

Влияние эффекта Зеемана на квантовый 3D–2D кроссовер в слоистых проводниках

С. Ш. Рехвиашвили¹⁾

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
360017 Нальчик, Россия

Поступила в редакцию 20 мая 2026 г.

После переработки 9 июня 2026 г.

Принята к публикации 18 июня 2026 г.

Сильное магнитное поле в слоистых проводниках подавляет межслоевое туннелирование и приводит к переходу от квазитрехмерного к квазидвумерному электронному режиму. В работе исследуется влияние этого квантового 3D–2D кроссовера на термодинамические свойства с учетом зеемановского расщепления спиновых состояний. Показано, что орбитальное подавление когерентности и эффект Зеемана совместно изменяют электронный спектр и перераспределяют заселенность подзон, что приводит к немонотонной зависимости намагниченности от магнитного поля в области кроссовера. В области сильных полей система переходит в спин-поляризованное состояние и намагниченность насыщается. Полученные результаты указывают на важную роль спиновых эффектов в формировании отклика в области кроссовера.

DOI: 10.7868/S3034576626080066

Сильные магнитные поля приводят к существенной перестройке электронного спектра проводящих материалов за счет орбитального квантования и ограничения фазового пространства движения носителей заряда [1]. Это проявляется в широком классе явлений, среди которых можно отметить вымораживание полупроводников [2], кроссоверы в тонких пленках [3, 4], индуцированные полем волны спиновой плотности (FISDW) [5, 6], а также квантовые осцилляции магнитотранспортных и термодинамических характеристик [7–10], в том числе и хорошо известные эффекты Шубникова–де Гааза и де Гааза–ван Альфена [11]. Отдельный интерес представляют слоистые проводники, в которых анизотропия переноса делает влияние магнитного поля на электронную динамику особенно выраженным. В таких материалах поле эффективно управляет когерентностью туннелирования между слоями, что приводит к квантовому кроссоверу с переходом от квазитрехмерного к квазидвумерному электронному режиму [12–15].

В настоящей работе исследуется квантовый 3D–2D кроссовер в слоистом проводнике с учетом спиновых степеней свободы. В области сверхсильных магнитных полей дополнительную роль играет зеемановское расщепление электронных состояний, приводящее к изменению спектра и

перераспределению заселенности подзон. Несмотря на фундаментальную значимость этого механизма, его влияние на термодинамический отклик в области квантового 3D–2D кроссовера в нормальных слоистых проводниках до сих пор не изучено.

Предполагается, что электроны в слоистом проводнике почти свободно движутся вдоль проводящих плоскостей. При приложении сильного магнитного поля, ориентированного параллельно этим плоскостям, орбитальное движение электронов квантуется. При этом характерный пространственный масштаб квантовых состояний определяется магнитной длиной $l_B = \sqrt{\hbar/(eB)}$. С ростом поля длина l_B уменьшается, и когда она становится сравнимой или меньшей, чем межслоевое расстояние d , когерентное межслоевое туннелирование подавляется. В результате система испытывает кроссовер от трехмерного квазиклассического металлического состояния к квазидвумерному режиму слабо связанных проводящих слоев. Критическое поле, при котором происходит этот переход, по порядку величины равно $B_c \sim \hbar/(ed^2)$.

Примем калибровку магнитного поля $\mathbf{B} = (0, B, 0)$ и векторного потенциала $\mathbf{A} = (0, 0, -Bx)$. Плоскость, перпендикулярная магнитному полю, образована осями x (в плоскости слоя) и z (межслоевое направление). Квантование движения в этой плоскости приводит к фазовой зависимости межслоевого туннелирования, что эквивалентно ограничению вклада больших отклонений координат

¹⁾e-mail: rsergo@mail.ru

наты x при переходах между слоями. Гамильтониан запишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{n,\sigma} \int d^2r \psi_{n,\sigma}^\dagger(\mathbf{r}) \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \mu \right) \psi_{n,\sigma}(\mathbf{r}) - \\ & - t_\perp \sum_{n,\sigma} \int d^2r (\psi_{n+1,\sigma}^\dagger(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) + \text{h.c.}) - \\ & - \frac{g\mu_B B}{2} \sum_n \int d^2r \psi_n^\dagger(\mathbf{r}) \sigma_y \psi_n(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1)$$

