln t + 2t\sum_{\Omega\geq 0}\left(\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega + \kappa^2}\right) = 0, \tag{15}$$

или, что эквивалентно,

$$\ln t + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa^2}{2t}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{16}$$

где $\psi(z)$ обозначает дигамма-функцию.

В низкотемпературном пределе $T \ll T_c$, используя асимптотическое разложение $\psi\left(\frac{1}{2} + z\right) \approx \ln z$ при $z \gg 1$ и тождество $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(4\gamma^*)$, где $\gamma^* = e^{\gamma_E} \approx$ ≈ 1.78, а γ_E – постоянная Эйлера–Маскерони, получаем:

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2\gamma^*}} \simeq 0.53. \tag{17}$$

Если линейное приближение (12) остается справедливым в окрестности точки $r = r_0 + 0$, решение вне гранулы можно представить как

$$\Delta(r) = B\,J_1(\kappa\,r) + CN_1(\kappa\,r),\ \theta_s(r) = \frac{\Delta(r)}{\Omega + \kappa^2}, \tag{18}$$

где B и C – постоянные интегрирования, а $J_1(z)$ и $N_1(z)$ – функции Бесселя и Неймана соответственно. Подставляя выражение (12) в граничные условия (5), (6) и линеаризуя их по θ_s, получаем

$$A\kappa\gamma_B\frac{dJ_1(\kappa\,r_0)}{dr} = B\,J_1(\kappa\,r_0) + CN_1(\kappa\,r_0) - AJ_1(\kappa\,r_0), \tag{19}$$

$$B\frac{d\,J_1(\kappa\,r_0)}{dr} + C\frac{d\,N_1(\kappa\,r_0)}{dr} = A\frac{dJ_1(\kappa\,r_0)}{dr}. \tag{20}$$

Используя асимптотики $J_1(\kappa r) \simeq \kappa r/2$ и $N_1(\kappa r) \simeq$ $\simeq -2/(\pi\kappa r)$ при $\kappa r \ll 1$, из уравнений (19) и (20) получаем

$$\Delta = B\kappa r\begin{cases}\dfrac{1}{\eta + 2}, & r \leq r_0,\\[2mm] \dfrac{r_0^2(\eta + 1)}{r^2(\eta + 2)}, & r \geq r_0,\end{cases} \qquad \eta = \frac{\gamma_B\kappa}{r_0}. \tag{21}$$

При $\gamma_B = 0$ потенциал спаривания непрерывен на границе гранулы. При конечном значении γ_B скачок потенциала спаривания определяется выражением

$$\Delta(r_0 + 0) - \Delta(r_0 - 0) = \frac{B\eta k r_0}{\eta + 2}, \qquad \frac{\Delta(r_0 + 0)}{\Delta(r_0 - 0)} = 1 + \eta. \tag{22}$$

Разрыв аномальной функции Грина на границе приводит к скачку плотности сверхтока и изменению плотности состояний вблизи границы.

Плотность сверхтока в грязном пределе определяется выражением

$$\frac{e\rho_s\xi_s J(r)}{2\pi T_c} = Q(r)\,t\sum_{\Omega>0}\sin^2\theta_s. \tag{23}$$

Учитывая, что в области керна вихря $Q(r) \simeq 1/r$ и $\sin\theta_s \simeq \theta_s$, из уравнений (18), (21) и (23) получаем

$$\frac{J(r_0 + 0)}{J(r_0 - 0)} = (1 + \eta)^2. \tag{24}$$

Для плотности состояний (9) в рассматриваемом пределе имеем

$$N(\varepsilon, r) = \mathrm{Re}\{\cos\theta_s\} \simeq \mathrm{Re}\left(1 - \frac{\theta_s^2}{2}\right).$$

Используя выражение (21) и выполняя аналитическое продолжение $\Omega \to -i\varepsilon$, получаем на границе

$$N(\varepsilon, r_0 - 0) - 1 = -\frac{B^2\kappa^2 r_0^2}{2(2+\eta)^2}\,\frac{\kappa^4 - \varepsilon^2}{(\varepsilon^2+\kappa^4)^2}, \tag{25}$$

$$N(\varepsilon, r_0 + 0) - 1 = -(1+\eta)^2\frac{B^2\kappa^2 r_0^2}{2(2+\eta)^2}\,\frac{\kappa^4 - \varepsilon^2}{(\varepsilon^2+\kappa^4)^2}. \tag{26}$$

