Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 1, с. 82 – 88

Генерация оптической частотной гребенки в цилиндрическом микрорезонаторе мод шепчущей галереи

А. Д. Новиков[1)], *И. Д. Ватник*

Физический факультет, Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 20 мая 2026 г.
После переработки 8 июня 2026 г.
Принята к публикации 8 июня 2026 г.

В работе демонстрируется генерация оптической частотной гребенки в цилиндрическом микрорезонаторе мод шепчущей галереи, созданном на поверхности оптического волокна. Проведенная оптимизация формы микрорезонатора, объема моды, а также силы связи между возбуждащим элементом и микрорезонатором позволила достичь рекордной для такого типа микрорезонатора нагруженной добротности 10^8, и получить параметрическую нелинейную генерацию при мощности накачки 40 мВт.

DOI: 10.7868/S3034576626070117

1. Введение. Оптическая частотная гребенка (ОЧГ) – это мощный инструмент в современной метрологии. Она используется в качестве оптического стандарта частоты [1], в спектроскопии [2, 3]. Большой интерес к такому состоянию света представлен в области оптических микрорезонаторов мод шепчущей галереи (МШГ), которые имеют малый эффективный объем моды и высокую добротность. Это позволяет создавать внутри резонатора высокую интенсивность поля и простым образом достигать генерации ОЧГ, которая успешно исследуется и используется в сферических микрорезонаторах [4, 5], кольцевых [6, 7] и тороидальных микрорезонаторах [8[на чипах.

Существенным ограничением для использования микрорезонаторов остается сложность изготовления таких структур. Интегральные микрорезонаторы на кремнии или нитриде кремния требуют специального литографического процесса, доступного лишь в ограниченном числе лабораторий. В России такие возможности есть, например, в Институте нанотехнологий микроэлектроники РАН [9]. Более простым является механический метод создания кристаллических микрорезонаторов, используемый, например, в Российском квантовом центре [10].

Отдельный интерес представляют цилиндрические микрорезонаторы МШГ на поверхности волокон [11]. Управление аксиальным распространением мод (т.е. вдоль цилиндра) в таких структурах позволяет создавать элементы, трудно реализуемые в традиционных микрорезонаторах: линии задержки и буферы [12], фильтры со сверхмалыми потерями и дисперсией [13], детекторы одиночных частиц [14] и элементы систем управления одиночными атомами [15], а также позволяет генерировать особенные формы сигнала – низкочастотные оптические гребенки с частотой повторения менее 1 ГГц [16]. Технология изготовления цилиндрических микрорезонаторов доступна, поскольку они создаются на участках стандартных оптических волокон с минимальной дополнительной подготовкой поверхности, и при этом сохраняют высокую воспроизводимость получаемых геометрических параметров благодаря тому, что радиус волокна задается с малой погрешностью. Более того, существуют способы прецизионного изменения этого радиуса локальным нагревом волокна [17], его изгибом [18], модификацией волокна фемтосекундным лазером [19]. Простота изготовления и обширные возможности настройки спектра аксиальных мод делает их привлекательными для практических применений.

Однако эта платформа пока практически не используется в нелинейной фотонике. По сравнению с другими микрорезонаторами цилиндрические микрорезонаторы имеют несколько больший объем моды и худшее перекрытие полей мод с разными квантовыми числами. Как было показано нами ранее теоретически, это повышает пороги наблюдения нелинейных эффектов [20] до единиц ватт и более. Высокие пороги наблюдения нелинейных эффектов (0.5 Вт) для микрорезонаторов на волокне были обнаружены и в недавней экспериментальной работе [21]. Поэтому для таких структур актуален поиск подходов снижения нелинейных порогов.

В этой работе мы демонстрируем генерацию ОЧГ в цилиндрическом микрорезонаторе на кварцевом волокне с улучшенными характеристиками. Благо-

1)e-mail: a.novikov6@g.nsu.ru

даря оптимизации формы резонатора с помощью отжига CO_2-лазером нам удалось уменьшить аксиальное распределение моды до ~ 50 мкм (при радиусе волокна 106 мкм) и достичь рекордной для данного типа платформы нагруженной добротности 10^8. Существенное снижение эффективного объема моды в совокупности с оптимизацией связи с возбуждающим элементом позволило получить параметрическую генерацию ОЧГ на азимутальных модах с частотой повторения 306.25 ГГц (область свободной дисперсии резонатора 2.45 нм) при пороговой мощности накачки всего 70 мВт.

