

Параметрическое рассеяние света при излучении холостых фотонов через боковые стороны области нелинейного взаимодействия

Г. Х. Китаева¹⁾, А. В. Осипенков

Физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Россия, Москва

Поступила в редакцию 3 июля 2026 г.

После переработки 13 июля 2026 г.

Принята к публикации 13 июля 2026 г.

Разработан метод анализа неколлинеарных схем сильно невырожденного параметрического рассеяния света с учетом поперечной ограниченности области накачки, при которой низкочастотные холостые фотоны выходят из области нелинейного взаимодействия раньше сигнальных, пересекая границы луча накачки или боковую сторону нелинейного кристалла. Получены общие выражения для вторых и четвертых моментов полей в схемах с потерями холостых фотонов, генерируемых в условиях пространственного синхронизма под различными углами к направлению распространения накачки. Показано, что с ростом угла рассеяния эффекты утечки холостых фотонов через боковую сторону приводят к общему снижению чисел фотонов, детектируемых в сигнальном и холостом каналах. Получен контринтуитивный результат, свидетельствующий о том, что рассмотренный механизм потерь может приводить к существенному росту бифотонной корреляционной функции, определяемому не только снижением общего числа генерируемых фотонов, но и отношением проекций волновых векторов холостого и сигнального излучения на направление накачки.

DOI: 10.7868/S3034576626080147

1. Введение. Явление параметрического рассеяния света (ПР), при котором фотоны лазерной накачки распадаются в нелинейной среде на пары взаимно-коррелированных сигнальных и холостых фотонов [1], в настоящее время находит самое широкое применение. Достаточно отметить, что ПР как в спонтанном режиме (СПР), так и в режиме высокого усиления (сопровождающегося эффектом двухмодового сжатия), лежит в основе многих платформ развивающихся квантовых технологий, от вычислений и криптографии [2], до систем квантовой связи [3] и сенсорики [4]. При малых коэффициентах параметрического преобразования, сигнальные (характеризующиеся частотами ω_s) и холостые фотоны (с частотами $\omega_i = \omega_p - \omega_s$, где ω_p – частота поля накачки) образуют коррелированные пары – бифотоны; с ростом эффективности преобразования образующиеся фотоны начинают группироваться в коррелированные четверки, затем шестерки фотонов и т.д. [5]. Генерация фотонов с высокой степенью группировки важна для многих приложений, позволяющих, например, проводить безэталонную калибровку квантовой эффективности фотодетекторов как счетного [6, 7], так и аналогового типов [8], строить скрытые изображения объектов с помощью однопиксельных детек-

торов [9], применять схемы нелинейной квантовой интерферометрии [10].

Важной количественной характеристикой степени корреляции фотонов в сигнальном и холостом канале ПР является нормированная взаимная корреляционная функция второго порядка. Для одномодового трехчастотного процесса она определяется как отношение квантово-механического среднего от нормально упорядоченного произведения операторов чисел фотонов в сигнальных $\hat{N}_s \equiv a_s^+ a_s$ и холостых модах $\hat{N}_i \equiv a_i^+ a_i$ к произведению средних чисел фотонов в каждой моде:

$$g_{si}^{(2)} = \frac{\langle : \hat{N}_s \hat{N}_i : \rangle}{\langle \hat{N}_s \rangle \langle \hat{N}_i \rangle}. \quad (1)$$

Величина $g_{si}^{(2)}$ при одномодовом детектировании всегда превосходит значение 2, характерное для классических случайных полей с гауссовской (“тепловой”) статистикой. При детектировании большого числа мод излучения $M \gg 1$ в сигнальном и холостом каналах ПР, экспериментально определяются суммарные числа фотонов – $N_s^{\text{det}} \simeq M \eta_s \langle \hat{N}_s \rangle$ в сигнальном канале и $N_i^{\text{det}} \simeq M \eta_i \langle \hat{N}_i \rangle$ в холостом, где η_s и η_i – квантовые эффективности соответствующих каналов детектирования. При этом корреляционная функция определяется после статистического усреднения по ансамблю измеренных значений:

¹⁾e-mail: kitaevagh@my.msu.ru

$$g^{(2)} = \frac{\langle N_i^{\text{det}} N_s^{\text{det}} \rangle}{\langle N_i^{\text{det}} \rangle \langle N_s^{\text{det}} \rangle}. \quad (2)$$

Теоретический расчет значений корреляционной функции в режиме СПР часто проводится с использованием известных выражений для бифотонной волновой функции [11]. Более общий результат, справедливый для ПР при любом значении коэффициента параметрического усиления, может быть получен после вычисления коэффициентов матрицы рассеяния $\hat{U}$, определяющих эволюцию средних амплитуд операторов сигнальных и холостых полей при совместном распространении с накачкой от входа ($x = 0$) к выходу ($x = L$) из кристалла [1]:

$$\begin{aligned} \langle a_s^+(L) \rangle &= \sum_{s'} U_{ss'} \langle a_{s'}^+(0) \rangle + \sum_{i'} U_{si'} \langle a_{i'}^+(0) \rangle, \\ \langle a_i^+(L) \rangle &= \sum_{s'} U_{is'} \langle a_{s'}^+(0) \rangle + \sum_{i'} U_{ii'} \langle a_{i'}^+(0) \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Соотношения (3) записаны для квантово-механических средних от операторов, и в таком виде могут рассматриваться даже при наличии линейных потерь излучения в среде, поскольку средние от операторов “термостата”, участвующих во взаимодействии, дают нулевой вклад [12]. Если же эффекты поглощения или линейного рассеяния волн в нелинейной среде (как правило, кристалле) отсутствуют, коэффициенты матрицы $\hat{U}$ входят в похожие соотношения Боголюбова для самих операторов. Соотношения (3) также учитывают общий случай многомодового взаимодействия, возникающего из-за возможной расстройки пространственного синхронизма и многомодового характера накачки. В этих случаях каждая мода выходного излучения связана условиями нелинейного преобразования с широкими пространственными и/или частотными спектрами входных мод каждого канала, по которым идет суммирование [13]. Расчет элементов матрицы производится путем решения связанных нелинейных уравнений, описывающих эволюцию каждого из операторов поля ПР в нелинейной среде. В простейшем случае, когда линейные потери пренебрежимо малы, это система уравнений Гейзенберга вида

$$\begin{cases} \frac{da_s(x)}{dx} = i\gamma a_i^+(x) e^{i\Delta k_x x}, \\ \frac{da_i^+(x)}{dx} = -i\gamma a_s(x) e^{-i\Delta k_x x}, \end{cases} \quad (4)$$

где γ – коэффициент параметрического усиления, определяемый амплитудой поля накачки E_p , действующим значением квадратичной восприимчивости кристалла $\chi^{(2)}$, частотами и проекциями волновых векторов сигнальных и холостых волн k_{sx} , k_{ix} на

ось X , выбранную вдоль направления распространения накачки в кристалле:

$$\gamma \equiv \frac{2\pi\omega_s\omega_i}{c^2\sqrt{k_{sx}k_{ix}}} E_p \chi^{(2)}; \quad (5)$$

$\Delta k_x = k_p - k_{sx} - k_{ix}$ – расстройка фазового синхронизма. Получив значения элементов матрицы $\hat{U}$, легко рассчитать средние моменты операторов полей на выходе среды, входящие в выражения (1) или (2) для корреляционной функции. В отсутствие поглощения – путем простого квантово-механического усреднения соответствующих произведений выходных операторов с учетом вакуумного состояния полей на входе, при наличии поглощения – с помощью обобщенного поляритонного закона Кирхгофа–Клышко [1]. Упрощенный итог всех подобных расчетов выражений для корреляционной функции обычно имеет вид простого соотношения