Таким образом, по обе стороны границы энергетическая зависимость имеет одинаковую функциональную форму и отличается лишь амплитудой. Введем скачок плотности состояний

$$N(\varepsilon, r_0 - 0) - N(\varepsilon, r_0 + 0) = \frac{\kappa^2 r_0^2 B^2}{2}\,\frac{\eta}{2+\eta}\,\frac{\kappa^4 - \varepsilon^2}{(\varepsilon^2+\kappa^4)^2}, \tag{27}$$

а также отношение отклонений плотности состояний

$$\frac{N(\varepsilon, r_0 + 0) - 1}{N(\varepsilon, r_0 - 0) - 1} = (1+\eta)^2. \tag{28}$$

Соотношения (24) и (28) позволяют определить параметр границы η. В частности, из отношения плотностей состояний получаем $\eta = \sqrt{|N(\varepsilon, r_0+0) - 1|/|N(\varepsilon, r_0-0) - 1|} - 1$. В отличие от плотности сверхтока, прямое измерение которой вблизи межгранульной границы затруднительно, локальная плотность состояний может быть исследована методом СТМ с необходимым пространственным разрешением.

Поскольку СТМ-эксперименты обычно проводятся при $T \ll T_c$, из уравнения (16) следует

$$\eta = \frac{\gamma_B}{\sqrt{2\gamma^*}\, r_0}. \tag{29}$$

Таким образом, в низкотемпературном пределе параметр η определяется только отношением γ_B/r_0, что позволяет определять прозрачность границы непосредственно по данным СТМ-измерений.

Критический размер гранулы. Полученный подход позволяет также сформулировать явный критерий существования вихревого состояния в изолированной мезоскопической грануле. Для моделирования такой гранулы рассмотрим предел $\gamma_B \gg 1$, в котором сверхпроводящая область вне цилиндра слабо связана с его внутренней областью ($r \le r_0$). Вблизи порога существования вихревого решения пространственные зависимости потенциала спаривания и аномальных функций Грина внутри гранулы по-прежнему описываются выражениями (14), тогда как условие малого радиуса $r_0 \ll \xi_s$ более не требуется. Поскольку правая часть граничного условия (5) остается конечной, в главном порядке по γ_B^{-1} получаем

$$\frac{d\theta_s(r_0)}{dr} \propto \frac{d\Delta(r_0)}{dr} \propto \frac{dJ_1(\kappa r_0)}{dr} = 0. \tag{30}$$

Условие (30) выполняется при

$$\kappa_m r_0 = \alpha_m, \tag{31}$$

где α_m – нули производной функции Бесселя $J_1'(x)$.

Общее решение линеаризованного уравнения (13), регулярное при $r = 0$ и удовлетворяющее граничному условию (30), может быть разложено по базису собственных функций $u_m(r) = J_1(\kappa_m r)$, удовлетворяющих условию $u_m'(r_0) = 0$:

$$\Delta(r) = \sum_m c_m u_m(r), \qquad \theta_s(r) = \sum_m \frac{c_m}{\Omega + \kappa_m^2} u_m(r),$$

и уравнение самосогласования распадается на независимые уравнения для отдельных мод

$$c_m \left[\ln t + 2t \sum_{\Omega > 0}\left(\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega + \kappa_m^2}\right)\right] = 0. \tag{32}$$

Следовательно, потеря устойчивости определяется низшей собственной модой. Поэтому вблизи критического радиуса решение имеет вид

$$\Delta(r) \propto J_1(\kappa_1 r), \qquad \theta_s(r) \propto \frac{J_1(\kappa_1 r)}{\Omega + \kappa_1^2},$$

с точностью до нормировочного множителя. Вклад высших радиальных мод возникает лишь за пределами линейного приближения и исчезает при критическом радиусе. Для низшей моды $\alpha_1 = 1.84118\ldots$, поэтому из (31) получаем

$$R_c = \frac{\alpha_1}{\kappa_1}. \tag{33}$$

Таким образом, при $\gamma_B \gg 1$ вихревое решение внутри гранулы существует лишь при $r_0 > R_c$.