где μ – химический потенциал, $t_\perp$ – интеграл перескоков между слоями, g – фактор Ланде, μ_B – магнетон Бора. Второе слагаемое в (1) описывает когерентное туннелирование электронов между соседними проводящими слоями, обеспечивающее трехмерную связность системы и формирование дисперсии вдоль направления, перпендикулярного плоскостям слоев. В пределе слабого межслоевого перескока ($t_\perp \ll E_F$) система приобретает выраженную квазидвумерную анизотропию. Третье слагаемое в (1) описывает взаимодействие спина электрона с внешним магнитным полем. Оно приводит к снятию спинового вырождения электронных состояний и расщеплению энергетического спектра на две подзоны, соответствующие различным ориентациям спина относительно направления магнитного поля. Выбор матрицы σ_y соответствует направлению $B \parallel \hat{y}$. Собственные значения оператора σ_y равны ± 1 , что используется в дальнейшем при суммировании по спиновым индексам; конкретный вид собственных спинов не влияет на скалярные термодинамические величины. Энергетическое расстояние между спиновыми подзонами определяется зеемановским расщеплением $g\mu_B B$. В результате энергии электронов со спинами, параллельными и антипараллельными магнитному полю, смещаются на величину $\pm g\mu_B/2$, что приводит к спиновой поляризации электронной системы и изменению термодинамических характеристик слоистого проводника в сильном магнитном поле.

Как известно, в магнитном поле динамика заряженной частицы описывается принципом минимальной связи $\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}}$. Это приводит к появлению калибровочно-инвариантной фазовой добавки в амплитуде межслоевого перескока, так что матричный элемент туннелирования принимает вид

$$t_\perp \rightarrow t_\perp \exp(i\varphi(x)), \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ – фаза. Для вышеуказанной калибровки магнитного поля и векторного потенциала получаем

$$\varphi(x) = \frac{e}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{e}{\hbar} \int_0^d (-Bx) dz = -\frac{eBd}{\hbar} x. \quad (3)$$

Фазовый множитель в (2) зависит от координаты x электрона в слое (направление $x \perp \mathbf{B} \parallel \hat{y}$), которая флуктуирует по причине рассеяния на различных примесях и тепловых возбуждениях, а также вследствие квантовой неопределенности. Квантовомеханическое усреднение этого множителя проводится с учетом плотности вероятности нахождения электрона в плоскости слоя

$$\langle \exp(i\varphi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 \exp(i\psi(x)). \quad (4)$$

Поскольку точный вид волновой функции $\psi(x)$ в реальной диссипативной среде неизвестен, естественно аппроксимировать ее гауссовым пакетом с дисперсией $\langle x^2 \rangle$, что соответствует основному состоянию в эффективном гармоническом потенциале или диффузионному движению в случайном поле. При такой аппроксимации

$$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle x^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\langle x^2 \rangle}\right). \quad (5)$$

Под локализацией по x в данном случае понимается конечная пространственная протяженность волнового состояния в слое, определяющая вклад координаты x в межслоевое туннелирование в магнитном поле. Вычисление интеграла (4) с учетом (3) и (5) дает

$$\langle \exp(i\varphi) \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{eBd}{\hbar}\right)^2 \langle x^2 \rangle\right). \quad (6)$$

Параметр $\langle x^2 \rangle$ характеризует поперечную локализацию электронного состояния. В “чистом” пределе при низких температурах $\langle x^2 \rangle = l_B^2/2$, что соответствует когерентному состоянию Ландау. В “грязном” пределе, когда доминирует рассеяние на примесях, поперечный размер пакета ограничивается диффузионной длиной $\langle x^2 \rangle \propto D\tau$ и практически не зависит от магнитного поля. Это связано с тем, что многократное рассеяние приводит к случайным блужданиям электрона в плоскости слоя. В результате усреднение фазы межслоевого туннелирования определяется среднеквадратичным смещением по координате x за характерное время τ . Распределение (5) в этом случае является естественной аппроксимацией, которая следует из центральной предельной теоремы для суммы большого числа независимых актов рассеяния. Таким образом, формула (6) строго следует из