$$g^{(2)} = 1 + \frac{1}{M} + \frac{1}{M\langle \hat{N} \rangle}. \quad (6)$$

Это соотношение обычно и применяется в дальнейшем при расчете эффектов, основанных на корреляциях бифотонного поля [14, 15]. Например, при определении числа излученных фотонов в каждом канале на основании экспериментально измеренной корреляционной функции $g^{(2)}$, с последующим использованием каналов ПР в качестве источников с прокалиброванным числом фотонов [16]; косвенно – при создании однофотонных источников методом условного отбора показаний в двух каналах [17], а также в других актуальных приложениях. В нелинейных кристаллах без поглощения простое решение дифференциальных уравнений (4) дает одинаковое число фотонов в моде сигнального и холостого излучения. При точном фазовом синхронизме решения имеют вид

$$\langle \hat{N}_s \rangle = \langle \hat{N}_i \rangle = \text{sh}^2(\gamma L). \quad (7)$$

Числа мод детектирования считаются одинаковыми и равными числу мод в том канале, где их больше. Это легко оправдать, формально приписав нулевую квантовую эффективность при регистрации недостающих мод в более узком канале [16, 18, 19].

Тем не менее, соотношение (6) имеет ограниченный характер применения, о котором часто забывают. Будучи основано на использовании нелинейных уравнений (4), оно справедливо только для таких геометрий трехчастотного параметрического взаимодействия, в которых волны сигнальных, холостых частот и накачки распространяются совместно в пре-

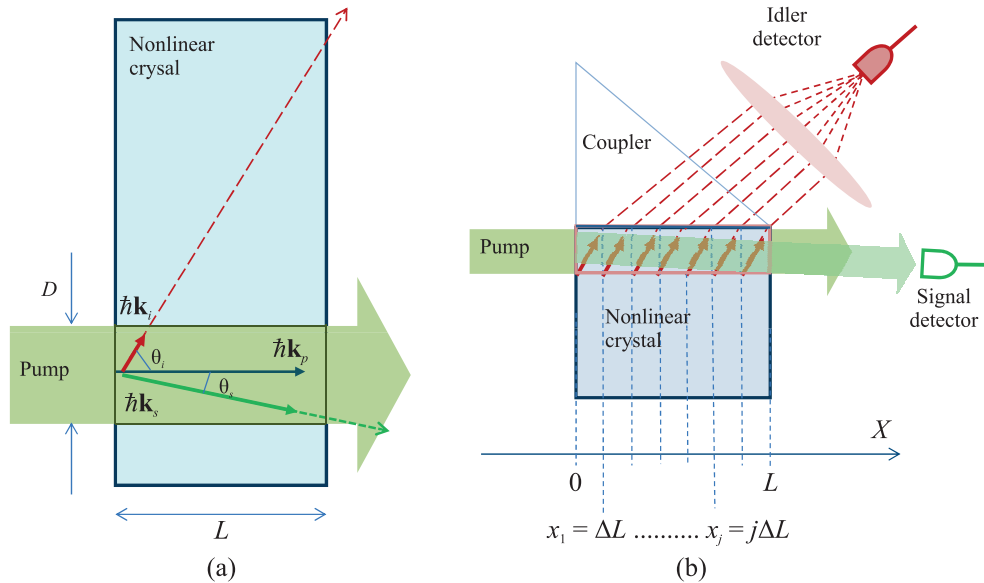


Рис. 1. (Цветной онлайн) Схематические изображения: (а) – направлений распространения холостого (красные линии) и сигнального (зеленые линии) фотонов ПР, родившихся в результате распада одного фотона накачки, в случае утечки холостого фотона через боковую сторону объема нелинейного взаимодействия – области пересечения луча накачки и нелинейного кристалла; (б) – условий генерации и детектирования фотонов, рождающихся в слоях на различных расстояниях от входной грани кристалла (в качестве примера изображен вариант выведения холостых фотонов через боковую грань с помощью сопрягающего устройства)

