

Лазероуправляемые поляризационные эффекты при генерации высоких гармоник на нульмерных наноструктурах

А. Г. Казарян¹⁾, Х. В. Седракян

Центр физики сильных полей Института физики, Ереванский государственный университет, 0025 Ереван, Армения

Поступила в редакцию 2 июня 2026 г.

После переработки 21 июня 2026 г.

Принята к публикации 30 июня 2026 г.

Мы изучили лазероуправляемые эффекты поляризации при генерации высоких гармоник в графеновых квантовых точках, возбуждаемых интенсивными эллиптически поляризованными лазерными полями, используя приближение сильной связи. Состояние поляризации излучаемых гармоник, включая эллиптичность и ориентацию эллипса, характеризуется параметрами Стокса. Мы показали, что эллиптически поляризованные возбуждающие поля могут генерировать гармоники с линейной и эллиптической поляризацией и, наоборот, что гармоники с контролируемой эллиптичностью могут возникать из линейно поляризованного возбуждения. Наши численные результаты показали, что поляризацию гармоник можно эффективно регулировать, изменяя поляризацию возбуждающего лазерного поля, без необходимости использования дополнительных элементов управления.

DOI: 10.7868/S3034576626080033

Введение. Генерация высоких гармоник (ГВГ) – это крайне нелинейный оптический процесс [1–3], позволяющий получить лазерный свет на длинах волн от жесткого ультрафиолетового до мягкого рентгеновского излучения [4]. В последнее десятилетие изучение нелинейных электромагнитных (ЭМ) свойств конденсированных веществ в процессах нелинейной ГВГ, многофотонного рассеяния и поглощения в сильных лазерных полях в двумерных (2D) материалах, включая графен [5–11] и дихалькогениды переходных металлов [12], привлекло внимание благодаря своим экстремальным оптическим и электронным свойствам по сравнению с трехмерными (3D) твердыми телами [13]: низкоразмерные наноструктуры, такие как графеновые квантовые точки (ГКТ) [14], фуллерены [15–18], наноленты [19] и одномерные квазикристаллы [20]. Варьирование боковой формы, размера и типа краев ГКТ позволяет регулировать ширину запрещенной зоны, что делает их более подходящими в качестве нелинейных оптических систем [21, 22] по сравнению с бесщелевым объемным графеном [5, 10, 11]. Численные исследования процесса ГВГ в гексагональных [23], треугольных [14, 24], прямоугольных [25, 26], и ромбовидных [27] ГКТ демонстрируют экстремальные физические свойства.

Излучение высоких гармоник в газах с частотами, кратными основной частоте лазера, в линей-

но поляризованном лазерном поле, является линейно поляризованным. Увеличение эллиптичности импульса накачки приводит к генерации эллиптически поляризованного света, но эффективность процесса ГВГ быстро снижается [28–32]. Со времени открытия ГВГ циркулярной поляризации [33] разработано несколько экспериментальных методов генерации высоких циркулярно или эллиптически поляризованных гармоник [34–42] и теоретических или численных исследований [38, 43, 44]. ГВГ в случае эллиптической поляризации ЭМ поля накачки полезно для ряда исследований, включая молекулярную хиральность в субфемтосекундном временном масштабе [45], круговой дихроизм и магнитные взаимодействия [34, 40, 41, 46, 47]. Это открывает возможность управления сильным взаимодействием лазерного поля с твердыми телами и является путем для управления когерентными методами аттофизики, включая спектроскопию, и может стать подходящим методом для управления когерентными процессами на поверхностях, включая жесткий ультрафиолетовый и мягкий рентгеновский спектральные области [6, 48]. Кроме того, спектроскопия высоких гармоник, сверхбыстрая полностью оптическая методика, первоначально разработанная для атомных и молекулярных систем, в настоящее время стала мощным методом изучения структуры и динамики конденсированного вещества в эллиптически поляризованных лазерных полях. Преимуществом спектроскопии высоких гармоник перед другими спектро-

¹⁾e-mail: amarkos@ysu.am

скопическими методами является ее способность исследовать сверхбыстрые явления путем регистрации фемтосекундной и аттосекундной динамики многополосных и сильно коррелированных электронных взаимодействий в твердых телах [49]. Следует отметить, что эллиптическая поляризация позволяет использовать схемы стробирования, включая поляризационное стробирование и двойное оптическое стробирование, для генерации аттосекундных рентгеновских импульсов, которые могут быть использованы для изучения динамики электронов в атомах, молекулах и твердых телах [50, 51]. В работах [52, 53] было показано, что интенсивность высших гармоник становится чувствительной к эллиптичности воздействующего оптического ЭМ поля по мере приближения к круговой поляризации. Некоторые высокие гармоники сильно подавляются для лазерных полей с круговой поляризацией.

Таким образом, эллиптическая поляризация лазерного поля выявила множество интересных физических явлений в газах. Однако взаимодействие таких импульсов с твердотельными наносистемами остается в значительной степени неизученным, что затрудняет применение экспериментальных методов к твердотельным устройствам. Поэтому изучение зависимости взаимодействия лазера с веществом от эллиптичности и в 3D-материалах, и в квантовых точках представляет интерес для выявления нелинейных оптических свойств этих систем. В работе [51] экспериментально исследовался объемный кристалл, излучающий высокие гармоники, которые были менее чувствительны к эллиптичности оптического импульса [54]. Однако для лазерных импульсов с круговой поляризацией ГВГ сильно подавлялась, несмотря на сильное волновое поле [51]. Более позднее теоретическое исследование того же материала показало монотонное уменьшение выхода гармоник с увеличением эллиптичности возбуждающего импульса [55]. В противоположность этому, в работе [56] экспериментальное исследование другого объемного кристалла выявило сильную зависимость выхода ГВГ от эллиптичности лазерного импульса накачки, включая значительный сигнал для круговой поляризации. Более того, в некоторых случаях было показано, что наибольший выход гармоник достигается не для линейной поляризации, а для поляризации с конечной эллиптичностью. Недавно также сообщалось об усилении ГВГ в графене с использованием эллиптически поляризованного импульса [57]. ГВГ жесткого ультрафиолетового излучения с круговой поляризацией рассматривалась в графене с использованием моделирования на основе зависящей от времени тео-

рии функционала плотности [58, 59]. Как было показано, высокие гармоники в некоторых кристаллах и 2D-материалах отличаются от гармоник в атомах и молекулах, и не подавляются в поле лазера с круговой поляризацией [29–31].

