

Локальный квенч в технике Келдыша: учет взаимодействия

Д. В. Лопатин^{+*1)}, А. А. Радовская⁺¹⁾, А. Г. Семенов⁺¹⁾

⁺Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

^{*}Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 марта 2026 г.

После переработки 19 мая 2026 г.

Принята к публикации 10 июня 2026 г.

Данная работа посвящена созданию нового подхода, позволяющего учесть взаимодействие в задаче об эволюции квантового поля после мгновенного локального возмущения (квенча). На примере скалярной теории $g\varphi^4$ показан подход к описанию влияния взаимодействия на динамику полей после квенча в рамках квазиклассического приближения в технике Келдыша. Предложенный подход является непертурбативным по константе связи, справедлив при произвольных начальных условиях, удобен для численного счета. В качестве примера продемонстрировано, как взаимодействие приводит к термализации к новому стационарному состоянию системы, а также к явлению потери когерентности, что выражается в разрушении интерференционной картины, характерной для невзаимодействующего случая.

DOI: 10.7868/S3034576626070208

1. Введение. Изучение эволюции неравновесного квантового поля – это интересная многогранная задача, актуальная во многих областях современной теоретической физики. Одним из способов создать начальные условия для такой задачи является мгновенное внезапное возбуждение равновесной системы – квантовый квенч. В предыдущей работе [1] мы разработали технику описания эволюции квантовой системы после локального квенча для скалярного квантового поля на основе квазиклассического разложения в технике Келдыша. Эта работа была посвящена изучению эволюции невзаимодействующей задачи, в то время как хорошо известно, что взаимодействие может качественно изменить поведение системы [2–5]. Именно оно ответственно за процессы релаксации и термализацию.

В данной работе мы проведем исследование неравновесной динамики квантового поля после мгновенного возбуждения – локального квенча. Эта задача возникла в контексте изучения более общей задачи об эволюции сильновзаимодействующей среды, возникающей после столкновения ультрарелятивистских тяжелых ионов [6]. Для такой задачи характерны как корреляции в начальный момент времени, так и нетривиальная эволюция после столкновения, а также локализация энергии в начальный момент времени в ограниченном объеме пространства. Теоретическое исследование

задачи о локальном квантовом квенче может помочь ухватить основные черты динамики квантового поля после таких столкновений. Кроме того, исследуемая ниже скалярная теория может быть реализована в цепочках джозефсоновских контактов [7] и квантовых симуляторах [8]. В этом случае изменение параметров системы (квенч) может быть реализовано экспериментально [9].

Основной целью данной работы является построение теоретического подхода к описанию взаимодействующей квантовой среды после локального квенча в рамках квазиклассического подхода к технике Келдыша.

План статьи следующий: во втором разделе дается краткое описание квазиклассического подхода в технике Келдыша. В третьем разделе представлена постановка задачи и используемый в работе подход. Четвертый раздел посвящен численному счету и используемым в нем начальным условиям. Также там обсуждаются полученные результаты.

2. Квазиклассический подход в технике Келдыша. Рассмотрим скалярную теорию поля в d -мерном пространстве–времени с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^{d-1}\mathbf{x} \left(\hat{\pi}^2(\mathbf{x}) + (\nabla \hat{\varphi}(\mathbf{x}))^2 + m^2 \hat{\varphi}^2(\mathbf{x}) + \frac{g}{2} \hat{\varphi}^4(\mathbf{x}) \right), \quad (1)$$

где $\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{x})$ – это пара канонически сопряженных переменных

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{y})] = -i\hbar \delta^{(d-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2)$$

¹⁾e-mail: Daniil.Lopatin@skoltech.ru; raan@lpi.ru; semenov@lpi.ru

Будем исследовать динамическую эволюцию системы, задаваемую гамильтонианом (1), из некоторого специально приготовленного начального состояния, определяемого матрицей плотности в начальный момент времени $\hat{\rho}(t_0)$. При помощи техники Келдыша [2, 10, 11] можно показать [1, 12, 13], что в лидирующем по постоянной Планка $\hbar$ приближении среднее от наблюдаемой $\hat{O} = O[\hat{\varphi}]$ дается выражением

$$\langle \hat{O} \rangle_t = \int \mathfrak{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathfrak{D}\Pi(\mathbf{x}) W[\Pi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x})] O[\phi_c(t, \mathbf{x})], \quad (3)$$

где функционал Вигнера $W[\Pi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x})]$ выражается через матрицу плотности системы в начальном состоянии $\hat{\rho}(t_0)$, а значит определяет все свойства системы в начальный момент времени t_0 :

$$W[\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x})] = \int \mathfrak{D}\beta(\mathbf{x}) e^{-i \int d^{d-1} \mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \Pi(\mathbf{x})} \times \\ \times \langle \Phi(\mathbf{x}) + \hbar\beta(\mathbf{x})/2 | \hat{\rho}(t_0) | \Phi(\mathbf{x}) - \hbar\beta(\mathbf{x})/2 \rangle. \quad (4)$$

Функция $\phi_c(t, \mathbf{x})$ является решением классических уравнений движения

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi_c(t, \mathbf{x}) + g\phi_c^3(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (5)$$