квантового усреднения для гауссова профиля и корректно описывает подавление когерентности межслоевого туннелирования в обоих предельных случаях. С учетом (6) получаем эффективный интеграл перескока

$$\langle t_{\perp} \rangle = t_{\perp} \exp \left[- \left(\frac{B}{B_0} \right)^2 \right], \quad (7)$$

где $B_0 = \hbar\sqrt{2}/(ed\sqrt{\langle x^2 \rangle})$ – параметр, вообще говоря, зависящий от магнитного поля. Следует отметить, что формула (7) фактически совпадает с результатом, полученным в рамках теории возмущений в работе [7], где показано, что эффективный интеграл перескока вблизи уровня Ферми экспоненциально подавлен и при сильных полях сводится к гауссовой зависимости. В [7], кроме того, описываются осцилляции, которые связаны с интерференцией замкнутых орбит при наклонном поле. В нашей геометрии ($\mathbf{B} \parallel ab$) такие орбиты отсутствуют, и подавление туннелирования обусловлено лишь дефазировкой.

Если выбрать базис собственных состояний σ_y , то гамильтониан (1) диагонализуеться по спину, и получаем два независимых подспектра при $\sigma = \pm 1$. Спектр с учетом (7) имеет вид

$$\epsilon(p, k_z, B) = \frac{p_{\parallel}^2}{2m} - 2t_{\perp} \exp \left[- \left(\frac{B}{B_0} \right)^2 \right] \times \\ \times \cos(k_z d) - \mu + \sigma \frac{g\mu_B B}{2}. \quad (8)$$

Для функции Грина в приближении слабого рассеяния, когда уширением уровней Ландау можно пренебречь (общий случай учета уширения см. в [9, 10]), имеем

$$G^{-1}(i\omega_n, \mathbf{p}, k_z, B) = i\hbar\omega_n - \epsilon(p, k_z, B). \quad (9)$$

Термодинамический потенциал

$$\Omega(B, T) = -k_B T \sum_{\omega_n} \text{Tr} \ln G^{-1}, \quad (10)$$

где суммирование проводится по мацубаровским фермиевским частотам $\omega_n = \pi k_B T (2n + 1)/\hbar$. Подставляя (9) в (10) и выполняя суммирование по частотам ω_n , получаем выражение для термодинамического потенциала невзаимодействующих фермионов

$$\Omega(B, T) = -k_B T \sum_{\mathbf{p}, k_z, \sigma} \ln \left[1 + \exp \left(- \frac{\epsilon(\mathbf{p}, k_z, B)}{k_B T} \right) \right]. \quad (11)$$

В термодинамическом пределе суммирование в (11) заменяется интегрированием

$$\Omega(B, T) = - \frac{k_B T V}{(2\pi)^3 \hbar^2} \sum_{\sigma} \int d^2 p_{\parallel} \times \\ \times \int_{-\pi/d}^{\pi/d} dk_z \ln \left[1 + \exp \left(- \frac{\epsilon(\mathbf{p}, k_z, B)}{k_B T} \right) \right], \quad (12)$$

где V – объем образца. После интегрирования в (12) по импульсам в плоскости слоя получаем

$$\Omega(B, T) = - \frac{m(k_B T)^2 V}{(2\pi \hbar)^2} \times \\ \times \sum_{\sigma} \int_{-\pi/d}^{\pi/d} dk_z \text{Li}_2 \left[- \exp \left(\frac{A(k_z, B)}{k_B T} \right) \right], \quad (13)$$

$$A(k_z, B) = 2t_{\perp} \exp \left[- \left(\frac{B}{B_0} \right)^2 \right] \cos(k_z d) + \mu - \sigma \frac{g\mu_B B}{2}. \quad (14)$$

Анализ выражений (13), (14) при $t_{\perp} \ll E_F$ показывает, что электронная теплоемкость во всей области низких и умеренных температур ($T \ll T_F$) линейна по температуре с коэффициентом $\gamma = \pi m k_B^2 / (3\hbar^2 d)$, не зависящим от магнитного поля. Ни орбитальное подавление межслоевого туннелирования, ни эффект Зеемана не приводят к заметному изменению γ . Следовательно, квантовый кроссовер 3D–2D не сказывается на теплоемкости, и для его наблюдения следует обращаться к другим характеристикам, например, к намагниченности [15].