Во втором разделе этой статьи описана процедура создания элемента связи – вытянутого оптического волокна (тейпера), используемого для накачки микрорезонатора, а также продемонстрирован метод восстановления его пропускания, которое деградирует со временем. В третьем разделе рассмотрен процесс создания самого микрорезонатора с помощью излучения CO_2-лазера, и продемонстрирована возможность прецизионной настройки связи между тейпером и резонатором для достижения критической связи. В четвертом разделе представлена экспериментальная схема получения нелинейной генерации, описан метод минимизации паразитного влияния тепловой нелинейности за счет быстрой перестройки длины волны лазера накачки и приведены итоговые спектры сгенерированной ОЧГ.

2. Элемент связи.

2.1. Создание элемента связи. Для возбуждения МШГ используется вытянутое одномодовое оптоволокно – тейпер [22]. В процессе вытягивания пропускание изменяется периодическим образом, что связано с интерференцией нескольких поперечных мод [23] в волноводе, который становится многомодовым для излучения, вышедшего в оболочку. Вытягивание тейпера происходит до тех пор, пока эти колебания не исчезнут и волновод вновь станет одномодовым при диаметре менее 1.2 мкм.

2.2. Увеличение пропускания деградирующего элемента связи. Потери на вытянутом микроволокне растут с течением времени. Это вызвано адсорбцией воды на поверхности тейпера и оседанием пыли. В условиях лаборатории без класса чистоты и контроля влажности потери могут возрастать с 5 до 70 % за один день. Мы обнаружили, что эти растущие потери можно уменьшить, если пропустить через деградирующий тейпер непрерывное лазерное излучение с высокой мощностью. Метод заключается в постепенном увеличении мощности лазерного излучения с длиной волны 1.55 мкм с 20 дБм до 27 дБм с шагом 1 дБм каждые 30 с, это позволяет увеличить пропускание с 30 до 70 %. Однако, при резком увеличении мощности до 27 дБм часто происходит разрыв тейпера, что можно объяснить его резким негревом.

Предположительно, высокомощное лазерное излучение испаряет адсорбированную влагу с поверхности тейпера и тем самым увеличивает его пропускание, что и объясняет такое изменение пропускаемой мощности. Благодаря описанному подходу, нам удавалось пользоваться одним и тем же вытянутым волокном длительное время, что существенно облегчило проведение экспериментов с микрорезонатором.

Необходимо отметить, что потери могут быть вызваны не только влагой, но и частицами пыли, и предложенный метод не поможет исключить такие потери. Более того, за счет электризации тейпера, а также градиентной компоненты светового давления частицы пыли могут быть притянуты из воздуха в область большой интенсивности оптической волны на поверхности тейпера, что вызывает дополнительные потери, возрастанию диссипирующей мощности и разрыву тейпера из-за его нагрева.

3. Создание микрорезонатора.

3.1. Оптимизация распределения моды. Для снижения порога наблюдения нелинейных эффектов нами был разработан метод создания микрорезонаторов на поверхности оптического цилиндра с предельной добротностью и небольшим объемом моды. Метод заключался в двухстадийной обработке участка оптического волокна излучением CO_2 лазера для создания локальных вариаций эффективного радиуса [17, 24].

Первоначальная подготовка образца включает в себя погружение отрезка оптического волокна (Nufern MM-S200/220-22A) с радиусом кварцевой оболочки 110 мкм в раствор ацетона и обработку в ультразвуковой ванне в течение 10 мин. После этой обработки с помощью спиртовой салфетки удаляется акриловая защитная оболочка.