Итак, ГКТ представляют интерес как системы, обладающие свойствами и атомов, и твердых тел. Они имеют дискретные энергетические спектры, определяемые симметрией ГКТ, и демонстрируют квазипространственную периодичность твердых тел. Взаимодействие ГКТ с лазерным импульсом накачки должно быть чувствительно к эллиптичности поляризации лазера. Благодаря различным формам ГКТ могут обладать специфической симметрией. Так, симметрия гексагональной ГКТ (ГГКТ), определяет ее нелинейный оптический отклик, например, подавляя генерацию определенных гармоник. При ГВГ повышение эффективности преобразования имеет решающее значение и сильно зависит от плотности излучателей и возможных каналов возбуждения. Кроме того, атомные кластеры показали перспективность в значительном увеличении интенсивности гармоник по сравнению с атомными системами [60], что привело к растущему интересу к распространению ГВГ на фуллерены [61] и ГКТ [14, 22, 23].

В данной работе исследовано преобразование интенсивного лазерного поля в процессе ГВГ в плоской ГГКТ из 96 атомов с зигзагообразными краями. Мы теоретически исследовали нелинейную динамику ГГКТ в поле эллиптически поляризованного лазерного импульса, используя микроскопический подход с матрицей плотности, который позволяет феноменологически рассматривать процессы релаксации внутри ГГКТ. Кулоновские электрон-электронные взаимодействия (ЭЭВ) рассматриваются в рамках расширенного приближения Хаббарда. Последнее откроет пути для дальнейшего использования возможностей ГКТ в процессе ГВГ.

Основная модель и численные результаты. Мы изучили нейтральную плоскую ГГКТ, которая взаимодействует с лазерным импульсом инфракрасного или видимого света. ГГКТ с зигзагообразными краями, состоящая из 96 атомов, имеет симметрию D_{6h} . Она будет описана моделью сильной связи (СС). Для рассмотрения взаимодействия электронов в ГГКТ используется расширенное приближение Хаббарда [62]. Расстояние между ближайшими соседними атомами составляет $a \simeq 1.42 \text{ \AA}$, ширина запрещенной зоны равна 1.24 эВ. Рассмотрим сильную эллиптически поляризованную ЭМ волну, распространяющуюся в направлении, перпендикуляр-

ном плоскости xy , когда ЭМ волна становится одно-родным квазипериодическим электрическим полем. В этом случае напряженность электрического поля $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$, где E_x направлена вдоль оси x , имеет вид:

$$E_x(t) = \frac{E_0 f(t)}{(1 + \varepsilon^2)^{1/2}} (\cos(\omega t) \cos(\theta) - \varepsilon \sin(\omega t) \sin(\theta)), \quad (1)$$

$$E_y(t) = \frac{E_0 f(t)}{(1 + \varepsilon^2)^{1/2}} (\cos(\omega t) \sin(\theta) + \varepsilon \sin(\omega t) \cos(\theta)), \quad (2)$$

где E_0 – амплитуда, ω – частота, θ – угол поляризации лазерного импульса относительно оси x (угол наклона лазерного импульса), $f(t) = \sin^2(\pi t/\mathcal{T})$ – медленно изменяющаяся огибающая с длительностью импульса $\mathcal{T}$. Последний принимается равным 24 периодам волны: $\mathcal{T} = 48\pi/\omega$, ε – эллиптичность лазерного импульса, изменяющаяся от 0 до 1. Мы рассмотрели частоту волны равной $\omega = 0.1 \text{ эВ}/\hbar$. Пиковая напряженность поля дополнительно ограничена соображениями порога повреждения. В качестве эталона мы принимаем порог повреждения графена однократным импульсом [63], который для длительности импульса приблизительно 800 фс составляет $\sim 6 \times 10^{11} \text{ Вт/см}^2$. В наших численных симуляциях амплитуда поля составляет $0.1 \text{ В/\AA}$, что соответствует интенсивности $1.32 \times 10^{11} \text{ Вт/см}^2$. Это поле почти на три порядка меньше, чем ат. ед. электрического поля ($51.4 \text{ В/\AA}$) и, следовательно, полностью находится в пределах возможностей неразрушающего контроля. Для конфигурации с линейной поляризацией максимальная интенсивность достигает $1.4 \times 10^{11} \text{ Вт/см}^2$, что остается ниже порога повреждения.

Далее решаются уравнения движения для одночастичной матрицы плотности. Полный гамильтониан в СС приближении [21] имеет вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (3)$$

где

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} V_{ij} n_i n_j + \frac{U}{2} \sum_{i\sigma} n_{i\sigma} n_{i\bar{\sigma}} - \sum_{\langle i,j \rangle \sigma} t_{ij} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma}, \quad (4)$$

– гамильтониан свободной квантовой точки. Здесь $c_{i\sigma}^\dagger$ – оператор рождения электрона со спиновой поляризацией $\sigma = (\uparrow, \downarrow)$ в узле i , а $\langle i,j \rangle$ – сумма по ближайшим соседним узлам с энергией переноса t_{ij} ($\bar{\sigma}$ величина, противоположная спиновой поляризации); и $n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma}$ – оператор электронной плотности с полной электронной плотностью для узла i : $n_i = n_{i\uparrow} + n_{i\downarrow}$. Первый и второй члены в свободном

гамильтониане (4) соответствуют ЭЭВ в рамках расширенного приближения Хаббарда ($\hat{H}_{ee}$) с энергиями кулоновского отталкивания между узлами $\sim V_{ij}$ и в узлах $\sim U$. Межузловое кулоновское отталкивание определяется расстоянием d_{ij} между ближайшими соседними парами описывается как $\sim V_{ij} = V d_{\min}/d_{ij}$ ($d_{\min}$ – минимальное расстояние между ближайшими соседями). Для всех расчетов мы приняли $V = 0.3U$, $U = 3 \text{ эВ}$ [21, 62]. Третий член в (4) – это часть кинетической энергии гамильтониана СС с туннельным матричным элементом t_{ij} соседних узлов, или интегралом перескока t_{ij} между ближайшими соседними атомами ГГКТ, который обычно принимается равным экспериментальному значению t_{ij} [21]. Взаимодействие лазера с квантовой точкой описывается в калибровке длины с помощью скалярного потенциала:

$$\hat{H}_{\text{int}} = e \sum_{i\sigma} \mathbf{r}_i \mathbf{E}(t) c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma},$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор, e – элементарный заряд. Эволюционные уравнения для одночастичной матрицы плотности $\rho_{ij}^{(\sigma)} = \langle c_{j\sigma}^\dagger c_{i\sigma} \rangle$ получаем из уравнения Гейзенберга [63]. Пусть система релаксирует со скоростью γ к равновесному распределению $\rho_{0ij}^{(\sigma)}$. Многочастичное взаимодействие рассматривается в рамках приближения Хартри–Фока. Для описания уравнений для одночастичной матрицы плотности $\rho_{ij}^{(\sigma)}$ предполагаем гамильтониан (4) в форме:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0^{HF} \simeq & - \sum_{\langle i,j \rangle \sigma} t_{ij} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + U \sum_i (\bar{n}_{i\uparrow} - \bar{n}_{0i\uparrow}) n_{i\downarrow} \\ & + U \sum_{i\sigma} (\bar{n}_{i\downarrow} - \bar{n}_{0i\downarrow}) n_{i\uparrow} + \sum_{\langle i,j \rangle} V_{ij} (\bar{n}_j - \bar{n}_{0j}) n_i \\ & - \sum_{\langle i,j \rangle \sigma} V_{ij} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} \left(\langle c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} \rangle - \langle c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} \rangle_0 \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\bar{n}_{i\sigma} = \langle c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma} \rangle = \rho_{ii}^{(\sigma)}$. Таким образом, для матрицы плотности получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \rho_{ij}^{(\sigma)}}{\partial t} = & \sum_k \left(\tau_{k j \sigma} \rho_{ik}^{(\sigma)} - \tau_{i k \sigma} \rho_{k j}^{(\sigma)} \right) + (V_{i\sigma} - V_{j\sigma}) \rho_{ij}^{(\sigma)} \\ & + e \mathbf{E}(t) (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \rho_{ij}^{(\sigma)} - i\hbar \gamma \left(\rho_{ij}^{(\sigma)} - \rho_{0ij}^{(\sigma)} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

и матрицы $V_{i\sigma}$, $\tau_{ij\sigma}$ определяются через матрицу плотности $\rho_{ij}^{(\sigma)}$:

$$V_{i\sigma} = \sum_{j\alpha} V_{ij} \left(\rho_{jj}^{(\alpha)} - \rho_{0jj}^{(\alpha)} \right) + U \left(\rho_{ii}^{(\bar{\sigma})} - \rho_{0ii}^{(\bar{\sigma})} \right), \quad (7)$$

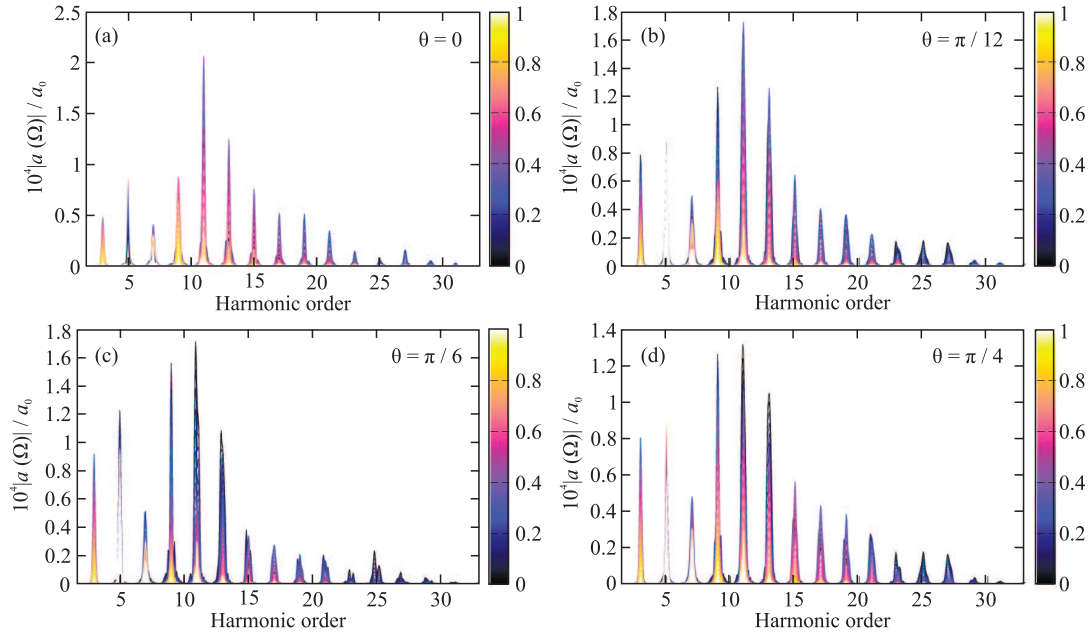


Рис. 1. (Цветной онлайн) (a)–(d) – Спектры излучения ГВГ (за исключением первой гармоники) представлены с помощью дипольного ускорения Фурье-преобразования $10^4 |a(\Omega)|/a_0$ в зависимости от порядка гармоники для ГГКТ₉₆ в эллиптически поляризованном лазерном поле при различных углах поляризации θ . Амплитуда интенсивности составляет $E_0 = 0.1 \text{ В/\AA}$, частота волны равна $\omega = 0.1 \text{ эВ}/\hbar$. Спектры показаны для умеренных ЭЭВ энергий: $U = 3 \text{ эВ}$, $V = 0.9 \text{ эВ}$. Интеграл перескока равен 2.75 эВ , скорость релаксации $\hbar\gamma = 0.05 \text{ эВ}$

$$\tau_{ij\sigma} = t_{ij} + V_{ij} \left(\rho_{ji}^{(\sigma)} - \rho_{0ji}^{(\sigma)} \right). \quad (8)$$

Далее определены собственные энергии ГГКТ₉₆ без взаимодействия с сильным лазерным импульсом. Эти результаты получены путем численной диагонализации свободного гамильтониана $\hat{H}_0$ в модели СС. Предполагаем, что первоначально заполнены 48 самых низких валентных состояний, что соответствует начальной матрице плотности (в координатном представлении), сохраняющей ту же симметрию, что и гамильтониан без лазерного поля [53]. Интеграл перескока между ближайшими атомами $t_{ij} = 2.75 \text{ эВ}$ [21], который определяется эмпирически, учитывает эффект взаимодействия электронов и атомов в приближении Хартри–Фока. Колебания решетки в гамильтониане пренебрегаются. Используя полученные собственные состояния $\psi_\mu(i)$ ($\mu = 0, 1..N-1$), мы определили матричные элементы дипольного момента перехода: $\mathbf{d}_{\mu'\mu} = e \sum_i \psi_{\mu'}^*(i) \mathbf{r}_i \psi_\mu(i)$.