с начальными условиями

$$\phi_c(t_0, \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}), \quad \partial_t \phi_c(t_0, \mathbf{x}) = \Pi(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Таким образом, выражение (3) говорит о том, что для того чтобы найти среднее от оператора, нужно взять его значение на классической траектории и усреднить по всем начальным условиям с весом в виде функционала Вигнера. Для такого усреднения мы будем использовать краткое обозначение

$$\int \mathfrak{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathfrak{D}\Pi(\mathbf{x}) W[\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x})](\dots) \equiv \langle \dots \rangle_{i.c.}, \quad (7)$$

тогда среднее (3) можно переписать как

$$\langle O[\hat{\varphi}(\mathbf{x})] \rangle_t = \langle O[\phi_c(t, \mathbf{x})] \rangle_{i.c.} \quad (8)$$

В предыдущих работах [1, 12, 13] было показано, что поскольку квазиклассическое разложение в технике Келдыша построено по параметру $\hbar^2 g$, то для невзаимодействующей системы классическое приближение дает точный ответ.

3. Квантовый квенч. Локальным квенчем [1, 14–16] называется процесс приготовления начального неравновесного состояния системы путем действия некоторого (квази)локального оператора $\hat{Q}(\mathbf{x}_q)$ на исходное состояние. В этом случае начальная матрица плотности системы имеет вид

$$\hat{\rho}(t_0) = \frac{\hat{Q}(\mathbf{x}_q) \hat{\rho}_0 \hat{Q}^\dagger(\mathbf{x}_q)}{\text{tr}(\hat{Q}^\dagger(\mathbf{x}_q) \hat{Q}(\mathbf{x}_q) \hat{\rho}_0)}. \quad (9)$$

Здесь $\hat{\rho}_0$ – это исходная матрица плотности системы до квенча. Если оператор $\hat{Q}(\mathbf{x}_q)$ унитарен, то и квенч называется унитарным²⁾. Именно такой случай мы рассматриваем в данной работе. Пусть оператор квенча имеет следующий вид [1]

$$\hat{Q}(\mathbf{x}_q) = e^{-i \frac{\alpha}{\hbar} V(\hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_q))}, \quad (10)$$

где параметр α описывает величину квенча, а функция $V(\hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_q))$, которая определяет форму возбуждения, зависит только от значения поля, усредненного по некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_q$, таким образом, что $\hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_q) = \int d^{d-1} \mathbf{x} \eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q) \hat{\varphi}(\mathbf{x})$, где $\eta(\mathbf{x})$ – гладкая функция “размытия” (“smearing function”), отличная от нуля лишь в окрестности $|\mathbf{x}| \lesssim \epsilon$.

Локальный квенч качественно отличается от глобального квенча [18–23], при котором происходит мгновенное изменение параметров системы (например, массы или константы связи) однородно во всей системе. В последнем случае в систему вкачивается энергия, пропорциональная объему системы (т.е. фактически бесконечная), и в результате временной эволюции происходит объемная термализация в каждой точке пространства. Это в итоге приводит к новому однородному состоянию системы, в котором плотность энергии отличается от той, что была до квенча. Также при глобальном квенче возбуждаются моды поля со всеми волновыми векторами вплоть до ультрафиолетового масштаба [23]. При локальном квенче в систему добавляется лишь конечная энергия (зависящая от “размытия” ϵ), которая сосредоточена в области размера $\sim \epsilon$. Поскольку в оператор локального квенча входит только $\hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_q)$, то при таком квенче возбуждаются только моды с волновыми векторами $\lesssim \epsilon^{-1}$, что не влияет на ультрафиолетовое поведение теории. С течением времени вкачанная энергия распределяется по всему объему системы, а значит в бесконечной системе итоговое состояние будет с той же плотностью энергии, что и до квенча. В разделе 4 мы обсудим это подробнее.

В предыдущей работе [1] было показано, что для того, чтобы найти среднее от наблюдаемой после действия квенча, нужно провести суммирование по начальным условиям с прежним функционалом Вигнера, но от модифицированной наблюдаемой:

²⁾ Тут следует отметить, что подобные возмущения квантовых систем рассматривались достаточно давно. В частности, в работе [17] такой процесс называется “встряской” типа рассеяния. В то же время квенч, отвечающий изменению параметров системы в ней, называется “встряской” типа включения.

$$\langle \hat{O} \rangle_t^Q = \int \mathfrak{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathfrak{D}\Pi(\mathbf{x}) W[\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x})] \times \\ \times Q\left(\Phi_s, -\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right) O[\phi_c(t, \Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x}))]. \quad (11)$$

Здесь

$$Q\left(\Phi_s, -\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right) = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}\left(V\left(\Phi_s - i\frac{\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right) - V\left(\Phi_s + i\frac{\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right)\right)}, \quad (12)$$

$$\Phi_s = \int d^{d-1}\mathbf{x} \eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q) \Phi(\mathbf{x}), \quad (13)$$

$$\frac{\delta}{\delta\Pi_s} = \int d^{d-1}\mathbf{x} \eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q) \frac{\delta}{\delta\Pi(\mathbf{x})}. \quad (14)$$

Поскольку в работе [1] исследовалась невзаимодействующая теория, то это позволило решить уравнения движения аналитически, усреднить по начальным условиям и показать, что ответы, полученные при помощи данного подхода, полностью согласуются с результатами, полученными ранее в рамках конформной теории поля (см. подробности в дополнительных материалах к работе [1]).