Далее очищенное оптическое волокно помещалось на металлический держатель, который крепится на моторизированном трансляторе, двигающимся с шагом 2.5 мкм, при этом ось волокна размещается вдоль оси движения транслятора. Излучение CO_2 лазера фокусируется на образец через цилиндрическую линзу, ось которой перпендикулярна оси волокна (см. рис. 1a). Сфокусированный пучок имеет размер 50 мкм вдоль волокна и несколько миллиметров поперек волокна. Положение фокуса линзы предварительно проверялось следующим образом: лазерное излучение мощностью 15 Вт направлялось через лин-

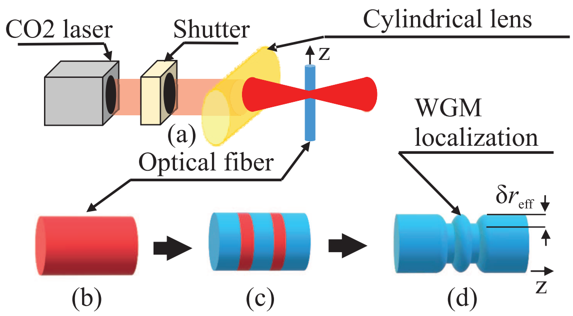

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема создания микрорезонатора на поверхности оптического волокна с помощью CO_2 лазера

зу на тестовый образец оптоволокна, и оно нагревалось до такой температуры, при которой наблюдается свечение нагретой области. Мы юстировали линзу, добиваясь максимального свечения точки нагрева волокна.

Первая стадия обработки образца включала в себя нагрев излучением CO_2 лазера на мощности 2 Вт, образец передвигался под фокусированным излучением со скоростью 0.5 мм/с (рис. 1b). Этот процесс повторялся 10 раз. Согласно оценке, проведенной в рамках одномерной тепловой модели [24], такой отжиг прогревает образец до температур порядка 700 градусов. Эта стадия позволяет получить ровную поверхность образца, внося слабые отрицательные вариации эффективного радиуса, т.е. произведения геометрического радиуса и показателя преломления [24], а также добиться увеличения добротности. Затем в образец вносились две отрицательные вариации радиуса большей амплитуды для увеличения степени локализации моды вдоль оси цилиндра (рис. 1c). Для этого образец экспонировался излучением мощностью 10 Вт в двух точках на расстоянии 200 мкм друг от друга. В каждой точке излучение облучало образец 20 раз импульсами длительностью по 100 мс. Схожая форма отрицательной вариации эффективного радиуса продемонстрирована в статье [25]. В результате, на образце возникала область, запирающая МШГ между двумя "сужениями" – отрицательными вариациями эффективного радиуса (см. рис. 1d). Важно, что такой подход позволил создать область запирания с достаточно малым объемом моды. Используемые ранее методы внесения положительных вариаций радиуса с помощью нагрева лазером или нагретой проволокой создают области с существенно большей протяженностью мод вдоль оси цилиндра [17, 26].

Для характеризации структуры аксиальных мод мы использовали стандартный для такого типа микрорезонаторов метод, описанный в [27]. Для анализа мод измеряется спектр пропускания $P(\lambda, z)$ для микрорезонатора на поверхности оптического волокна, возбуждаемого тейпером. Тейпер расположен перпендикулярно микрорезонатору и может перемещаться вдоль его оси, детектируя спектры пропускания в разных точках z вдоль оси волокна. Спектральные измерения проводились с использованием анализатора оптического спектра (АОС) с разрешением 1.44 пм каждые 5 мкм вдоль оси микрорезонатора. Спектры измерялись в диапазоне (1548.2, 1548.5 нм), в котором присутствовали резонансы аксиальных мод микрорезонатора с некоторыми конкретными азимутальным и радиальным числами. Серия спектров мощности пропускания вдоль оси микрорезонатора образует спектрограмму, показывающую аксиальные распределения интенсивностей МШГ, см. рис. 2.