На рисунке 1 показаны спектры излучения ГВГ, определенные по формуле $\mathbf{a}(t) = d^2 \mathbf{d}(t)/dt^2$, как функции порядка гармоники для различных углов поляризации θ и эллиптичности лазерного импульса. Величина $\mathbf{d}(t) = \left\langle \sum_{i\sigma} \mathbf{r}_i c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma} \right\rangle$ – дипольный момент. Мы нормируем дипольное ускорение на множитель $a_0 = 96e\omega_0^2 d_0$, где $\omega_0 = 1 \text{ эВ}/\hbar$ и $d_0 = 1 \text{ \AA}$.

Мощность излучения при ГВГ на заданной частоте пропорциональна $|a(\Omega)|^2$. Численно решена система дифференциальных уравнений для одночастичной матрицы плотности с гамильтонианом СС для многофотонного взаимодействия квантовых точек графена с сильным лазерным полем. Интегрирование по времени кинетических уравнений выполнено с помощью алгоритма Рунге–Кутты 4-го порядка. Скорость релаксации составляет $\hbar\gamma = 0.05 \text{ эВ}$. Рисунок 1 показывает, что в спектрах ГВГ появляются только нечетные гармоники из-за инверсионной симметрии в системе ГГКТ–лазер (за исключением случая лазерного импульса с круговой поляризацией). В случае полей с круговой поляризацией система ГГКТ–лазер имеет другую симметрию, и в спектре ГВГ излучаются только $6N+1$ или $6N-1$ гармоник [32, 53]. Тот факт, что спектры на рис. 1 не идентичны, демонстрирует нелинейную анизотропную природу оптического отклика в процессе ГВГ для различных эллиптичностей и ориентаций лазерного импульса накачки. Видно, что пики выхода при ГВГ соответствуют эллиптичности лазерного импульса $\varepsilon \simeq 1$ (круговая поляризация) для высоких гармоник. На рисунке 1 также показано, что при различных эллиптичностях и ориентациях лазерного импульса имеются разные диапазоны максимального

выхода нелинейного процесса ГВГ. В частности, для гармоник от 5 до 25 при эллиптичности лазерного импульса $\varepsilon \simeq 1$ и углах поляризации $\theta = \pi/12, \pi/4$ и при $\varepsilon < 0.2$ при $\theta = 0, \pi/6$, реализуются сильные многофотонные процессы ГВГ.

На рисунках 2а, d, 3а, d показаны зависимости интенсивности гармонического выхода от эллиптичности ε поляризации ЭМ волны при различных углах поляризации θ . Вероятность испускания каждой гармоники нормирована к соответствующему значению при $\theta = 0$. Из анализа рис. 2а, d, 3а, d видно, что большинство гармоник имеют максимальное значение интенсивности для $\varepsilon \simeq 0.2$ при $\theta = 0, \pi/12, \pi/4$, и для $0.3 < \varepsilon < 0.4$ при $\theta = \pi/6$, которое уменьшается с порядком гармоники, и минимальную эффективность при $\varepsilon \simeq 1$. Исключения составляют 5-я и 7-я гармоники, интенсивность которых достигает максимальных значений при $\varepsilon \simeq 1$.

Исследована также ориентация эллипса поляризации гармоники (угол наклона θ_q большой оси эллипса поляризации гармоники). На рисунках 2, 3 показаны две величины: эллиптичность каждой гармоники ϵ_q и угол наклона $\theta_q - \theta$ относительно большой оси эллипса поляризации лазерного импульса, в зависимости от эллиптичности ε поляризованного лазерного импульса. Обе величины определяются параметрами Стокса ($S_0^q, S_1^q, S_2^q, S_3^q$) следующим образом:

$$\epsilon_q = \tan \left(0.5 \arctan \left(S_3^q \left(S_1^{q2} + S_2^{q2} \right)^{-1/2} \right) \right), \quad (9)$$

$$\theta_q = 0.5 \arctan (S_2^q / S_1^q). \quad (10)$$

Эллиптичность $\epsilon_q > 0$ соответствует левосторонней эллиптической поляризации.

На рисунках 2b, c и 3b, c показано, что в процессе ГВГ все гармоники линейно поляризованы при эллиптичности поляризации лазера $\varepsilon = 0$ и циркулярно поляризованы при эллиптичности лазера $\varepsilon = 1$, когда большая ось эллипса лазерного поля накачки совпадает с осью симметрии решетки ГГКТ ($\theta = 0$ и $\theta = \pi/6$ и т. д.); и эллиптически поляризованы в противном случае. Если для объемного графена [64] в линейно поляризованном лазерном поле эллиптичности гармоник для углов $\theta < \pi/6$ и $\theta > \pi/6$ связаны зеркальной симметрией, то мы имеем другую картину для ГГКТ в эллиптически поляризованном лазерном поле. На рисунках 2b при $\theta = 0$ и 3b – при $\theta = \pi/6$ видно, что эллиптичность излучаемой гармоники ϵ_q приближается к 1 как при низкой $\varepsilon < 0.4$, так и при высокой $\varepsilon > 0.6$ эллиптичности лазерного импульса, а на рис. 2e при $\theta = \pi/12$ и 3e – при $\theta = \pi/4$ видно, что эллиптичность излучаемой

гармоники ϵ_q приближается к максимальному значению только при более высокой эллиптичности лазерного импульса $\varepsilon > 0.6$. Мы обнаружили заметную разницу между гармониками в ГГКТ и объемном графене [64]. В первом случае низкие гармоники представляют собой постоянную левостороннюю, а гармоники более высокого порядка – правостороннюю эллиптическую поляризацию, в рассматриваемом случае ГГКТ. При этом как низкие, так и высокие гармоники, за исключением первой, демонстрируют немонотонное изменение эллиптичности, изменяя знак ϵ_q . Согласно [65], частота излучаемой гармоники соответствует мгновенной энергии рекомбинации пар электрон–дырка. А именно, в ГГКТ высокие гармоники генерируются во время внутризонных и межзонных переходов, где зонная структура не изотропна. Следовательно, в ГГКТ излучение третьей и более высоких гармоник становится чувствительным к ориентации поляризации лазерного поля. Напротив, в случае выровненных молекул зависимость эллиптичности гармоники от угла наклона управляющего лазерного поля одинакова для всех порядков гармоник благодаря изотропной структуре зоны собственных энергий (вблизи точек Дирака), где происходит рекомбинация пар электрон–дырка [65].