В пределе $T \to 0$ уравнение (32) дает $\kappa_1 = \sqrt{1/2\gamma^*}$, и в физических единицах отсюда следует

$$R_c = \alpha_1 \sqrt{2\gamma^*}\, \xi_s \simeq 3.47\, \xi_s. \tag{34}$$

На рисунке 1 показана пространственная зависимость $\Delta(r)$, рассчитанная численно из полной системы нелинейных уравнений внутри цилиндра ($r \le r_0$) в пределе $\gamma_B \to \infty$ (граничное условие $d\theta_s/dr = 0$ при $r = r_0$) при $T = 0.05T_c$ и $r_s = 12$ (что соответствует $H/H_{c2} = 0.05$) для нескольких значений r_0. Численные результаты подтверждают аналитическое предсказание: по мере уменьшения радиуса гранулы потенциал спаривания испытывает все более сильное подавление. Особенно заметным оно стано-

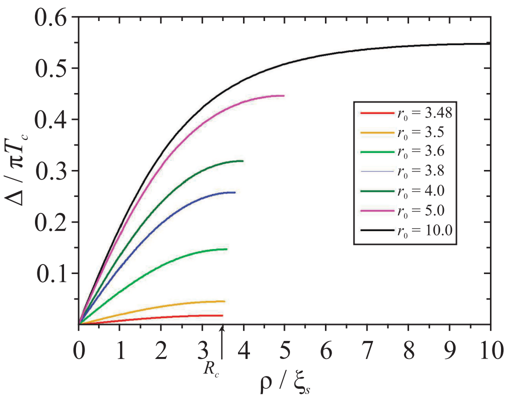

Рис. 1. (Цветной онлайн) Зависимость потенциала спаривания $\Delta(r)$ от r внутри гранулы ($r \lesssim r_0$) в пределе $\gamma_B \to \infty$ (граничное условие $d\theta_s/dr = 0$ при $r = r_0$), рассчитанная при $T/T_c = 0.05$ и $r_s = 12$ для нескольких значений r_0. Стрелка показывает критический радиус, задаваемый уравнением (34)

вится при $r_0 \to R_c$, где R_c определяется выражением (34), полученным в низкотемпературном пределе.

Для сравнения рассмотрим предел Гинзбурга–Ландау $T \to T_c$. Исходя из точного линеаризованного условия

$$\ln t + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa_1^2}{2t}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \qquad \kappa_1^2 = \frac{\alpha_1^2}{R_c^2},$$

где α_1 – первый нуль производной функции Бесселя $J_1'(x)$, в пределе $t = T/T_c \to 1$ находим

$$R_c(T \lesssim T_c) = \frac{\pi\alpha_1}{2\sqrt{1-t}}\,\xi_s.$$

Используя выражение для длины когерентности Гинзбурга–Ландау

$$\xi(T) = \frac{\pi\xi_s}{2\sqrt{1 - T/T_c}},$$

получаем

$$R_c = \alpha_1\,\xi(T) \approx 1.841\,\xi(T).$$

Таким образом, в пределе Гинзбурга–Ландау критический радиус остается пропорциональным длине когерентности. Численный коэффициент при этом отличается от результата, полученного в приближении круговой ячейки при высоких полях ($H \to H_{c2}$), где $r_c = \sqrt{2}\,\xi(T)$. Это различие обусловлено иной геометрией задачи и другими граничными условиями для изолированного цилиндра.

Отметим, что вихревые состояния в мезоскопических сверхпроводящих цилиндрах радиуса $R \sim$ несколько ξ интенсивно исследовались ранее. В рамках теории Гинзбурга–Ландау такие состояния существуют лишь при $R > R_c$, причем для одиночного вихря критический радиус составляет $R_c/\xi(T) \approx 1.3$ [31]. При $R \gtrsim R_c$ равновесное состояние сохраняет аксиальную симметрию и соответствует гигантскому вихрю, тогда как многовихревые конфигурации возникают лишь при $R \gtrsim 2.5$–$3\,\xi(T)$ [32]. Исследования в рамках микроскопической теории [33, 34] показали, что в мезоскопических дисках керн вихря гибридизуется с краевыми состояниями, что существенно модифицирует как потенциал спаривания, так и локальную плотность состояний. Наши результаты качественно согласуются с этими выводами, в частности, в отношении существования критического радиуса, и одновременно дают аналитическое описание для граничного условия изолированного цилиндра при произвольной температуре в режиме $R \sim$ несколько ξ_s.