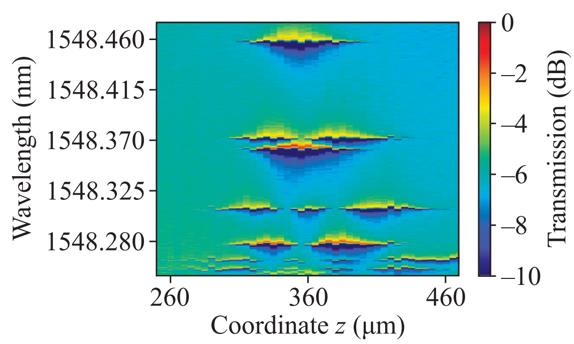

Рис. 2. (Цветной онлайн) Спектрограмма микрорезонатора с вариациями эффективного радиуса

Отрицательные вариации радиуса вносились облучением в точках $z = 260, 460$ мкм. В результате МШГ локализуются между этими точками (см. рис. 2). Так, на длине волны 1548.46 нм в области 300–400 мкм возникает мода с нулевым аксиальным числом, т.е. мода, имеющая один максимум интенсивности вдоль оси цилиндра. Оценка ширины моды составляет 50 мкм. Необходимо отметить, что резонансы, полученные в результате сканирования образца, имеют большую ширину, поскольку в процессе сканирования тейпер помещался в физический контакт с образцом, что приводило к появлению дополнительного рассеяния излучения моды на тейпере, и ухудшения наблюдаемой добротности [20].

3.2. Оптимизация связи. Следующий важный шаг – это настройка силы связи тейпера и резонатора. Она зависит от двух величин. Во-первых, связь определяется перекрытием пространственных распределений моды тейпера и моды резонатора [28], и может подстраиваться либо изменением положения тейпера вдоль оси цилиндра [29], либо добавлением воздушного промежутка между тейпером и микрорезонатором и контролем его величины [28]. Мы использовали второй подход. Для изменения величины зазора тейпер помещается на пьезотранслятор, работающий в режиме с петлей обратной связи с возможностью подстройки зазора с шагом 5 нм.

Во-вторых, связь зависит от степени согласования волновых векторов мод тейпера и резонатора [30]. Величина волнового вектора моды тейпера меняется при смещении вдоль его перетяжки, так как меняется его диаметр. Таким образом, связь меняется при перемещении тейпера, находящегося вблизи образца, вдоль оси тейпера. Мы провели оптимизацию положения тейпера (двигая его вдоль своей оси) и величины зазора между тейпером и микрорезонатором. Спектр пропускания вблизи длины волны первой аксиальной моды измерялся с помощью перестраиваемого одночастотного лазера, фотодетектора и осциллографа, что позволило достичь спектрального разрешения менее 1 МГц. Благодаря оптимизации удалось достичь критической связи δ_c при минимальном влиянии тейпера на собственную добротность моды δ_0. Резонанс для оптимальной настройки соответствовал нагруженной добротности 10^8, см. рис. 3.

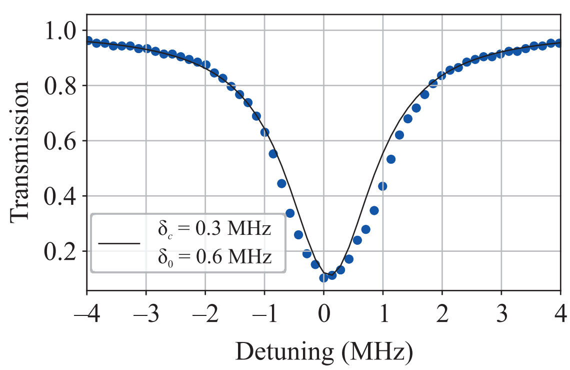

Рис. 3. (Цветной онлайн) Спектр пропускания для резонанса первой аксиальной моды с оптимизированными параметрами связи

Отметим, что собственная добротность $2 \cdot 10^8$ соответствует предельной для кварцевых цилиндрических микрорезонаторов, находящихся в атмосфере с парами воды. Действительно, известно, что на воздухе на поверхность кварца адсорбируется монослой молекул воды, которые имеют заметное поглощение, что ограничивает достижимую добротность [31, с. 290]. Оценка добротности, проведенная по формулам (10.45) и (10.46) из [32] с учетом величины поглощения на длине волны 1.55 мкм [33], толщины адсорбированного слоя воды [34] и поправкой для добротности цилиндрического микрорезонатора [35], составляет $2 \cdot 10^8$. Оценка для пороговой мощности для наблюдения нелинейных эффектов для полученной моды микрорезонатора в соответствии с [36] составила 2 мВт.