В данной работе мы исследуем взаимодействующую теорию, и поэтому аналитическое решение классических уравнений движения для произвольных начальных условий недоступно, и эти уравнения необходимо решать численно. Также, для того чтобы найти наблюдаемую, необходимо знать зависимость решения от начальных условий, поскольку в ответ входят вариационные производные по ним. Однако в рассматриваемом нами случае (унитарный квенч) есть возможность обойти необходимость вычисления вариаций по начальным условиям.

Рассмотрим конкретные примеры унитарного квенча подробнее. Посчитаем оператор $Q\left(\Phi_s, -\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right)$ (12) для физически интересных случаев [1, 22]

$$V(\varphi) = \varphi: \quad Q\left(\Phi_s, -\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right) = e^{-\alpha\frac{\delta}{\delta\Pi_s(\mathbf{x}_q)}}, \quad (15)$$

$$V(\varphi) = \varphi^2: \quad Q\left(\Phi_s, -\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right) = e^{-2\alpha\Phi_s(\mathbf{x}_q)\frac{\delta}{\delta\Pi_s(\mathbf{x}_q)}}, \quad (16)$$

$$V(\varphi) = \varphi^3: \quad Q\left(\Phi_s, -\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right) = \\ = e^{-3\alpha\Phi_s^2(\mathbf{x}_q)\frac{\delta}{\delta\Pi_s(\mathbf{x}_q)} + \frac{\alpha\hbar^2}{4}\frac{\delta^3}{\delta\Pi_s^3(\mathbf{x}_q)}}. \quad (17)$$

Можно заметить, что выражение для $Q\left(\Phi_s, -\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right)$ содержит бесконечно много функциональных производных. Однако с точностью до $\hbar^2$ оператор

$Q\left(\Phi_s, -\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right)$ представляет собой оператор сдвига начальных условий. Иными словами, если мы введем

$$\phi_c^V(t, \mathbf{x}) \equiv e^{-\alpha V'(\Phi_s(\mathbf{x}_q))\frac{\delta}{\delta\Pi_s(\mathbf{x}_q)}} \phi_c(t, \mathbf{x}), \quad (18)$$

то данная величина удовлетворяет классическому уравнению движения $A[\phi_c^V(t, \mathbf{x})] = 0$, но с измененным начальным условием для производной

$$\partial_t \phi_c^V(t_0, \mathbf{x}) = \Pi(\mathbf{x}) - \alpha V'(\Phi_s(\mathbf{x}_q)) \eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q). \quad (19)$$

Таким образом, для вычисления средних после квенча достаточно использовать модифицированные начальные условия.

Рецепт для вычисления среднего от наблюдаемой величины после квенча для взаимодействующей системы следующий: найти решение классических уравнений движения, посчитать наблюдаемую на этих траекториях и усреднить по начальным условиям, сдвигая их согласно правилу (19):

$$\langle \hat{O} \rangle_t^Q = \int \mathfrak{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathfrak{D}\Pi(\mathbf{x}) W[\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x})] \times \\ \times O[\phi_c(t, \Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x}) - \alpha V'(\Phi_s(\mathbf{x}_q)) \eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q))]. \quad (20)$$

Данное соотношение является общим и применимо при произвольных исходных состояниях системы.

Оценим применимость предложенного метода. Используемый подход по своей сути является квазиклассическим (основанным на разложении по постоянной Планка $\hbar$). Для того чтобы понять область его применимости, необходимо вычислить следующие поправки к нему [13]. Однако из предыдущих работ [12, 13, 24] известно, что этот подход работает, когда среда после квенча сильно возбуждена, а соответствующие числа заполнения одночастичных состояний велики.

Оценим энергию, которая закачивается в систему в процессе квенча. Для этого необходимо вычислить среднее значение от полной энергии. Плотность энергии в данном случае имеет стандартный вид

$$\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left((\partial_t \varphi(t, \mathbf{x}))^2 + (\nabla \varphi(t, \mathbf{x}))^2 + \right. \\ \left. + m^2 \varphi^2(t, \mathbf{x}) + \frac{g}{2} \varphi^4(t, \mathbf{x}) \right). \quad (21)$$

Используя (11) и (20), получим, что сразу после квенча

$$\varepsilon(t_0, \mathbf{x}) = \varepsilon_0 - \alpha \langle \Pi(\mathbf{x}) V'(\Phi_s) \rangle_{i.c.} \eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q) + \\ + \frac{1}{2} \alpha^2 \langle V'(\Phi_s) V'(\Phi_s) \rangle_{i.c.} \eta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q), \quad (22)$$

где ε_0 – плотность энергии в системе до квенча. В случае, когда $W[\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x})] = W[\Phi(\mathbf{x}), -\Pi(\mathbf{x})]$ (что выполняется в большинстве физически реализуемых ситуациях) среднее $\langle \Pi(\mathbf{x}) V'(\Phi_s) \rangle_{i.c.} = 0$. Тогда полная энергия, закачанная в систему в результате квенча, равна

$$\delta E = \frac{1}{2} \alpha^2 \langle V'(\Phi_s) V'(\Phi_s) \rangle_{i.c.} \int d^{d-1} \mathbf{x} \eta^2(\mathbf{x}). \quad (23)$$