Численные результаты. В общем случае полная нелинейная краевая задача (2)–(8) была решена численно для произвольных значений параметров. На рисунках 2 и 3 показаны пространственные зависимости потенциала спаривания и плотности сверхтока соответственно. Расчеты выполнены при $T/T_c = 0.05$, $H/H_{c2} = 0.05$ и нескольких значениях параметра подавления γ_B для гранулы радиуса $r_0 = 1$. Из этих рисунков следует, что с увеличением γ_B разрывы на границе гранулы становятся все более выраженными, что отражает ослабление связи между гранулой и окружающим сверхпроводником.

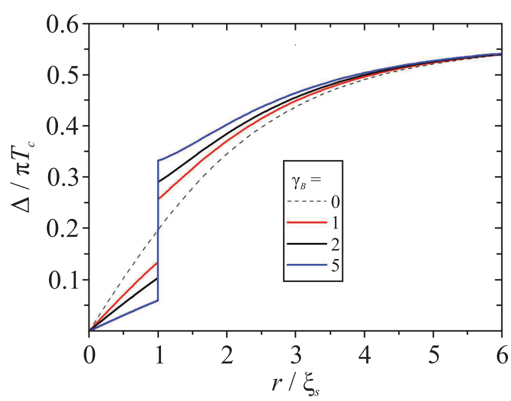

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость потенциала спаривания $\Delta(r)$ от расстояния r до центра вихря при $T/T_c = 0.05$ и $r_s = 12$ для различных значений параметра подавления γ_B. Радиус гранулы $r_0 = 1$

Для более детального анализа на рис. 4 показана пространственная зависимость локальной плотности состояний при нулевой энергии. Численные результаты качественно согласуются с аналитическими предсказаниями: с увеличением γ_B скачок плотности со-

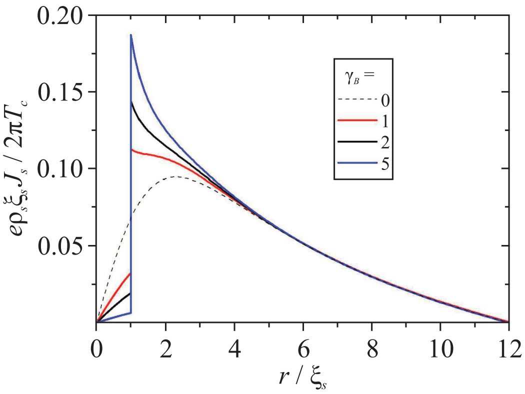

Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость плотности сверхтока $J(r)$ от расстояния r до центра вихря, рассчитанная при $T/T_c = 0.05$ и $r_s = 12$ для различных значений параметра подавления γ_B. Радиус гранулы $r_0 = 1$

стояний на границе гранулы ($r = r_0 \pm 0$) становится все более выраженным. Внутри цилиндра ($r \leq r_0$) $N(\varepsilon = 0, r)$ приближается к единице, что указывает на сильное подавление сверхпроводящих корреляций. Вне гранулы плотность состояний остается существенно меньшей единицы.