Кроме того, на рис. 2c, f, 3c, f показано изменение угла между главными осями эллипсов поляризации излучаемой гармоники и лазерного импульса в зависимости от эллиптичности лазерного поля. На этих рисунках видно, что для рассмотренных углов θ поляризации лазерного импульса при максимальной эффективности эллиптичности ε лазера главная ось эллипса поляризации гармоники отклика почти перпендикулярна главной оси эллипса поляризации лазерного импульса для 11-й и более высоких гармоник. Полученные результаты показывают, что эллиптичность генерируемых в ГГКТ гармоник можно регулировать, изменяя угол наклона оси поляризации лазерного импульса, без необходимости управления конфигурацией лазерного поля и мишени.

Примечательной особенностью спектров ГВГ в квантовых точках является их зависимость от размера квантовой точки. Для исследования этого мы сравниваем спектры ГВГ для ГГКТ₉₆ и ГГКТ₅₄ с зигзагообразными краями на рис. 4, нормированные по числу атомов. На рисунке 4 видно значительное усиление спектра ГВГ для ГГКТ₉₆, такое поведение также наблюдалось для квантовых точек в предыдущих исследованиях [26, 27]. Это усиление можно объяснить плотностью состояний и большим числом каналов переходов для больших ГГКТ, косвенно отраженной в [66] через множество дипольных момен-

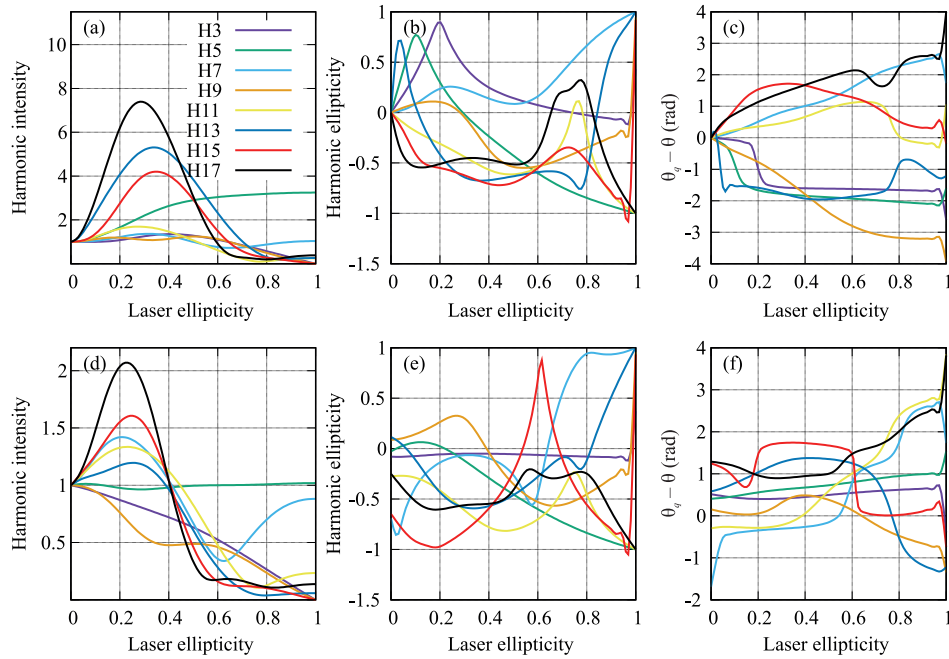


Рис. 2. (Цветной онлайн) (a), (d) – Интенсивность излучаемых гармоник как функция эллиптичности лазера при углах наклона лазерного импульса $\theta = 0$ и $\theta = \pi/12$. Интенсивность гармоники нормирована к значению при $\theta = 0$. (b), (e) – Эллиптичность излучаемой гармоники как функция эллиптичности лазера для гармоник H3–H17 при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/12$. Положительные значения эллиптичности указывают на левостороннюю поляризацию. (c), (f) – Сдвиг угла между эллипсами гармоники и лазерного поля как функция эллиптичности лазера для гармоник H3–H17 при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/12$. Соответствие цвета линии с номером гармоники указано на (a)

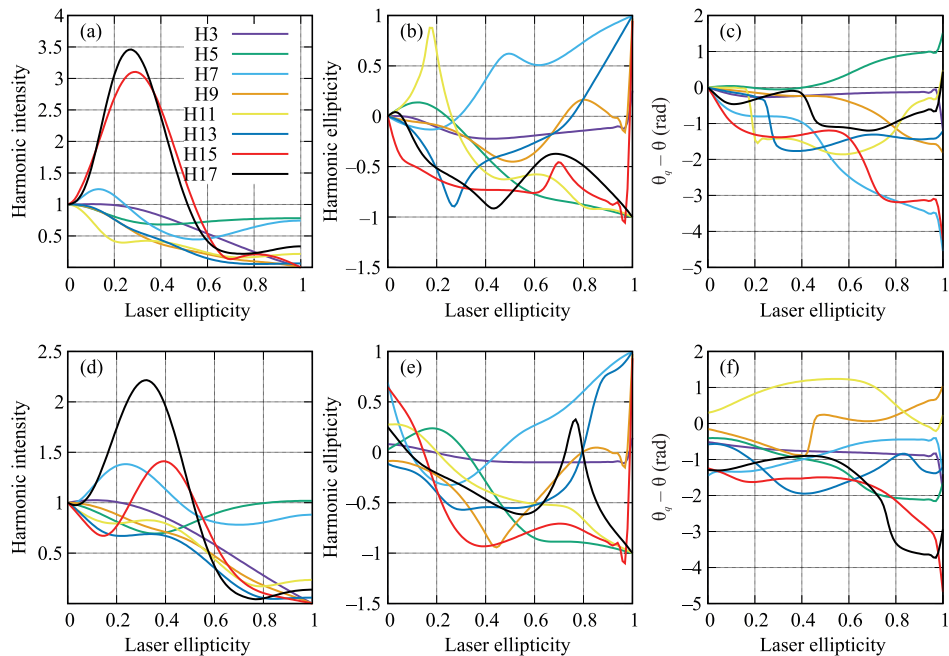


Рис. 3. (Цветной онлайн) То же, что и на рис. 2, но для углов наклона лазерного импульса (a), (b), (c) – $\theta = \pi/6$ и (d), (e), (f) – $\theta = \pi/4$

тов переходов между областями валентности и проводимости. Последнее способствует увеличению отклика в процессе ГВГ.