4. Генерация ОЧГ. Схема эксперимента для наблюдения генерации ОЧГ показана на рис. 4. Накачка микрорезонатора осуществлялась с помощью перестраиваемого полупроводникового одночастотного лазера Pure Photonics PPCL550. Для контроля спектра пропускания в линейном режиме мощность излучения значительно понижалась с помощью перестраиваемого аттенюатора. После проверки линейных свойств и контроля нагруженной добротности микрорезонатора потери аттенюатора убирались, а излучение лазера усиливалось до величин от 10 до 20 дБм с помощью волоконного эрбиевого усилителя для накачки микрорезонатора. Длина волны лазера в начале эксперимента устанавливалась на коротковолновый край резонанса микрорезонатора, соответствующего первой аксиальной моде, а затем осуществлялась ее перестройка в сторону максимума резонанса.

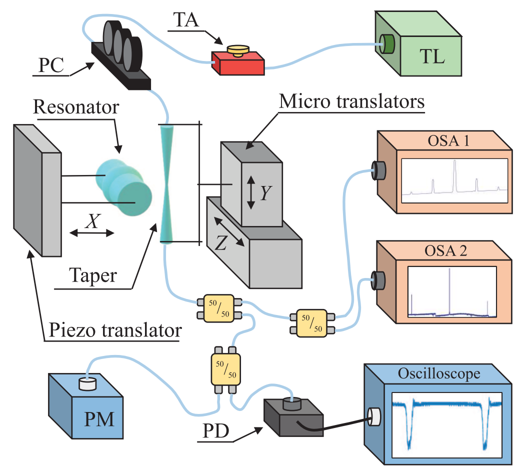

Рис. 4. (Цветной онлайн) Схема эксперимента. TL – перестраиваемый лазер PPCL550; TA – перестраиваемый аттенюатор; PC – контроллер поляризации; OSA 1, 2 – анализаторы оптического спектра; PD – фотодетектор; PM – измеритель мощности

Использование высокой мощности лазерного излучения может приводить к проявлению тепловой нелинейности [37]. Эта нелинейность носит паразитный характер, так как препятствует эффективному возбуждению моды: накачка мощным лазерным излучением вызывает сдвиги длины волны резонанса из-за термооптического эффекта [38]. Для уменьшения вклада этой нелинейности помимо медлен-

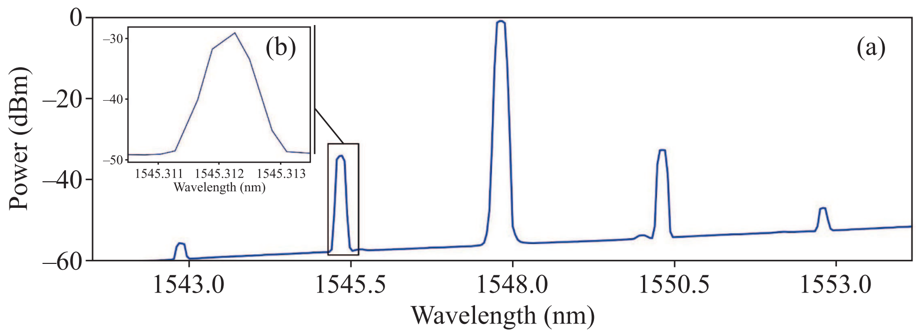

Рис. 5. (Цветной онлайн) (a) – Спектр генерации измеренный с разрешением 0.25 нм; (b) – спектр генерации измеренный с разрешением 1.44 пм

ной перестройки лазера в сторону резонансна осуществлялась быстрая модуляция длины волны лазера: $\lambda(t) = \lambda_0 + A * t + B\sin\omega t$, где $A = 0.1$ пм/с, $B = 1.6$ пм – амплитуда модуляции, $\omega = 100$ кГц – частота модуляции. Быстрая модуляция позволила частично уменьшить вклад тепловой нелинейности, хоть и не позволило достичь максимально возможной амплитуды поля моды внутри микрорезонатора.