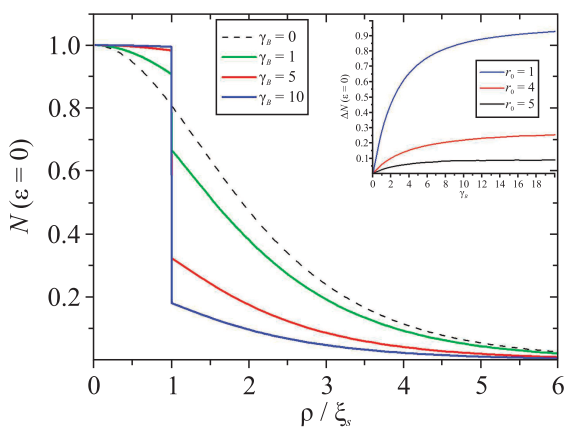

Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимость плотности состояний при нулевой энергии $N(\varepsilon = 0)$ от расстояния до центра вихря при $T/T_c = 0.05$ и $r_s = 12$ для различных значений параметра подавления γ_B. Радиус гранулы $r_0 = 1$. На вставке показана зависимость скачка плотности состояний $\Delta N(0) = N(0, r_0 - 0) - N(0, r_0 + 0)$ от параметра γ_B в тех же условиях

В частности, при $r_0 < R_c$ и $\gamma_B \gg 1$ сверхпроводящие корреляции внутри цилиндра оказываются сильно подавленными, вследствие чего $N(0, r) \simeq 1$ соответствует нормальному металлическому значению. Вне гранулы плотность состояний стремится к сверхпроводящему значению вдали от границы раздела, тогда как вблизи границы на нее по-прежнему влияют структура керна вихря и эффект близости со стороны слабо связанной гранулы. Такое поведение согласуется с аналитическим критерием существования вихревого состояния.

На рисунке 5 представлены численно рассчитанные энергетические зависимости локальной плотности состояний в двух точках, расположенных по разные стороны границы. Результаты демонстрируют характерное бесщелевое поведение, свойственное области керна вихря, с широким максимумом вблизи объемного значения щели $\Delta/(\pi T_c) \approx 0.56$. Кроме того, наблюдается выраженный скачок плотности состояний на границе, величина которого возрастает с увеличением γ_B.

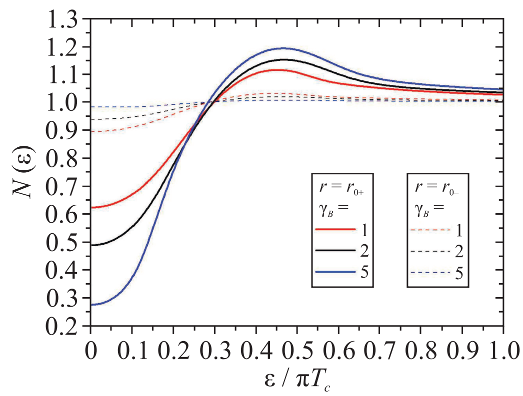

Рис. 5. (Цветной онлайн) Зависимость плотности состояний $N(\varepsilon)$, рассчитанная при $T/T_c = 0.05$, $r_0 = 1$ и $r_s = 12$ для нескольких значений параметра подавления γ_B. Пунктирные и сплошные линии соответствуют $r = r_0 - 0$ и $r = r_0 + 0$

Как видно из рис. 5, численно рассчитанные зависимости $N(\varepsilon, r_0 - 0)$ и $N(\varepsilon, r_0 + 0)$ качественно согласуются с аналитическими выражениями (25)–(27). В частности, независимо от значения γ_B обе функции обращаются в единицу при энергиях, близких к $\kappa^2 \approx 0.28$, и достигают максимума при энергиях, близких к $\sqrt{3}\,\kappa^2 \approx 0.484$. В то же время наблюдаются заметные количественные различия между теорией возмущений и результатами численного расчета, прежде всего в абсолютных значениях плотности состояний.

Количественные различия между аналитическими и численными результатами обусловлены приближенным характером пертурбативного решения. Действительно, выражения (25)–(27) были получены в предположении, что в окрестности точки $r = r_0 + 0$ функция θ_s остается малой:

$$\theta_s(r_0 + 0) = \frac{\gamma_B}{t + \kappa^2} \left. \frac{d\Delta(r)}{dr} \right|_{r \to 0} \ll 1. \qquad (35)$$

Наряду с условием $|N(\varepsilon, r) - 1| \ll 1$ это оправдывает использование линеаризованного уравнения Узаделя (11). При низких температурах $T \ll T_c$ имеем $\kappa^2 \simeq 0.28$. Как следует из численных результатов, представленных на рис. 2, производная работы $d\Delta/dr|_{r\to 0}$ порядка 0.2 при $\gamma_B = 0$ и уменьшается с ростом γ_B.