В заключение отметим, что в данной работе мы исследовали трансформацию света в процессе ГВГ на ГКТ, сосредоточившись на гексагональных кван-

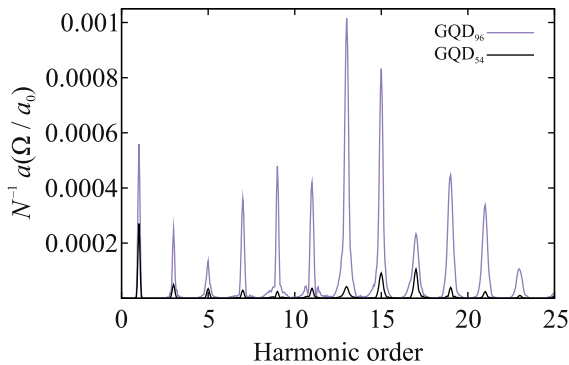


Рис. 4. (Цветной онлайн) Сравнение спектров ГГКТ, выраженных через дипольное ускорение $\mathbf{a}(t) = d^2\mathbf{d}(t)/dt^2$ и нормированных на $a_0 = e\omega_0^2 d_0$ и число атомов N , для зигзагообразных ГГКТ₉₆ и ГГКТ₅₄. Частота волны накачки равна $\omega = 0.1 \text{ эВ}/\hbar$, амплитуда волны $E_0 = 0.1 \text{ В}/\text{Å}$

товых точках с зигзагообразными гранями из 96 атомов, в высокоинтенсивных эллиптически поляризованных лазерных полях с использованием модели СС. Эллиптичность поляризации излучаемой гармоники и ориентация эллипса определяются параметрами Стокса с использованием интенсивностей различных поляризационных компонент гармоники. Если эллиптически поляризованное лазерное поле приводит к интенсивному излучению линейно или эллиптически поляризованных гармоник, то наблюдается и обратный процесс. Наши численные результаты показывают, что эллиптичность гармоник, генерируемых в рассмотренных квантовых точках, может быть легко изменена путем изменения поляризации возбуждающей волны без необходимости использования сложных вспомогательных систем.

Финансирование работы. Авторы выражают глубокую благодарность проф. Г. К. Аветисяну и докт. Г. Ф. Мкртчяну за постоянные обсуждения и ценные рекомендации. Данная работа выполнена при поддержке Комитета по Высшему Образованию и Науке Министерства Образования, Науки и Технологий Республики Армения (исследовательский проект 24WS-1C004).

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. A. McPherson, G. Gibson, H. Jara, U. Johann, T. S. Luk, I. A. McIntyre, K. Boyer, and C. K. Rhodes, "Studies of multiphoton production of vacuum-ultraviolet radiation in the rare gases", *J. Opt. Soc. Am.* **4**, 595 (1987).
2. M. Ferray, A. L'Huillier, X. F. Li, L. A. Lompre, G. Mainfray, and C. Manus, "Multiple-harmonic

- conversion of 1064 nm radiation in rare gases", *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **21**, L31 (1988).
3. H. K. Avetissian, *Relativistic nonlinear electrodynamics: The QED vacuum and matter in super-strong radiation fields* (Springer, Berlin, 2015), v. 88.
4. T. Popmintchev, M.-Ch. Chen, D. Popmintchev et al. (Collaboration), "Bright coherent ultrahigh harmonics in the keV X-ray regime from mid-infrared femtosecond lasers", *Science* **336**, 1287 (2012).
5. S. Cha, M. Kim, Y. Kim, Sh. Choi, S. Kang, H. Kim, S. Yoon, G. Moon, T. Kim, Y. W. Lee, G. Y. Cho, M. J. Park, Ch.-J. Kim, B. J. Kim, J. Lee, M. Jo, and J. Kim, "Gate-tunable quantum pathways of high harmonic generation in graphene", *Nat. Commun.* **13**, 6630 (2022).
6. H. K. Avetissian, G. F. Mkrtchian, and A. Knorr, "Efficient high-harmonic generation in graphene with two-color laser field at orthogonal polarization", *Phys. Rev. B* **105**, 195405 (2022).
7. M. Mrudul, A. Jimenez-Galan, M. Ivanov, and G. Dixit, "Light-induced valleytronics in pristine graphene", *Optica* **8**, 422 (2021).
8. R. Zhou, T. Guo, L. Huang, and K. Ullah, "Engineering the harmonic generation in graphene", *Mater. Today Phys.* **23**, 100649 (2022).
9. C. Liu, Y. Zheng, Z. Zeng, and R. Li, "Polarization-resolved analysis of high-order harmonic generation in monolayer MoS₂", *New J. Phys.* **22**, 073046 (2020).
10. A. K. Avetissian, A. G. Ghazaryan, Kh. V. Sedrakian, and B. R. Avchyan, "Induced nonlinear cross sections of conductive electrons scattering on the charged impurities in doped graphene", *J. Nanophoton.* **11**, 036004 (2017).
11. A. K. Avetissian, A. G. Ghazaryan, Kh. V. Sedrakian, and B. R. Avchyan, "Microscopic nonlinear quantum theory of absorption of strong electromagnetic radiation in doped graphene", *J. Nanophoton.* **12**, 016006 (2018).
12. X. Liu, X. Zhu, L. Li, Y. Li, Q. Zhang, P. Lan, and P. Lu, "Selection rules of high-order-harmonic generation: Symmetries of molecules and laser fields", *Phys. Rev. A* **94**, 033410 (2016).
13. E. Goulielmakis and T. Brabec, "High harmonic generation in condensed matter", *Nat. Photonics* **16**, 411 (2022).
14. Б. Р. Авчян, А. Г. Казарян, К. А. Саргсян, Х. В. Седракян, "О лазерно-индуцированной генерации высших гармоник и смешении волн высокого порядка в графеновой квантовой точке", *Письма в ЖЭТФ* **116**(7), 426 (2022) [B. R. Avchyan, A. G. Ghazaryan, Kh. A. Sargsyan, and Kh. V. Sedrakian, "On laser-induced high-order wave mixing and harmonic generation in graphene quantum dot", *JETP Lett.* **116**, 428 (2022)].
15. H. K. Avetissian, A. G. Ghazaryan, and G. F. Mkrtchian, "High harmonic generation in fullerene molecules", *Phys. Rev. B* **104**, 125436 (2021).