В случае, когда δE много больше всех характерных масштабов задачи, таких как, например, масса одного возбуждения $\sim \hbar m$, можно ожидать, что в результате квенча произойдет сильное возбуждение системы и используемый нами квазиклассический подход будет применим. Следует отметить, что при малой ширине функции размытия ϵ входящий в данное выражение интеграл $\int d^{d-1} \mathbf{x} \eta^2(\mathbf{x}) \sim 1/\epsilon^{d-1}$, а значит при $\epsilon \rightarrow 0$ можно ожидать, что квазиклассический подход работает хорошо. Например, в $1+1$ мерной системе, когда происходит квенч с $V(\varphi) = \varphi^2/2$, входящий в (23) коррелятор $\langle V'(\Phi_s) V'(\Phi_s) \rangle_{i.c.} \sim -\hbar \log(\epsilon m)$ при низкой температуре и $\epsilon m \gg 1$. Это значит, что

$$\delta E \sim \frac{\alpha^2 \hbar}{\epsilon} \log\left(\frac{1}{\epsilon m}\right). \quad (24)$$

Таким образом, следует ожидать, что развитый в статье подход будет применим при

$$\alpha^2 \gg \frac{\epsilon m}{\log\left(\frac{1}{\epsilon m}\right)}. \quad (25)$$

Подчеркнем, однако, что это условие является достаточным, но не обязательно необходимым. В отсутствие взаимодействия развитый подход применим при любых соотношениях между параметрами, а детальную оценку области применимости при наличии взаимодействия следует проводить в каждом конкретном случае отдельно.

4. Численный расчет методом Монте-Карло.

В качестве примера исследуем при помощи описанного выше подхода $1+1$ мерную скалярную теорию поля со взаимодействием численно. Для этого воспользуемся методом Монте-Карло. Будем случайно генерировать всевозможные начальные условия с распределением, задаваемым соответствующим вигнеровским функционалом, и численно решать для этих начальных условий уравнения движения. Усреднение по большому множеству сгенерированных начальных условий эффективно отвечает вычислению функционального интеграла в формулах (3) или (20). Но прежде чем говорить о деталях численного счета, обсудим начальные условия.

Начальные условия. В численном счете мы будем использовать гауссовы начальные условия, т.е. такие, что соответствующий функционал Вигнера гауссов. Примером такого исходного состояния является тепловое для невзаимодействующей системы. Фактически, в этом случае в системе происходит два квенча – глобальный, связанный с включением взаимодействия, и локальный, отвечающий за сильное возбуждение системы. Однако использование гауссовых начальных условий оправдано и в более общем случае. На практике это означает отбрасывание неприводимых корреляционных функций старшего порядка [25] в исходный момент времени, которые малы на фоне тех корреляций, что создает локальный квенч, сильно возбуждающий среду.

Итак, пусть в начальный момент времени до квенча функционал Вигнера гауссов. Это означает, что он полностью определяется своими средними значениями и парным коррелятором. Рассмотрим случай $\langle \Phi(\mathbf{x}) \rangle_{i.c.} = 0$, $\langle \Pi(\mathbf{x}) \rangle_{i.c.} = 0$. Используя определение вигнеровского функционала, можно связать парные корреляционные функции со средними от операторов с матрицей плотности, а именно,

$$\langle \Phi(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{y}) \rangle_{i.c.} = \text{tr}(\hat{\varphi}(\mathbf{x}) \hat{\varphi}(\mathbf{y}) \hat{\rho}_0), \quad (26)$$

$$\langle \Pi(\mathbf{x}) \Pi(\mathbf{y}) \rangle_{i.c.} = \text{tr}(\hat{\pi}(\mathbf{x}) \hat{\pi}(\mathbf{y}) \hat{\rho}_0), \quad (27)$$

$$\langle \Phi(\mathbf{x}) \Pi(\mathbf{y}) \rangle_{i.c.} = \frac{1}{2} \text{tr}(\{\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})\} \hat{\rho}_0). \quad (28)$$

Введем стандартным образом операторы рождения и уничтожения ($\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$):

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}}{(2\pi)^{d-1}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \right), \quad (29)$$

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}) = -i \int \frac{d^{d-1} \mathbf{p}}{(2\pi)^{d-1}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} - \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \right) \quad (30)$$

и предположим, что состояние системы трансляционно инвариантно и в ней отсутствуют недиагональные корреляции

$$\text{tr}(\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{\rho}_0) = 0,$$

$$\text{tr}(\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{\rho}_0) = (2\pi)^{d-1} \delta^{d-1}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) f_{\mathbf{p}}. \quad (31)$$

Здесь $f_{\mathbf{p}}$ – это функция распределения частиц скалярного поля в начальный момент времени. Если система изначально находилась в тепловом состоянии невзаимодействующей системы при температуре T , то $f_{\mathbf{p}}$ имеет стандартный бозевский вид $f_{\mathbf{p}} = (e^{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{p}}}{T}} - 1)^{-1}$. При наличии взаимодействия данная

функция распределения будет зависеть от константы связи и иметь более сложный вид. Подставляя средние от операторов рождения/уничтожения, получим, что

$$\langle \Phi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y}) \rangle_{i.c.} = \hbar \int \frac{d^{d-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\omega_{\mathbf{p}}} \left(f_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right), \quad (32)$$

$$\langle \Pi(\mathbf{x})\Pi(\mathbf{y}) \rangle_{i.c.} = \hbar \int \frac{d^{d-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^{d-1}} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \omega_{\mathbf{p}} \left(f_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right), \quad (33)$$

в то время как перекрестное среднее равно нулю.