Следовательно, количественная применимость выражений (22)—(27) ограничена режимом достаточно малых радиусов гранулы, при котором выполняется условие (35). Расчеты, представленные на рис. 5 и выполненные при $r_0 = 1$, находятся за пределами строгого асимптотического предела $r_0 \ll 1$, что и приводит к наблюдаемым количественным расхождениям между аналитическими и численными результатами. Тем не менее аналитическое решение корректно описывает качественное поведение плотности состояний и ее зависимость от параметров задачи, тогда как точные количественные результаты дает полное численное решение нелинейной краевой задачи.

Заключение. Мы исследовали локальную структуру керна вихря Абрикосова в мезоскопической сверхпроводящей грануле, встроенной в сверхпроводящую пленку. Показано, что в пределе малого размера гранулы $r_0 \ll \xi_s$ скачки потенциала спаривания (22), плотности сверхтока (24) и локальной плотности состояний (28) на границе $r = r_0$ определяются единственным безразмерным параметром η. Для произвольных значений параметров полная нелинейная краевая задача решена численно.

Особый интерес представляет скачок локальной плотности состояний, который может быть непосредственно измерен методом СТМ при низких температурах. В пределе $T \ll T_c$ параметр η зависит только от отношения γ_B/r_0. Комбинируя СТМ-измерения с независимой оценкой размера гранулы r_0, можно определить параметр η из соотношения (28). Используя выражения (7) и (29), получаем

$$\gamma_B = \sqrt{2\gamma^*}\,\eta r_0, \qquad R_B = \gamma_B \rho_s \xi_s, \tag{36}$$

что открывает возможность оценки удельного сопротивления межгранульных границ R_B по данным СТМ-спектроскопии.

В пределе слабопрозрачных границ $\gamma_B \gg 1$ получен аналитический критерий существования вихревого состояния в мезоскопическом цилиндре. Соответствующий критический радиус найден как в низкотемпературном пределе, так и в рамках теории Гинзбурга–Ландау, что устанавливает прямую связь между микроскопическим описанием Узаделя и феноменологической теорией Гинзбурга–Ландау.

Полученные результаты могут быть использованы для интерпретации СТМ-экспериментов на гранулированных сверхпроводниках и определения параметров межгранульных границ по данным локальной туннельной спектроскопии. В более широком плане они демонстрируют возможность систематического аналитического описания вихревых явлений в мезоскопических системах и системах с эффектом близости.

Авторы признательны А. С. Мельникову за полезные обсуждения.

Финансирование работы. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант # 23-72-30004).

Конфликт интересов.– Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. H. F. Hess, R. B. Robinson, R. C. Dynes, J. M. Valles, and J. V. Waszczak, “Scanning-tunneling-microscope observation of the Abrikosov flux lattice and the density of states near and inside a fluxoid”, Phys. Rev. Lett. **62**(2), 214 (1989).
2. H. F. Hess, R. B. Robinson, and J. V. Waszczak, “Vortexcore structure observed with a scanning tunneling microscope”, Phys. Rev. Lett. **64**(22), 2711 (1990).
3. S. Kashiwaya, M. Koyanagi, and A. Shoji, “Lowtemperature scanning tunneling spectroscopic observation of vortex in a NbC_{1-x} thin film”, Appl. Phys. Lett. **61**(15), 1847 (1992).
4. A. A. Golubov and U. Hartmann, “Electronic structure of the Abrikosov vortex core in arbitrary magnetic fields”, Phys. Rev. Lett. **72**(22), 3602 (1994).
5. U. Hartmann, A. A. Golubov, T. Drechsler, M. Y. Kupriyanov, and C. Heiden, “Measurement of the vortexcore radius by scanning tunneling microscopy”, Physica B: Condensed Matter **194–196**, 387 (1994).
6. A. Volodin, A. A. Golubov, and J. Aarts, “Vortex core shapes measured by STM”, Zeitschrift für Physik B Condensed Matter **102**, 317 (1997).
7. H. Suderow, I. Guillamón, J. G. Rodrigo, and S. Vieira, “Imaging superconducting vortex cores and lattices with a scanning tunneling microscope”, Supercond. Sci. Technol. **27**(6), 063001 (2014).
8. A. Fente, E. Herrera, I. Guillamón, H. Suderow, S. Mañas-Valero, M. Galbiati, E. Coronado, and V. G. Kogan, “Field dependence of the vortex core size probed by scanning tunneling microscopy”, Phys. Rev. B **94**(1), 014517 (2016).
9. V. S. Stolyarov, T. Cren, C. Brun, I. A. Golovchanskiy, O. V. Skryabina, D. I. Kasatonov, M. M. Khapaev,