16. H.K. Avetissian, S. Sukiasyan, T.M. Markosyan, and G.F. Mkrtchian, "Intense high-order harmonic generation in the giant fullerene molecule C_{240} ", *Phys. Rev. B* **109**, 085401 (2024).
17. Г.К. Аветисян, А.Г. Казарян, Х.Г. Матевосян, Г.Ф. Мкртчян, "Интенсивное генерирование высших гармоник в молекуле фуллерена C_{180} ", *ЖЭТФ* **165**, 25 (2024) [H.K. Avetisyan, A.G. Ghazaryan, Kh.G. Matevosyan, and G.F. Mkrtchyan, "Intense generation of higher harmonics in the fullerene molecule C_{180} ", *JETP* **165**, 25 (2024)].
18. H.K. Avetissian, S. Sukiasyan, H.H. Matevosyan, and G.F. Mkrtchian, "Disorder-induced effects in high-harmonic generation process in fullerene molecules", *Results in Phys.* **53**, 106951 (2023).
19. X. Zhang, T. Zhu, H. Du, H.-G. Luo, J. van den Brink, and R. Ray, "Extended high-harmonic spectra through a cascade resonance in confined quantum systems", *Phys. Rev. Res.* **4**, 033026 (2022).
20. H.K. Avetissian, B.R. Avchyan, A. Brown, and G.F. Mkrtchian, "High-harmonic spectroscopy of mobility edges in one-dimensional quasicrystals", *New J. Phys.* **27**, 124101 (2025).
21. A.D. Guclu, P. Potasz, M. Korkusinski, and P. Hawrylak, *Graphene quantum dots* (Springer, Berlin, 2014).
22. B.R. Avchyan, A.G. Ghazaryan, S.S. Israelyan, and Kh.V. Sedrakian, "High harmonic generation with many-body Coulomb interaction in rectangular graphene quantum dots of armchair edge", *J. Nanophoton.* **16**, 036001 (2022).
23. S. Gnawali, R. Ghimire, K.R. Magar, S.J. Hossaini, and V. Apalkov, "Ultrafast electron dynamics of graphene quantum dots: High harmonic generation", *Phys. Rev. B* **106**, 075149 (2022).
24. S. Gnawali and V. Apalkov, "High harmonic generation governed by edge states in triangular graphene quantum dots", *Phys. Rev. B* **108**, 115434 (2023).
25. Y. Qin, X. Feng, and Y. Liu, "Nonlinear refractive index in rectangular graphene quantum dots", *Appl. Sci.* **9**, 325 (2019).
26. A.G. Ghazaryan, Kh.V. Sedrakian, G.A. Musayelyan, and T.M. Markosyan, "Multiphoton excitation and high harmonic generation in rectangular graphene quantum dot", *Phys. Scr.* **98**, 055921 (2023).
27. A.G. Ghazaryan and Kh.V. Sedrakian, "High harmonic generation in rhombus graphene quantum dots with elliptically polarized strong laser pulses", *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **59**, 015402 (2026).
28. K.J. Schafer, B. Yang, L.F. DiMauro, and K.C. Kulander, "Above threshold ionization beyond the high harmonic cutoff", *Phys. Rev. Lett.* **7**, 1599 (1993).
29. P.B. Corkum, "Plasma perspective on strong field multiphoton ionization", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1994 (1993).
30. M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov, A. L'Huillier, and P.B. Corkum, "Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields", *Phys. Rev. A* **49**, 2117 (1994).
31. P. Agostini and F.L. Di-Mauro, "The physics of attosecond light pulses", *Rep. Prog. Phys.* **67**, 813 (2004).
32. P. Dietrich, N.H. Burnett, M. Ivanov, and P.B. Corkum, "High-harmonic generation and correlated two-electron multiphoton ionization with elliptically polarized light", *Phys. Rev. A* **50**, R3585 (1994).
33. H. Eichmann, A. Egbert, S. Nolte, C. Momma, B. Wellegehausen, W. Becker, S. Long, and J.K. McIver, "Polarization-dependent high-order two-color mixing", *Phys. Rev. A* **51**, R3414 (1995).
34. G. Lambert, B. Vodungbo, J. Gautier, B. Mahieu, V. Malka, S. Sebban, P. Zeitoun, J. Luning, J. Perron, A. AAndreev, S. Stremoukhov, F. Ardana-Lamas, A. Dax, C.P. Hauri, A. Sardinha, and M. Fajardo, "Towards enabling femtosecond helicity-dependent spectroscopy with high-harmonic sources", *Nat. Commun.* **6**, 6167 (2015).
35. A. Fleischer, O. Kfir, T. Diskin, P. Sidorenko, and O. Cohen, "Spin angular momentum and tunable polarization in high-harmonic generation", *Nat. Photonics* **8**, 543 (2014).
36. T. Fan, P. Grychtol, R. Knut, et al. (Collaboration), "Bright circularly polarized soft X-ray high harmonics for X-ray magnetic circular dichroism", *Proc. Natl Acad. Sci.* **112**, 14206 (2015).
37. D.D. Hickstein, F.J. Dollar, P. Grychtol, J. Ellis, C. Hernandez-Garcia, R.J. Knut, Ch. Gentry, H. Kapteyn, and M. Murnane, "Non-collinear generation of angularly isolated circularly polarized high harmonics", *Nat. Photon.* **9**, 743 (2015).
38. A. Fleischer, E. Bordo, O. Kfir, P. Sidorenko, and O. Cohen, "Polarization-fan high-order harmonics", *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **50**, 034001 (2017).
39. P.-Ch. Huang, C. Hernandez-Garcia, J.-T. Huang, P.-Y. Huang, Ch.-H. Lu, L. Rego, D.D. Hickstein, J.L. Ellis, A. Jaron-Becker, A. Becker, Sh.-Da Yang, Ch. G. Durfee, L. Plaja, H. C. Kapteyn, M. M. Murnane, A. H. Kung, and M.-Ch. Chen, "Polarization control of isolated high-harmonic pulses", *Nat. Photonics* **12**, 349 (2018).
40. B. Mahieu, S. Stremoukhov, D. Gauthier, C. Spezzani, C. Alves, B. Vodungbo, P. Zeitoun, V. Malka, G. De Ninno, and G. Lambert, "Control of ellipticity in high-order harmonic generation driven by two linearly polarized fields", *Phys. Rev. A* **97**, 043857 (2018).
41. K. M. Dorney, L. Rego, N. J. Brooks, J. S. Rومان, Ch.-T. Liao, J. L. Ellis, D. Zusin, Ch. Gentry, Q. L. Nguyen, J. M. Shaw, A. Picon, L. Plaja, H. C. Kapteyn, M. M. Murnane, and C. Hernandez-Garcia, "Controlling