В численном счете мы будем использовать гауссовы начальные условия, которые отвечают тому, что до квенча система находилась в стационарном состоянии невзаимодействующей системы ($g = 0$). Однако при наличии взаимодействия такое состояние не является равновесным. А значит, у системы будет нетривиальное динамическое поведение даже в отсутствие квенча, поскольку в первые моменты времени система будет термализовываться к новому состоянию равновесия. В принципе, данный недостаток может быть исправлен путем разнесения исходного момента времени и момента, когда происходит локальный квенч, для того чтобы дать системе термализоваться к этому моменту. Нами было проверено, что в силу того, что квенч сильно возбуждает среду, никаких качественно новых эффектов в динамике системы после квенча такое разнесение времен не дает.

Численный расчет методом Монте-Карло. Для удобства численного счета рассмотрим систему размера L с периодическими граничными условиями. Это означает, что в выражениях (29), (30), (32), (33) интегрирование по импульсам следует заменить на суммирование по дискретному набору $\int \frac{dp}{2\pi} \dots \rightarrow \rightarrow \frac{1}{L} \sum_p$, где $p = 2\pi n/L$ и n – целое число. Для простоты будем рассматривать квенч вида (10) с $V(\varphi) = \varphi^2/2$. В качестве наблюдаемой выберем плотность энергии, даваемую выражением (21).

В процессе численного счета возникает следующий вопрос. Хорошо известно, что даже в такой простой теории ($g\varphi^4$ теория в $1+1$ измерениях) существует расходимость, которая приводит к перенормировке массы [26, 27]. Она должна каким-то образом проявляться и в рамках используемого нами подхода к описанию неравновесной динамики квантовых полей. В общем виде данный вопрос требует отдельного исследования, однако в рассматриваемом нами случае можно заметить следующее. В классическом уравнении движения

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi_c(t, x) + g\phi_c^3(t, x) = 0 \quad (34)$$

присутствует произведение полей в совпадающих точках, которое может являться источником проблем. Давайте усредним данное уравнение движения и расцепим кубические корреляции через приближение типа среднего поля $\langle \phi_c^3(t, x) \rangle_{i.c.} \approx \langle \phi_c^2(t, x) \rangle_{i.c.}^3 + 3\langle \phi_c(t, x) \rangle_{i.c.} \langle \phi_c^2(t, x) \rangle_{i.c.}$. Тогда приближенно получим

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2 + 3g\langle \phi_c^2(t, x) \rangle_{i.c.})\langle \phi_c(t, x) \rangle_{i.c.} + g\langle \phi_c(t, x) \rangle_{i.c.}^3 \approx 0.$$

Если же мы обратимся к исходному моменту времени, то заметим, что при $t = t_0$

$$\langle \phi_c^2(t_0, x) \rangle_{i.c.} = \langle \Phi^2(x) \rangle_{i.c.} = \frac{\hbar}{L} \sum_p \frac{2f_p + 1}{2\omega_p}. \quad (35)$$

Данная сумма (и интеграл в случае бесконечной прямой) ультрафиолетово расходится. Это и есть проявление той самой расходимости, что возникает при вычислении пропагатора в стандартной фейнмановской диаграммной технике [26, 27]. Она может быть устранена введением контрчлена

$$\delta m^2 = -\frac{3g\hbar}{L} \sum_p \frac{1}{2\omega_p}. \quad (36)$$

Также данную процедуру можно рассматривать как проведение операции нормального упорядочения исходного гамильтониана по отношению к вакууму невзаимодействующей теории [5, 26]. Безусловно, при численном решении уравнений движения всегда вводится дискретизация пространства, а значит, в системе неявно присутствует ультрафиолетовый масштаб порядка обратного шага решетки, который делает все величины конечными. Более того, в $1+1$ мерном случае, который нами исследуется, данная расходимость логарифмическая, а значит слабо влияет на численный счет. Тем не менее, введение контрчлена делает процедуру вычислений осмысленной и снимает зависимость физических ответов от шага решетки дискретизации. Более того, поскольку, как было отмечено выше, локальный квенч не влияет на ультрафиолетовое поведение системы (поскольку возбуждает только моды с волновыми векторами $\lesssim \epsilon^{-1}$), то используемой процедуры достаточно для того, чтобы избавиться от всех расходимостей (точнее зависимости от ультрафиолетового масштаба). Нами было проверено численно, что получающиеся в результате вычислений ответы не зависят от выбранного шага решетки.

В данной работе для численного решения клас-

сических уравнений движения использовалась схема дискретизации Штрауса и Васкеза [28]. В работе [29] было показано, что данная схема решения уравнения Клейна–Гордона сохраняет полную энергию и является наиболее устойчивой при произвольных начальных условиях.