Для намагниченности из (13), (14) получается выражение

$$M = - \frac{\partial \Omega}{\partial B} = M_0 \mathcal{F}, \quad (15)$$

$$\mathcal{F} = \tau \sum_{\sigma} \int_{-\pi}^{\pi} dq (2\beta \exp(-\beta^2) \cos q + \sigma \lambda) \times \\ \times \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\exp(-\beta^2) \cos q + \eta - \sigma \lambda \beta}{\tau} \right) \right], \quad (16)$$

$$M_0 = \frac{mV}{B_0 d} \left(\frac{t_{\perp}}{\pi \hbar} \right)^2, \quad \beta = \frac{B}{B_0}, \quad \tau = \frac{k_B T}{2t_{\perp}},$$

$$\lambda = \frac{g\mu_B B_0}{4t_{\perp}}, \quad \eta = \frac{\mu}{2t_{\perp}},$$

где $\mathcal{F}$ – безразмерная функция, которая определяет зависимость намагниченности от магнитного поля и температуры. При $\eta = \lambda = 0$ и $\tau \gg 1$ из (16) следует $\mathcal{F} = 2\pi\beta \exp(-2\beta^2)$, т.е. орбитальная намагниченность, генерируемая параллельным полем, в данном случае не зависит от температуры. Это отражает симметричное заполнение состояний вдоль оси k_z .

Результаты численных расчетов представлены на рис. 1, 2. Зависимость безразмерной намагниченности $\mathcal{F}(\beta)$ имеет максимум в области $\beta \sim 0.5$, что связано с орбитальным подавлением межслоевого туннелирования. В слабых магнитных полях межслоевая когерентность сохраняется, и намагниченность определяется линейным по полю орбитальным вкладом. Однако при $\beta > 1$ эффективный интеграл перескока начинает быстро уменьшаться, система переходит в квазидвумерный режим, а рост намагниченности сменяется ее подавлением. Положение максимума соответствует области полей, в которой магнитная длина становится порядка межслоевого расстояния.

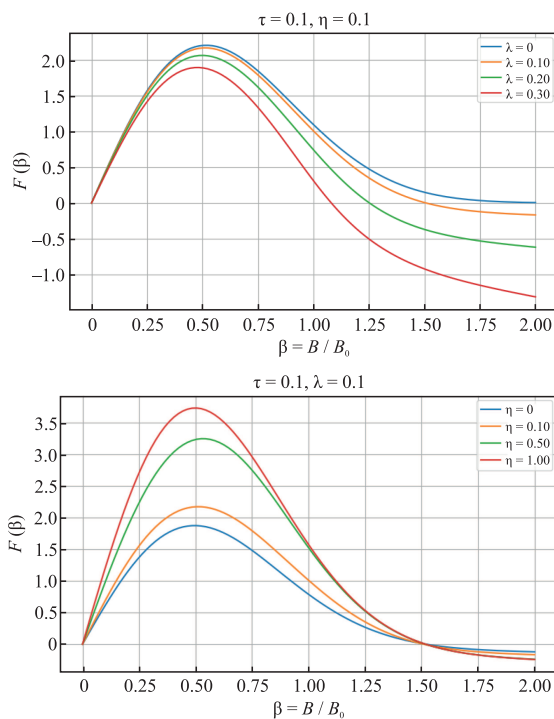


Рис. 1. (Цветной онлайн) Функция, определяющая зависимость намагниченности от магнитного поля

Немонотонность намагниченности обусловлена исключительно орбитальным подавлением туннелирования и присутствует даже без учета спина, однако эффект Зеемана модифицирует эту зависимость в области сильных полей. При $\lambda > 0$ эффект Зеемана приводит к расщеплению спиновых подзон и нарушению компенсации их вкладов в намагниченность. В сильных магнитных полях преимущественно заполняется подзона $\sigma = -1$, энергия которой понижается на величину $g\mu_B B/2$. В результате электронная система приобретает выраженную спиновую поляризацию и вклад нижней подзоны становится доминирующим. Это приводит к появлению отрицательной намагниченности,