- the polarization and vortex charge of attosecond high-harmonic beams via simultaneous spin-orbit momentum conservation”, *Nat. Photonics* **13**, 123 (2019).
42. Ch. Zhai, R. Shao, P. Lan, B. Wang, Y. Zhang, H. Yuan, S. M. Njoroge, L. He, and P. Lu, “Ellipticity control of high-order harmonic generation with nearly orthogonal two-color laser fields”, *Phys. Rev. A* **101**, 053407 (2020).
 43. O. Neufeld, D. Podolsky and O. Cohen, “Floquet group theory and its application to selection rules in harmonic generation”, *Nat. Commun.* **10**, 405 (2019).
 44. Ch. Zhai, X. Zhu, Y. Li, Q. Tang, B. Yu, P. Lan, and P. Lu, “Helicity-selected near-circularly polarized attosecond pulses generated from mixed He-Ne gases”, *Phys. Rev. A* **111**, 043519 (2025).
 45. R. Cireasa, A.E. Boguslavskiy, B. Pons et al. (Collaboration), “Probing molecular chirality on a sub-femtosecond timescale”, *Nat. Phys.* **11**, 654 (2015).
 46. A. Ferre, C. Handschin, M. Dumergue et al. (Collaboration), “A table-top ultrashort light source in the extreme ultraviolet for circular dichroism experiments”, *Nat. Photonics* **93**, 9 (2015).
 47. B. Gamashi, S. Walker, and A. Becker, “Generation of elliptically polarized high-order harmonics in cross-polarized bichromatic laser pulses: mechanism and control”, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **58**, 235601 (2025).
 48. S. Kerbstadt, L. Englert, T. Bayer, and M. Wollenhaupt, “Ultrashort polarization-tailored bichromatic fields”, *J. Mod. Opt.* **64**, 1010 (2017).
 49. Ch. Heide, Y. Kobayashi, Sh. R. U. Haque, and Sh. Ghimire, “Ultrafast high-harmonic spectroscopy of solids”, *Nat. Phys.* **20**, 1546 (2024).
 50. G. Sansone, E. Benedetti, F. Calegari, C. Vozzi, L. Avaldi, R. Flammini, L. Poletto, P. Villoresi, C. Altucci, R. Velotta, S. Stagira, S. De Silvestri, and M. Nisoli, “Isolated single-cycle attosecond pulses”, *Science* **314**, 443 (2006).
 51. S. Ghimire, A. D. DiChiara, E. Sistrunk, P. Agostini, L. F. DiMauro, and D. A. Reis, “Observation of high-order harmonic generation in a bulk crystal”, *Nat. Phys.* **7**, 138 (2011).
 52. S. Gnawali and V. Apalkov, “High-order harmonic generation in graphene quantum dots in the field of an elliptically polarized pulse”, *Phys. Rev. B* **109**, 165121 (2024).
 53. H. K. Avetissian, A. G. Ghazaryan, G. F. Mkrtchian, and Kh. V. Sedrakyan, “High harmonic generation and wave mixing in graphene quantum dots by bichromatic laser fields of circular polarization”, *Results in Phys.* **81**, 108579 (2026).
 54. B. Shan, S. Ghimire, and Z. Chang, “Effect of orbital symmetry on high-order harmonic generation from molecules”, *Phys. Rev. A* **69**, 021404(R) (2004).
 55. C. Liu, Y. Zheng, Z. Zeng, and R. Li, “Effect of elliptical polarization of driving field on high-order-harmonic generation in semiconductor ZnO”, *Phys. Rev. A* **93**, 043806 (2016).
 56. Y. S. You, D. A. Reis, and Sh. Ghimire, “Anisotropic high-harmonic generation in bulk crystals”, *Nat. Phys.* **13**, 345 (2017).
 57. S. A. Sato, H. Hirori, Y. Sanari, Y. Kanemitsu, and A. Rubio, “High-order harmonic generation in graphene: Nonlinear coupling of intraband and interband transitions”, *Phys. Rev. B* **103**, L041408 (2021).
 58. Z.-Y. Chen and R. Qin, “Circularly polarized extreme ultraviolet high harmonic generation in graphene”, *Opt. Express* **27**, 3761 (2019).
 59. T. Tamaya, A. Ishikawa, T. Ogawa, and K. Tanaka, “Circularly polarized extreme ultraviolet high harmonic generation in graphene”, *Phys. Rev. B* **94**, 241107(R) (2016).
 60. T. D. Donnelly, T. Ditmire, K. Neuman, M. D. Perry, and R. W. Falcone, “High-order harmonic generation in atom clusters”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2472 (1996).
 61. R. Ganeev, L. E. Bom, J. Abdul-Had, M. C. H. Wong, J. P. Brichta, V. R. Bhardwaj, and T. Ozaki, “Higher-order harmonic generation from fullerene by means of the plasma harmonic method”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 013903 (2009).
 62. R. L. Martin and J. P. Ritchie, “Coulomb and exchange interactions in C₆₀”, *Phys. Rev. B* **48**, 4845 (1993).
 63. A. Roberts, D. Cormode, C. Reynolds, T. Newhouse-Ilige, B. J. LeRoy, and A. S. Sandhu, “Response of graphene to femtosecond high-intensity laser irradiation”, *Appl. Phys. Lett.* **99**, 051912 (2011).
 64. O. Zurron-Cifuentes, R. Boyero-Garcia, C. Hernandez-Garcia, A. Picon, and L. Plaja, “Optical anisotropy of non-perturbative high-order harmonic generation in gapless graphene”, *Opt. Express* **27**, 7776 (2019).
 65. G. Vampa, C. R. McDonald, G. Orlando, D. D. Klug, P. B. Corcum, and T. Brabec, “Theoretical analysis of high-harmonic generation in solids”, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 073901 (2014).
 66. Х. В. Седракян, А. Г. Казарян, А. А. Маркосян, “Многофотонное резонансное возбуждение и генерация высоких гармоник в больших графеновых квантовых точках”, *Письма в ЖЭТФ* **123**, 691 (2026) [Kh. V. Sedrakian, A. G. Ghazaryan, and A. A. Markosyan, “Multiphoton resonant excitation and high harmonic generation in large graphene quantum dots”, *JETP Lett.* **123**, 674 (2026)].