M. Y. Kupriyanov, A. A. Golubov, and D. Roditchev, "Expansion of a superconducting vortex core into a diffusive metal", Nat. Commun. **9**(1), 2277 (2018).

10. A. Putilov, C. Di Giorgio, V. Vadimov, L. Taillefer, I. Shishkin, G. Shipunov, S. Aswartham, S. Wurmehl, B. Büchner, C. Hess, M. Vlasenko, V. Pudalov, I. Khodasevych, L. Vinnikov, D. Roditchev, and V. Stolyarov, "Vortex-core properties and vortex-lattice transformation in FeSe", Phys. Rev. B **99**(14), 144514 (2019).
11. M. Fernández-Lomana, P. O. Aguilera, B. Wu, E. Herrera, H. Suderow, and I. Guillamón, "Superconducting density of states and vortex lattice of $LaRu_2P_2$ observed by scanning tunneling spectroscopy", J. Phys. Condens. Matter **37**(2), 025604 (2024).
12. M. Zehetmayer, "How the vortex lattice of a superconductor becomes disordered: a study by scanning tunneling spectroscopy", Sci. Rep. **5**, 9244 (2015).
13. R. A. Hovhannisyan, S. Y. Grebenchuk, S. A. Larionov, D. S. Baranov, M. A. Baranov, S. S. Sheshukova, D. Roditchev, and V. S. Stolyarov, "Scanning vortex microscopy reveals thickness-dependent pinning nano-network in superconducting niobium films", Commun. Mater. **6**, **42** (2025).
14. V. S. Stolyarov, V. Neverov, A. V. Krasavin, D. I. Kasatonov, D. Panov, D. Baranov, O. V. Skryabina, A. S. Melnikov, A. A. Golubov, M. Y. Kupriyanov, A. A. Shanenko, T. Cren, A. Y. Aladyshkin, A. Vagov, and D. Roditchev, "Microscopic structure of the vortex cores in granular niobium: A coherent quantum puzzle", arXiv:2601.20486 [cond-mat.supr-con] (2026).
15. Ø. Fischer, M. Kugler, I. Maggio-Aprile, C. Berthod, and C. Renner, "Scanning tunneling spectroscopy of high-temperature superconductors", Rev. Mod. Phys. **79**(1), 353 (2007).
16. K. D. Usadel, "Generalized diffusion equation for superconducting alloys", Phys. Rev. Lett. **25**(8), 507 (1970).
17. D. Ihle, "Wigner-seitz approximation for the description of the mixed state of type II superconductors", Physica Status Solidi (b) **47**(2), 423 (1971).
18. R. J. Watts-Tobin, L. Kramer, and W. Pesch, "Density of states, entropy, and specific heat for dirty type II superconductors at arbitrary temperature", J. Low Temp. Phys. **17**(1–2), 71 (1974).
19. W. V. Pogosov, K. I. Kugel, A. L. Rakhmanov, and E. H. Brandt, "Approximate Ginzburg-Landau solution for the regular flux-line lattice: Circular cell method", Phys. Rev. B **64**(6), 064517 (2001).
20. D. E. Kiselov, M. A. Skvortsov, and M. V. Feigel'man, "Gapful electrons in a vortex core in granular superconductors", SciPost Phys. **15**(1), 008 (2023).
21. A. S. Mel'nikov and A. V. Samokhvalov, "Electronic structure of pinned Abrikosov vortices: Andreev theory of quasiparticle bound states", J. Low Temp. Phys. **217**, 82 (2024).
22. M. M. Khapaev and M. Y. Kupriyanov, "A finitedifference scheme for discontinuous solutions of the Usadel equations", Differentsial'nye Uravneniya **60**(7), 1001 (2024) [M. M. Khapaev and M. Y. Kupriyanov, "A finitedifference scheme for discontinuous solutions of the Usadel equations", Differential Equations **60**(7), 985 (2024)].