Спектр генерации измерялся двумя АОС. Анализатор $\#1$ имеет разрешение 0.2 нм и малое время измерения (менее 0.5 с). Анализатор $\#2$, напротив, имеет высокое разрешение 1.44 пм и большое время измерения (порядка 10 с). Измеритель мощности позволял контролировать мощность, поступающую в АОС и фотодетектор, чтобы избежать их повреждения.

При падении мощности прошедшего через тейпер излучения, которая измерялась с помощью фотодетектора DET08CFC/M и осциллографа, перестройка лазера останавливалась и измерялся спектр генерации с помощью АОС. Генерация ОЧГ была обнаружена при мощности накачки 70 мВт. Если учесть потери в оптической схеме, составляющие 40 %, то пороговая мощность составляет около 40 мВт.

Необходимо отметить, что эта величина оказалась существенно выше теоретической оценки из-за неоптимальной частоты модуляции лазера. При сканировании длины волны лазера с высокой мощностью мы наблюдали нелинейное расширение резонанса. Время его сканирования составило 8×10^{-7} с. Это время сопоставимо со временем накопления энергии в резонаторе – 10^{-6} с. Таким образом длина волны лазера находилась внутри резонанса не столь длительное время, чтобы энергия успела накопиться в резонаторе. Это приводит к тому, что амплитуда поля моды внутри резонатора не вырастает до своего максимального значения в стационарном режиме. А при оценке порога генерации подразумевается, что мощность поля находится в стационарном режиме, т.е. достигает своего максимума. Поэтому, что при модуляции лазера с высокой частотой приходится увеличивать мощность накачки, чтобы компенсировать недостаточный рост амплитуды за малое время накачки. При меньшей скорости сканирования увеличивается влияние тепловой нелинейности: микрорезонатор успевает прогреваться до бóльших температур, увеличиваются температурные сдвиги резонансов, и доступного диапазона перестройки лазера накачки становится недостаточно, чтобы эффективно накачать перестраивающийся в красную область резонанс.

Полученная ОЧГ была не стабильна во времени. Анализатор $\#1$ с разрешением 0.25 нм позволял измерить 4 генерируемые моды при мощности накачки 60 мВт с учетом потерь (см. рис. 5), а анализатор $\#2$ использовался для измерения одного пика с большим разрешением. Однако, этого разрешения также было недостаточно для определения спектральной ширины генерируемой спектральной компоненты. Спектральная отстройка между пиками составляет 2.45 нм, что соответствует области свободной дисперсии резонатора радиусом 106 мкм. Эта величина соответствует заявленному производителем радиусу микрорезонатора.

5. Заключение. В работе продемонстрирована возможность генерации ОЧГ в цилиндрическом микрорезонаторе МШГ, сформированном на поверхности кварцевого оптического волокна. Разработанный подход к изготовлению резонатора, основанный на двухстадийной модификации волокна излучением CO_2-лазера, позволил одновременно обеспечить высокую нагруженную добротность и уменьшить продольный размер локализованной моды. Для полученной структуры была достигнута нагруженная добротность 10^8, что, насколько нам известно, является рекордным значением для микрорезонаторов данного типа. При этом характерный размер локализации моды вдоль оси цилиндра был снижен до

50 мкм, что привело к существенному уменьшению эффективного объема моды.

Совокупность достигнутых параметров резонатора и связи обеспечила значительное снижение порога нелинейных эффектов. Согласно теоретической оценке, порог параметрической генерации для исследуемой моды составляет около 2 мВт. Экспериментально была зарегистрирована генерация ОЧГ на азимутальных модах при пороговой мощности накачки 40 мВт. При мощности накачки 60 мВт наблюдалась генерация нескольких спектральных компонент с частотой повторения 306.25 ГГц.