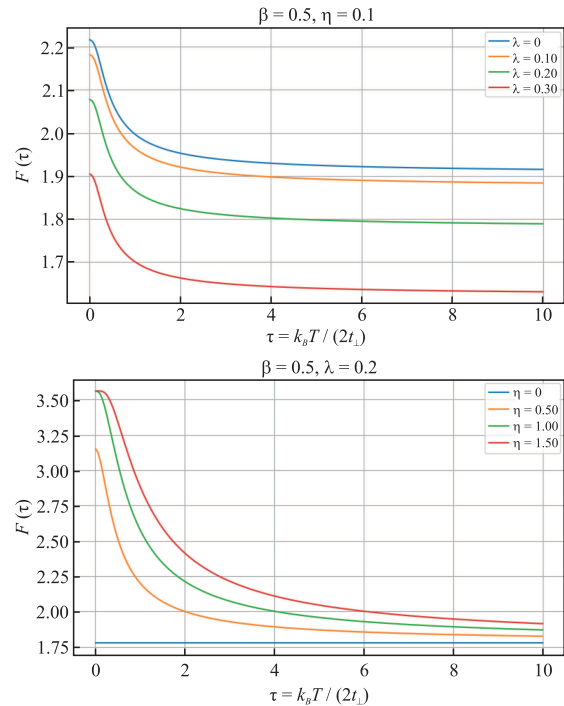


Рис. 2. (Цветной онлайн) Функция, определяющая зависимость намагниченности от температуры вблизи кроссовера

которую в рамках рассматриваемой модели можно интерпретировать как диамагнитный отклик спин-поляризованного квазидвумерного состояния.

С ростом температуры тепловые флуктуации уменьшают степень спиновой поляризации, поэтому величина $|\mathcal{F}|$ монотонно уменьшается с ростом τ . Увеличение параметра λ усиливает зеемановское расщепление, вследствие чего максимум $\mathcal{F}(\beta)$ понижается, а переход к отрицательной области происходит при меньших полях. При достаточно больших λ зеемановская щель становится существенно больше $k_B T$, система оказывается практически полностью спин-поляризованной и намагниченность быстро выходит на насыщение, переставая зависеть от температуры. Слабая температурная зависимость на рис. 2 объясняется тем, что при $\eta \rightarrow 0$ орбитальный вклад в намагниченность практически не зависит от температуры, а спиновая поправка, пропорциональная λ , вносит лишь небольшое изменение. В пределе $\tau \rightarrow \infty$ функция $\mathcal{F}(\beta)$ стремится к конечному значению $2\pi\beta[\exp(-2\beta^2) - \lambda^2]$, которое не зависит от температуры при любых λ . При $\exp(-\beta^2) = \lambda$ высокотемпературный предел намагниченности равен нулю, что указывает на компенсацию орбитального и спиновых вкладов. Данное условие может быть использовано в качестве экспериментального теста теории.

Оценка характерного магнитного поля кроссовера $B_c \sim \hbar/(ed^2)$ для природных слоистых материалов с межслоевым расстоянием $d \sim 1$ нм дает величины порядка сотен тесла, недостижимые в стационарных лабораторных условиях. Однако полученные результаты имеют прямое отношение к двум важным классам систем. Во-первых, это искусственные слоистые гетероструктуры (например, сверхрешетки Nb/Cu, GaAs/AlGaAs, ван-дер-ваальсовы структуры на основе графена и др.), где период d может быть увеличен до 5–10 нм. В таких системах критическое поле снижается до диапазона 5–30 Тл, что делает предсказанный немонотонный ход намагниченности и переход в спин-поляризованное состояние экспериментально доступными. Во-вторых, следует учитывать феноменологический характер параметра B_0 в формуле (7). В образцах с существенным рассеянием (“грязный” предел) поперечный размер электронного облака ограничивается диффузионной длиной $\langle x^2 \rangle$ и может не зависеть от магнитного поля. В этом случае эффективная шкала поля B_0 определяется временем релаксации и может быть значительно меньше оценки B_c , сдвигая область наблюдения кроссовера в диапазон умеренных полей. Для успешного наблюдения эффекта также важно соблюдение температурного условия $k_B T \ll 2t_\perp$. Для различных сверхрешеток $t_\perp \sim 0.5\text{--}5$ мэВ, что соответствует $T \ll 10\text{--}100$ К. При $k_B T \gtrsim 2t_\perp$ тепловые флуктуации разрушают когерентность туннелирования, и эффект подавляется. Наконец, как видно из рис. 1, основные особенности отклика (максимум намагниченности) проявляются уже при $\beta \sim 0.5$, т.е. при полях, вдвое меньших формального критического значения.