На рисунке 1 изображены численные результаты для плотности энергии в различные моменты времени после квенча. Также на этом рисунке показаны аналитические кривые для плотности энергии сразу после квенча (22) и ее асимптотическое значение. Видно, что численная кривая хорошо ложится на аналитическую в начальный момент времени, и для больших времен решение стремится к новому значению плотности энергии, к которому система приходит в результате процесса термализации. На рисунках 2 и 3 показана эволюция плотности энергии со временем для различных значений безразмерной константы связи $g/(4m^2)$ при низкой и высокой температурах соответственно.

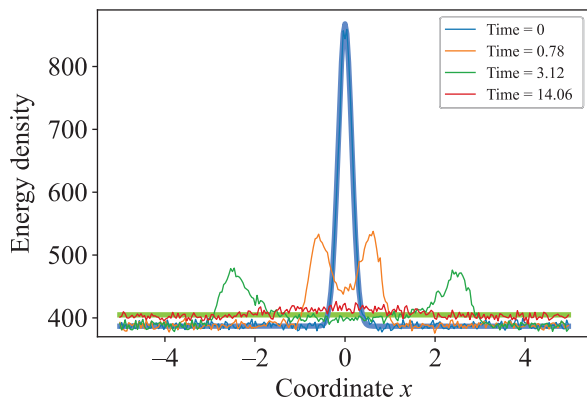


Рис. 1. (Цветной онлайн) Пример моделирования плотности энергии после квенча методом Монте-Карло при $m = 3.0$, $g/(4m^2) = 2.78$, $T = 0.5$ для различных моментов времени (тонкие линии). Также на рисунке изображено аналитическое выражение (22) для начальной плотности энергии при $t = t_0 = 0$ и асимптотическое ее значение при $t \rightarrow \infty$ (толстые линии). Параметры квенча $\alpha = 40.0$, $\eta(x) = e^{-(x/\epsilon)^2}/\sqrt{\pi\epsilon^2}$, где $\epsilon = 0.3$

Результаты численного моделирования позволяют проследить различие между динамикой свободной теории и теории со взаимодействием. В отсутствие взаимодействия квазиклассическое приближение является точным, и у задачи может быть найдено явное решение (см. [1]). Тогда в результате локального квенча создается возмущение, которое можно представить себе как суперпозицию многочастичных состояний, в которой каждая частица движется со своей групповой скоростью. Поскольку для массивной частицы групповая скорость зависит от импуль-

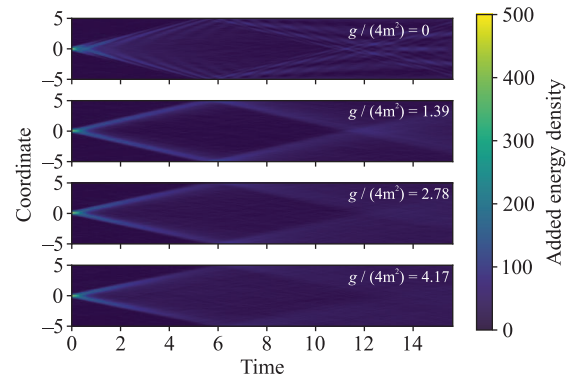


Рис. 2. (Цветной онлайн) Эволюция плотности энергии со временем для различных значений безразмерной константы связи $g/(4m^2)$ при низкой температуре $T = 0.5$. Параметры системы указаны на рис. 1

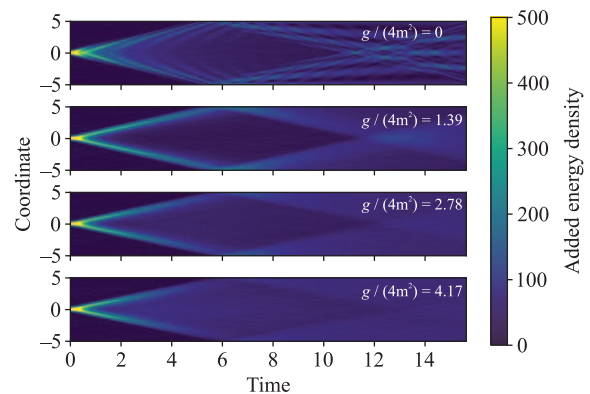


Рис. 3. (Цветной онлайн) Эволюция плотности энергии со временем для различных значений безразмерной константы связи $g/(4m^2)$ при высокой температуре $T = 5.0$. Параметры системы указаны на рис. 1

са, то созданное в результате квенча возмущение не только движется от точки квенча, но и расплывается со временем. В итоге мы наблюдаем размывающийся конус. Кроме этого, напомним, что при численном счете мы рассматривали систему с периодическими граничными условиями размера L . За время порядка $L/2$ возмущение проходит систему насквозь и интерферирует само с собой, что приводит к интересной интерференционной картине, которую можно наблюдать на верхних картинках рис. 2 и 3. С этой точки зрения использование периодических граничных условий позволяет не только упростить численный счет, но и открывает возможность для исследования влияния взаимодействия на квантовые интерференционные эффекты. Включение взаимодействия качественно меняет картину поведения системы. Во-первых, в этом случае происходит процесс декогерентности, что выражается в разрушении интерференционной картины. Во-вторых, при ненулевой