Финансирование работы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда # 25-12-20020, https://rscf.ru/project/25-12-20020/ и Правительства Новосибирской области

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

---

1. J. L. Hall and J. Ye, "Optical frequency standards and measurement", IEEE Trans. Instrum. Meas. **52**(2), 227 (2003).
2. M. Zajnulina, J. M. C. Boggio, M. Böhm, A. A. Rieznik, T. Fremberg, R. Haynes, and M. M. Roth, "Generation of optical frequency combs via fourwave mixing processes for low-and medium-resolution astronomy", Appl. Phys. B **120**(1), 171 (2015).
3. M. T. Murphy, T. Udem, R. Holzwarth, A. Sizmann, L. Pasquini, C. Araujo-Hauck, H. Dekker, S. D'odorico, M. Fischer, A. M. Hänsch, and A. Manescau, "High-precision wavelength calibration of astronomical spectrographs with laser frequency combs", Mon. Not. R. Astron. Soc. **380**(2), 839 (2007).
4. A. V. Andrianov, and E. A. Anashkina, "Experimental demonstration of Kerr optical frequency comb generation in a tellurite microsphere", Opt. Lett. **48**(7), 1862 (2023).
5. E. A. Anashkina, M. P. Marisova, A. V. Andrianov, R. A. Akhmedzhanov, R. Murnieks, M. D. Tokman, L. Skladova, I. V. Oladyshkin, T. Salgals, and I. Lyashuk, "Microsphere-based optical frequency comb generator for 200 GHz spaced WDM data transmission system", Photonics **7**(3), 72 (2020).
6. D. A. Chermoshentsev, A. E. Shitikov, M. L. Galkin, A. N. Danilin, A. K. Vorobyev, D. M. Sokol, A. V. Masalov, V. E. Lobanov, and I. A. Bilenko, "Generation and Dynamics of Soliton Microcombs in Microring Resonators Pumped by Two Self-Injection-Locked Laser Diodes", Conference on Lasers and Electro-Optics/Pacific Rim (Optica Publishing Group, Washington, D.C. 2024), Tu2D_3.
7. V. E. Lobanov, O. V. Borovkova, A. K. Vorobyev, V. I. Pavlov, D. A. Chermoshentsev, and I. A. Bilenko, "Fragmentation of stability domains of dark solitons, dark breathers, and drifting solitons at high pump intensities in normal-dispersion Kerr microresonators", Phys. Rev. A **109**(3), 033524 (2024).
8. J. Ma, X. Jiang, and M. Xiao, "Kerr frequency combs in large-size, ultra-high-Q toroid microcavities with low repetition rates" Photonics Res. **5**(6), B (2017).
9. N. Y. Dmitriev, A. M. Mumlyakov, M. V. Shibalov, I. V. Trofimov, I. A. Filippov, A. A. Anikanov, M. A. Tarkhov, and I. A. Bilenko, "PECVD-fabricated microresonators for nonlinear photonics", International Conference Laser Optics (ICLO), (IEEE, Piscataway, NJ, 2024), p. 272.
10. "Изготовление кристаллических микрорезонаторов" (МГУ имени М. В. Ломоносова, физический факультет) ["Fabrication of crystalline microresonators" (M. V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics)]; URL: http://osc.phys.msu.ru/upload/4/4c/Fabrication_of _microresonators – 1.pdf.
11. M. Sumetsky and J. M. Fini, "Surface nanoscale axial photonics", Optics Express. bf19(27), 26470 (2011).
12. M. Sumetsky, "A SNAP coupled microresonator delay line", Opt. Express **21**(13), 15268 (2013).
13. M. Sumetsky, "SNAP microwave optical filters", Opt. Lett. **46**(17), 4144 (2021).
14. M. Sumetsky, "Slow light microfluidics: a proposal", arXiv preprint arXiv: 1406.3570 (2014).
15. E. Will, L. Masters, A. Rauschenbeutel, M. Scheucher, and J. Volz, "Coupling a single trapped atom to a whisperinggallery-mode microresonator", Phys. Rev. Lett. **126**(23), 233602 (2021).
16. M. Sumetsky, "Optical bottle microresonators", Progress in Quantum Electronics **64**, 1 (2019).
17. M. Sumetsky, D. J. DiGiovanni, Y. Dulashko, X. Liu, E. M. Monberg, and T. F. Taunay, "Photo-induced SNAP: fabrication, trimming, and tuning of microresonator chains", Opt. Express **20**(10), 10684 (2012).
18. D. Bochek, N. Toropov, I. Vatnik, D. Churkin, and M. Sumetsky, "SNAP microresonators introduced by strong bending of optical fibers", Opt. Lett. **44**(13), 3218 (2019).
19. Q. Yu, Z. Zhang, and X. Shu, "SNAP structures fabricated by profile design of in-fiber inscribed regions with a femtosecond laser", Opt. Lett. **46**(5), 1005 (2021).
20. A. Y. Kolesnikova and I. D. Vatnik, "Theory of nonlinear whispering-gallery-mode dynamics in surface nanoscale axial photonics microresonators", Phys. Rev. A **108**(3), 033506 (2023).
21. E. Eadie, S. Deep, and P. Bianucci, "Azimuthal Kerr combs with predictable mode spacing in surface nanoscale axial photonic microresonators", Opt. Express **33**(16), 34677 (2025).
22. X. Wu and L. Tong, "Optical microfibers and nanofibers", Nanophotonics **2**(5/6), 407 (2013).