Таким образом, в настоящей работе исследовано влияние эффекта Зеемана на квантовый 3D–2D кроссовер в слоистых проводниках в параллельном магнитном поле. Показано, что орбитальное подавление межслоевого туннелирования обуславливает немонотонную зависимость намагниченности от магнитного поля. Расщепление спиновых подзон при больших полях существенно модифицирует поведение системы, а именно перераспределяет заселенность спиновых состояний, приводит к смене знака намагниченности и определяет переход к спин-поляризованному режиму, в котором намагниченность быстро насыщается и фактически теряет температурную зависимость.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук. Никаких дополнительных

грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. N. Miura, *Physics of Semiconductors in High Magnetic Fields* (Oxford University Press, Oxford, 2007).
2. M. I. Dyakonov, A. L. Efros, and D. L. Mitchell, “Magnetic freeze-out of electrons in extrinsic Semiconductors”, *Phys. Rev.* **180**, 813 (1969); DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.180.813>.
3. Y. Imry and Z. Ovadyahu, “Transition to a microscopic diffusion regime and dimensional crossover in a disordered conductor”, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **15**(11), L327 (1982); DOI: [10.1088/0022-3719/15/11/005](https://doi.org/10.1088/0022-3719/15/11/005).
4. Z. Ovadyahu, Y. Gefen, and Y. Imry, “Dimensionality crossover induced by a magnetic field in thin metallic films”, *Phys. Rev. B* **32**, 781 (1985); DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.32.781>.
5. G. Montambaux, “Magnetic field and density waves in quasi 1D conductors”, *Synth. Met.* **29**(2–3), 297 (1989); DOI: [https://doi.org/10.1016/0379-6779\(89\)90914-4](https://doi.org/10.1016/0379-6779(89)90914-4).
6. A. G. Lebed, “Field-induced spin-density-wave phases in quasi-one-dimensional conductors: Theory versus Experiments”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 177001 (2002); DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.177001>.
7. Y. Kurihara, “A Microscopic calculation of the angular-dependent oscillatory magnetoresistance in quasi-two-dimensional systems”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **61**, 975 (1992); DOI: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.61.975>.
8. P. Moses and R. H. McKenzie, “Comparison of coherent and weakly incoherent transport models for the interlayer magnetoresistance of layered Fermi liquids”, *Phys. Rev. B* **60**, 7998 (1999); DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.60.7998>.
9. P. D. Grigoriev, “Weakly incoherent regime of interlayer conductivity in a magnetic field”, *Phys. Rev. B* **83**, 245129 (2011); DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.83.245129>.
10. P. D. Grigoriev and T. I. Mogilyuk, “Angular dependence of magnetoresistance in strongly anisotropic quasi-two-dimensional metals: Influence of Landau-level shape”, *Phys. Rev. B* **90**, 115138 (2014); DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.90.115138>.
11. D. Shoenberg, *Magnetic Oscillations in Metals* (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).
12. P. M. Chaikin, “Magnetic-field-induced transition in quasi-two-dimensional systems”, *Phys. Rev. B* **31**, 4770 (1985); DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.31.4770>.
13. V. M. Krasnov, A. E. Kovalev, V. A. Oboznov, and N. F. Pedersen, “Magnetic field decoupling and 3D–2D crossover in Nb/Cu multilayers”, *Phys. Rev. B* **54**(21), 15448 (1996); DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.54.15448>.

14. A. G. Lebed, “Quantum limit in a parallel magnetic field in layered conductors”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 247003 (2005);
DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.247003>.
15. A. G. Lebed, “Quantum 3D–2D dimensional crossover in quasi-one-dimensional layered conductors”, *Pis'ma v ZhETF* **123**(7), 497 (2026);
DOI: 10.7868/S3034576626040086.