константе связи g возмущение плотности энергии затухает со временем, что говорит о наличии диссипации, вызванной взаимодействием. Причем чем больше константа связи, тем быстрее происходит релаксация в системе, в результате которой система переходит в новое равновесное состояние. Тут следует отметить, что плотность энергии в системе до квенча и равновесная плотность энергии на больших временах не совпадают в силу конечности размера системы L . Их разность равна $\delta E/L$, δE – это энергия, вкачанная в систему в результате квенча (см. выражение (23)). В случае, когда размер системы бесконечен ($L \rightarrow \infty$), эта разность стремится к нулю. Иными словами, вкачанная в систему энергия со временем равномерно распределяется по всему объему, и в случае бесконечного объема добавка к плотности будет равна нулю. Но это не означает, что новое равновесное состояние будет таким же, каким оно было до квенча. Поскольку система замкнута и у нее есть сохраняющаяся величина – энергия – то при эволюции системы распределение по энергиям сохраняется. Это означает, например, что в строгом смысле матрица плотности системы даже на больших временах никогда не будет тепловой. Это рассуждение справедливо и в рассматриваемом тут квазиклассическом пределе, поскольку у динамики также есть сохраняющаяся классическая энергия [30]. Однако, согласно гипотезе о термализации собственных состояний (*eigenstate thermalization hypothesis*, ЭТН) [31], с точки зрения средних значений от локальных величин, таких как рассматриваемая нами плотность энергии, система будет вести себя как тепловая с некоторой температурой T^* , которую можно найти из уравнения состояния $\langle \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle_{T^*} = \varepsilon_0 + \delta E/L$. Здесь $\langle \dots \rangle_{T^*}$ означает усреднение с тепловой матрицей плотности $\sim e^{-\hat{H}/T^*}$. К сожалению, для проверки этой гипотезы в рассматриваемом нами случае необходимо знать уравнение состояния для сильно-взаимодействующей среды, что является отдельной сложной задачей, не имеющей простого решения, и которая выходит за рамки данной работы. На наш взгляд, исследование данного состояния может быть интересным направлением исследований на будущее.

В заключение скажем пару слов о влиянии температуры исходного состояния на квенч. Из рисунков 2 и 3 видно, что отличие лишь в амплитуде возмущения, но не в эволюции со временем. Разницу в амплитудах можно объяснить бозевским эффектом, когда вероятность возбуждения зависит от чисел заполнения. В то же самое время в результате квенча происходит достаточно сильное возмущение системы и рождается много (квази)частиц, а поэтому те час-

тицы, что уже присутствовали в системе вследствие тепловых эффектов, практически не влияют на динамику системы. Таким образом, с точки зрения исследования динамики системы, точный вид выбранного исходного состояния не так важен.

5. Заключение. В работе была рассмотрена задача об эволюции взаимодействующей квантовой системы после локального квантового возмущения (квенча) с использованием квазиклассического подхода в рамках техники Келдыша. Было показано, что данную задачу можно свести к усреднению решений классических уравнений движения по всевозможным начальным условиям с весом, определяющимся функционалом Вигнера исходного состояния. При этом для учета локального возмущения в начальный момент времени необходимо определенным образом модифицировать начальные условия, с которыми решается соответствующее уравнение движения. В качестве примера была исследована эволюция скалярной теории $g\varphi^4$ после унитарного квантового квенча, описываемого оператором $\hat{Q}(\mathbf{x}_q) = e^{-i\frac{g}{2\hbar}\hat{\varphi}_s^2(\mathbf{x}_q)}$. Путем численного вычисления соответствующего функционального интеграла по начальным условиям методом Монте-Карло было явно продемонстрировано, как взаимодействие приводит к термализации к новому равновесному состоянию системы, а также к явлению потери когерентности, что выражается в разрушении интерференционной картины, характерной для невзаимодействующего случая.

Авторы выражают благодарность А. Г. Михайленко, Д. И. Садекову и В. В. Лосякову за плодотворные обсуждения.

Финансирование работы. Данная работа поддержана грантом Российского научного фонда (грант # 25-22-00832).

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. А. А. Радовская, А. Г. Семенов, “Локальный квенч в технике Келдыша”, Письма в ЖЭТФ **118**, 921 (2023) [A. A. Radovskaya and A. G. Semenov, “Local quench within the Keldysh technique”, JETP Lett. **118**, 922 (2023)].
2. П. И. Арсеев, “О диаграммной технике для неравновесных систем: вывод, некоторые особенности и некоторые применения”, УФН **185**, 1271 (2015) [P. I. Arseev, “On the nonequilibrium diagram technique: derivation, some features, and applications”, Phys.-Uspekhi **58**, 1159 (2015)].
3. S. Sotiriadis and J. Cardy, “Quantum quench in interacting field theory: A self-consistent