23. V. Ahsani, F. Ahmed, M. B. G. Jun, and C. Bradley. “Tapered fiber-optic Mach-Zehnder interferometer for ultra-high sensitivity measurement of refractive index”, Sensors **19**(7), 1652 (2019).
24. D. V. Krisanov, A. S. Nesterok, and I. D. Vatnik, “Shaping optical microresonators on the surface of optical fibers with negative effective radius variations”, IEEE Photonics J. **13**(6), 1 (2021).
25. Q. Yu, Z. Xu, Z. Xu, Y. Wang, H. Li, Q. Miao, H. Li, X. Shu, and L. Lu, Opt. Lett. **49**(5), 1357 (2024).
26. D. Kudashkin, M. Sumetsky, and I. Vatnik, “Fabrication of SNAP structures by wire heating”, Opt. Lett. **49**(15), 4298 (2024).
27. M. Sumetsky and Y. Dulashko, “Radius variation of optical fibers with angstrom accuracy”, Opt. Lett. **35**(23), 4006 (2010).
28. M. Cai, O. Painter, and K. J. Vahala, “Observation of critical coupling in a fiber taper to a silica-microsphere whispering-gallery mode system”, Phys. Rev. Lett. **85**(1), 74 (2000).
29. D. L. P. Vitullo, S. Zaki, D. E. Jones, M. Sumetsky, and M. Brodsky, “Coupling between waveguides and microresonators: the local approach”, Optics Express. **28**(18), 25908 (2020).
30. J. C. Knight, G. Cheung, F. Jacques, and T. A. Birks, “Phase-matched excitation of whispering-gallerymode resonances by a fiber taper”, Opt. Lett. **22**(15), 1129 (1997).
31. М. Л. Городецкий, *Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью* (Физматлит, М., 2011), 416 с. [M. L. Gorodetsky, *Optical microresonators with giant quality factor* (Fizmatlit, Moscow, 2011)].
32. М. Городецкий, *Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью* (ЛитРес, М., 2016) [M. Gorodetsky, *Optical microresonators with giant quality factor* (LitRes, Moscow, 2016)].
33. M. N. Polyanskiy, “Refractive index database” (2026); URL: https://refractiveindex.info.
34. D. Ganta, E. B. Dale, and A. T. Rosenberger, “Measuring sub-nm adsorbed water layer thickness and desorption rate using a fused-silica whisperinggallery microresonator”, Meas. Sci. Technol. **25**(5), 055206 (2014).
35. M. Sumetsky, “Mode localization and the Q-factor of a cylindrical microresonator”, Opt. Lett. **35**(14), 2385 (2010).
36. A. Y. Kolesnikova and I. D. Vatnik, “Nonlinear threshold in cylindrical microresonators with small radius variations in the presence of a disturbing coupler”, Quantum and Nonlinear Optics X, SPIE, Bellingham, WA, 2023), v. 12775, p. 8.
37. A. Novikov, H. Rizk, D. Kudashkin, V. Simonov, A. Kolesnikova, and I. Vatnik, “Modal dispersion in a cylindrical WGM microcavity caused by modal energy dissipation”, Opt. Commun. **583**, 131641 (2025).
38. T. Carmon, L. Yang, and K. J. Vahala, “Dynamical thermal behavior and thermal self-stability of microcavities”, Opt. Express **12**(20), 4742 (2004).