делах всей области кристалла, заполненной излучением накачки. То есть не выходят из поперечного сечения этой области (так называемого “объема нелинейного взаимодействия”) до тех пор, пока вместе не покинут кристалл. Такое возможно в идеальном кристалле, неограниченном в поперечных направлениях, либо в случае коллинеарного распространения всех участвующих в ПР волн. Вероятно, при неколлинеарном распространении сигнальных и холостых волн под малыми углами к накачке, имеющей достаточно большой диаметр сечения, возможно некоторое нарушение условий применимости соотношения (6), которое не приводит к значительным ошибкам даже при использовании ПР в квантовой фотометрии [20, 21]. Однако во всех подобных случаях неточность в интерпретации значений $g^{(2)}$ зависит от действующей длины кристалла. Например, в случае поперечного распределения плотности мощности накачки в виде меандра с шириной D – от того, насколько эта длина превосходит расстояние $D/\tan \vartheta_0$, на котором либо сигнальная волна, распространяясь под углом $\vartheta_0 = \vartheta_s$, либо холостая волна под углом $\vartheta_0 = \vartheta_i$ покинет объем взаимодействия (см. рис. 1а). Особенно значительные ошибки в интерпретации величины бифотонной корреляционной функции $g^{(2)}$ могут возникнуть при сильно частотно-невырожденном ПР, когда низкочастотные холостые фотоны излучаются в направлениях пространственного синхро-

низма под большими углами $\vartheta_i \gg \vartheta_s$, и покидают объем взаимодействия гораздо раньше, чем высокочастотные сигнальные фотоны. При генерации оптико-терагерцовых бифотонов [12, 13] эта проблема становится особенно заметной. В силу ограниченной чувствительности, значительного темнового шума имеющихся детекторов терагерцового излучения, возможного поглощения терагерцовых волн в материале нелинейного кристалла, в этих схемах применяется выведение холостых фотонов через боковую поверхность нелинейного кристалла [22, 23]. При этом фотоны, рождающиеся на разных расстояниях от входной грани кристалла, неизбежно покидают кристалл гораздо раньше, чем фотоны сигнального излучения, регистрируемые после прохождения выходной грани кристалла, нормально ориентированной по отношению к направлению накачки (рис. 1б).

В настоящей работе в простых, но вполне адекватных приближениях проведен расчет бифотонной корреляционной функции $g^{(2)}$, последовательно учитывающий преждевременную “утечку” холостых фотонов через боковую границу объема нелинейного взаимодействия. Показано, что эффекты неполного заполнения объема даже одной из волн-участниц параметрического взаимодействия могут приводить не только к снижению показаний детекторов излучения в сигнальном и холостом каналах, но и к значительному увеличению квантовой добавки к корреляцион-

ной функции $g^{(2)}$, регистрируемому при тех же уровнях параметрического усиления.

2. Деление кристалла на слои с сохранением фотонов в области взаимодействия. Рассмотрим схему ПР в одной плоскости в прозрачном нелинейном кристалле общей длины L , заполненном излучением накачки в пределах сечения D . Поперечное ограничение объема взаимодействия всегда имеет место на практике, чаще всего из-за ограниченности луча накачки, реже – из-за волноводного распространения накачки в тонком кристаллическом слое или схемы вывода длинноволновых (например, терагерцевых) фотонов через боковую грань кристалла. На данном этапе будем полагать, что эффекты, связанные с утечкой сигнального излучения через боковые стороны нелинейного объема, пренебрежимо малы. Это приближение справедливо, когда сигнальные фотоны распространяются под малыми углами, для которых $\text{tg } \vartheta_s \ll D/L$. Однако пусть для холостых волн, распространяющихся под значительно более высокими углами к накачке $\vartheta_i \gg \vartheta_s$, это не так. Утечкой холостых фотонов из объема взаимодействия можно пренебречь лишь в пределах небольших участков – слоев кристалла длиной ΔL , для которых выполняется аналогичное неравенство $\text{tg } \vartheta_i \ll D/\Delta L$. Пронумеруем такие участки индексами j , изменяющимися от 1 до K так, что каждый из участков j находится в интервале от $x_{j-1} = (j-1)\Delta L$ до $x_j = j\Delta L$ вдоль оси X , направленной вдоль накачки (рис. 1b). Решим задачу расчета вторых моментов поля ПР в простейшем приближении, учитывая в пределах каждого слоя трехчастотное взаимодействие только одномодовых волн, связанных условием точного пространственного синхронизма. В этих приближениях для каждого участка кристалла длиной ΔL справедливы решения уравнений вида (4) при $\Delta k_x = 0$. Это позволяет легко определить элементы матриц рассеяния $\hat{U}^{(j)}$, которые подобно соотношениям (3) связывают операторы на входе и выходе из каждого слоя j :