- approximation”, Phys. Rev. B **81**, 134305 (2010).
4. D. Horvath, S. Sotiriadis, M. Kormos, and G. Takacs, “Inhomogeneous quantum quenches in the sine-Gordon theory”, SciPost Phys. **12**, 144 (2022).
 5. D. Szász-Schagrin, I. Lovas, and G. Takács, “Quantum quenches in an interacting field theory: Full quantum evolution versus semiclassical approximations”, Phys. Rev. B **105**, 014305 (2022).
 6. F. Gelis, “Some aspects of the theory of heavy ion collisions”, Rep. Prog. Phys. **84**, 056301 (2021).
 7. A. V. Bubis, L. Vigliotti, M. Serbyn, and A. P. Higginbotham, “Non-equilibrium plasmon liquid in a Josephson junction chain”, Sci. Adv. **12**, eady7222 (2026).
 8. A. Hardy, P. Mukhopadhyay, M. Sohaib Alam, R. Konik, L. Hormozi, E. Rieffel, S. Hadfield, J. Barata, R. Venugopalan, D. E. Kharzeev, and N. Wiebe, “Scattering Processes from Quantum Simulation Algorithms for Scalar Field Theories”, PRX Quantum **7**(1), 010343 (2026).
 9. M. Tajik, M. Gluza, N. Sebe, P. Schüttelkopf, F. Cataldini, J. Sabino, F. Möller, Si-Cong Ji, S. Erne, G. Guarnieri, S. Sotiriadis, J. Eisert, and J. Schmiedmayer, “Experimental observation of curved light-cones in a quantum field simulator”, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **120**, e2301287120 (2023).
 10. Л. В. Келдыш, “Диаграммная техника для неравновесных процессов”, ЖЭТФ **47**, 1515 (1964) [L. V. Keldysh, “Diagram Technique for Nonequilibrium Processes”, Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965)].
 11. J. Schwinger, “Brownian motion of a quantum oscillator”, J. Math. Phys. **3**, 2 (1961).
 12. A. V. Leonidov and A. A. Radovskaya, “Quantum corrections to the classical statistical approximation for the expanding quantum field”, Eur. Phys. J. C **79**, 55 (2019).
 13. A. A. Radovskaya and A. G. Semenov, “Semiclassical approximation meets Keldysh–Schwinger diagrammatic technique: scalar φ^4 ”, Eur. Phys. J. C **81**, 704 (2021).
 14. D. S. Ageev, A. I. Belokon, and V. V. Pushkarev, “From locality to irregularity: introducing local quenches in massive scalar field theory”, JHEP **2023**, 188 (2023).
 15. M. Nozaki, T. Numasawa, and T. Takayanagi, “Quantum entanglement of local operators in conformal field theories”, Phys. Rev. Lett. **112**, 111602 (2014).
 16. M. Nozaki, “Notes on quantum entanglement of local operators”, JHEP **2014**, 147 (2014).
 17. А. М. Дыхне, Г. Л. Юдин, “Встряхивание” квантовой системы и характер стимулированных им переходов”, УФН **125**, 377 (1978) [A. M. Dykhne and G. L. Yudin, “Jarring’ of a quantum system and the corresponding stimulated transitions”, Sov. Phys.-Uspekhi **21**, 549 (1978)].
 18. P. Calabrese and J. Cardy, “Quantum quenches in extended systems”, J. Stat. Mech. **2007**, P06008 (2007).
 19. S. Sotiriadis, P. Calabrese, and J. Cardy, “Quantum quench from a thermal initial state”, Europhys. Lett. **87**, 20002 (2009).
 20. P. Calabrese and J. Cardy, “Quantum quenches in 1+1 dimensional conformal field theories”, J. Stat. Mech. **2016**, 064003 (2016).
 21. G. Delfino and M. Sorba, “Persistent oscillations after quantum quenches in d dimensions”, Nucl. Phys. B **974**, 115643 (2022).
 22. I. A. Belkovich, D. Sadekov, and G. S. Zverev, “Global quenches and correlator dynamics in de Sitter space”, Phys. Rev. D **113**, 065027 (2026).
 23. S. R. Das, D. A. Galante, and R. C. Myers, “Smooth and fast versus instantaneous quenches in quantum field theory”, JHEP **2015**, 73 (2015).
 24. A. V. Leonidov and A. A. Radovskaya, “On formation of equation of state of evolving quantum field”, Письма в ЖЭТФ **101**, 235 (2015) [A. V. Leonidov and A. A. Radovskaya, “On formation of equation of state of evolving quantum field”, JETP Lett. **101**, 215 (2015)].
 25. А. Г. Михайленко, А. Г. Семенов, “Диаграммная техника Келдыша с негауссовыми начальными корреляциями”, ТМФ **227**, 143 (2026) [A. G. Semenov and A. G. Mikhaylenko, “Keldysh diagram technique with non-Gaussian initial correlations”, Theoret. and Math. Phys. **227**, 680 (2026)].
 26. G. Mussardo, *Statistical field theory: an introduction to exactly solved models in statistical physics* (Oxford University Press, N.Y., USA, 2010).
 27. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Квантовые поля*, 5-е изд. (Физматлит, М., 2005) [N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Quantum Fields* (Addison–Wesley, London, 1983)].
 28. W. Strauss and L. Vazquez, “Numerical solution of a nonlinear Klein–Gordon equation”, J. Comp. Phys. **28**, 271 (1978).
 29. S. Jiménez and L. Vázquez, “Analysis of four numerical schemes for a nonlinear Klein–Gordon equation”, Appl. Math. Comput. **35**, 61 (1990).
 30. А. А. Радовская, А. Г. Семенов, “Сдвиговая вязкость в неравновесной скалярной теории поля”, Физика элементарных частиц и атомного ядра **52**, 891 (2021) [A. A. Radovskaya and A. G. Semenov, “Shear Viscosity of Nonequilibrium Scalar Field Theory”, Physics of Particles and Nuclei **52**, 564 (2021)].
 31. L. D’Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, “From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics”, Adv. Phys. **65**, 239 (2016).