23. M. M. Khapaev and M. Y. Kupriyanov, "Finite-difference integro-interpolation method for discontinuous solutions of the Usadel equations", Differentsial'nye Uravneniya **61**(7), 1000 (2025) [M. M. Khapaev and M. Y. Kupriyanov, "Finite-difference integro-interpolation method for discontinuous solutions of the Usadel equations", Differential Equations **61**(7), 1163 (2025)].
24. M. M. Khapaev, M. Y. Kupriyanov, A. A. Golubov, and V. S. Stolyarov, "Estimation of the intergranular transparency of diffusive superconducting films from the shape of the density of states of the Abrikosov vortex", JETP Lett. **122**(2), 116 (2025).
25. V. V. Danilov, M. Y. Kupriyanov, and K. K. Likharev, "Conductance of superconductors in dynamical mixed state", Fizika Tverdogo Tela **16**(2), 935 (1974) [V. V. Danilov, M. Y. Kupriyanov, and K. K. Likharev, "Conductance of superconductors in dynamical mixed state", Sov. Phys. Solid State **16**, 602, 1974].
26. M. Y. Kupriyanov and K. K. Likharev, "UHF impedance of superconductors in mixed state", ZhETF **68**(4), 1506 (1975) [M. Y. Kupriyanov and K. K. Likharev, "UHF impedance of superconductors in mixed state", Sov. Phys. JETP **41**, 755 (1975)].
27. A. A. Golubov and M. Y. Kupriyanov, "Effect of Abrikosov vortices on properties of superconducting tunnel-junctions", Fizika Nizkikh Temperatur **12**(4), 373 (1986) [A. A. Golubov and M. Y. Kupriyanov, "Effect of Abrikosov vortices on properties of superconducting tunnel-junctions", Sov. J. Low Temp. Phys. **12**, 212 (1986)].
28. A. A. Golubov and M. Y. Kupriyanov, "Effect of single trapped Abricosov vortices on the properties of Josephson tunnel-junctions", ZhETF **92**(4), 1512 (1987) [A. A. Golubov and M. Y. Kupriyanov, "Effect of single trapped Abricosov vortices on the properties of Josephson tunnel-junctions", Sov. Phys. JETP **65**, 849 (1987)].
29. A. A. Golubov and M. Y. Kupriyanov, "Theoretical investigation of Josephson tunnel-junctions with spatially inhomogeneous superconducting electrodes", J. Low Temp. Phys. **70**(1–2), 83 (1988).
30. M. Y. Kuprianov and V. F. Lukichev, "Effect of boundary transparency on critical current in dirty SS'S structures", ZhETF **94**(6), 139 (1988) [M. Y. Kuprianov

and V. F. Lukichev, "Effect of boundary transparency on critical current in dirty SS'S structures", Sov. Phys. JETP **67**, 1163 (1988)].
31. G. F. Zharkov, "First- and second-order transitions for a superconducting cylinder in a magnetic field obtained from a self-consistent solution of the Ginzburg-Landau equations", Phys. Rev. B **63**, 224513 (2001).
32. W. V. Pogosov, A. L. Rakhmanov, and E. A. Shapoval, "Vortex state in mesoscopic cylinders. variational approach", Physica C **356**(3), 225 (2001).
33. A. V. Samokhvalov, I. A. Shereshevskii, N. K. Vdovicheva, M. Taupin, I. M. Khaymovich, J. P. Pekola, and A. S. Mel'nikov, "Electronic structure of a mesoscopic superconducting disk: Quasiparticle tunneling between the giant vortex core and the disk edge", Phys. Rev. B **99**, 134512 (2019).
34. A. V. Samokhvalov, I. A. Shereshevskii, N. K. Vdovicheva, M. Taupin, I. M. Khaymovich, and A. S. Mel'nikov, "Electron-phonon heat transfer in giant vortex states", Phys. Rev. B **105**, 024522 (2022).