$$a_s^{(j)+}(j\Delta L) = U_{ss}^j a_s^{(j)+}((j-1)\Delta L) + U_{si}^j a_i^{(j)}((j-1)\Delta L), \quad (8)$$

$$a_i^{(j)+}(j\Delta L) = U_{is}^j a_s^{(j)}((j-1)\Delta L) + U_{ii}^j a_i^{(j)+}((j-1)\Delta L).$$

Элементы матриц рассеяния в данном случае одинаковы во всех слоях и описываются гиперболическими функциями – хорошо известными решениями системы (4): $U_{ss}^j = U_{ii}^j = \text{ch}(\gamma\Delta L)$, $U_{si}^j = U_{is}^j = -i \text{sh}(\gamma\Delta L)$.

По условию рассматриваемой задачи, на входе в любой слой j холостое поле находится в ваку-

умном состоянии, поскольку холостое излучение, сгенерированное в предыдущем слое, покинуло область нелинейного взаимодействия. Поэтому $\langle a_i^{(j)+}((j-1)\Delta L) a_i^{(j)}((j-1)\Delta L) \rangle = 0$. Однако сигнальное излучение поступает из предыдущего слоя. Это иллюстрирует представленная на рис. 2 блок-схема трансформации операторов полей при переходе от слоя к слою. В соотношениях (8) логично положить, что операторы сигнального поля на входе в слой j связаны с операторами на выходе из слоя $j-1$ следующим образом:

$$a_s^{(j)}((j-1)\Delta L) = a_s^{(j-1)}((j-1)\Delta L). \quad (9)$$

В этих терминах уравнения Боголюбова (8) для операторов слоя принимают вид рекуррентных соотношений

$$a_s^{(j)+}(j\Delta L) = \text{ch}(\gamma\Delta L) a_s^{(j-1)+}((j-1)\Delta L) - i \text{sh}(\gamma\Delta L) a_i^{(j)}((j-1)\Delta L), \quad (10)$$

$$a_i^{(j)+}(j\Delta L) = -i \text{sh}(\gamma\Delta L) a_s^{(j-1)}((j-1)\Delta L) + \text{ch}(\gamma\Delta L) a_i^{(j-1)+}((j-1)\Delta L).$$

Чтобы в дальнейшем посчитать вторые и четвертые моменты полей, определяющие показания детекторов и их взаимную корреляцию $g^{(2)}$, вначале найдем матрицу рассеяния $\hat{V}^{(j)}$ для части кристалла, начинающейся на его входе ($x = 0$) и заканчивающейся на слое j , т.е. в точках с координатами $x = j\Delta L$. Согласно определению такой матрицы,

$$a_s^{+(j)}(j\Delta L) = V_{ss}^{(j)} a_s^{+(1)}(0) + \sum_{m=1}^j V_{sm}^{(j)} a_i^{(m)}((m-1)\Delta L), \quad (11)$$

$$a_i^{+(j)}(j\Delta L) = V_{is}^{(j)} a_s^{(1)}(0) + \sum_{m=1}^j V_{im}^{(j)} a_i^{(m)+}((m-1)\Delta L).$$

Очевидно, что для участка, содержащего лишь первый слой, элементы матрицы $\hat{V}^{(1)}$ совпадают с элементами $\hat{U}^{(1)}$ входящими в соотношения (8). На входе этого участка поля находятся в вакуумном состоянии при ПР. Однако уже на входе второго участка присутствуют сигнальные фотоны, родившиеся в предыдущем слое. Исходя из рекуррентных соотношений (10), легко получить выражения для элементов матриц $\hat{V}^{(j)}$ произвольного слоя j :

$$V_{ss}^{(j)} = \text{ch}^j(\gamma\Delta L), \quad V_{sm}^{(j)} = -i \text{sh}(\gamma\Delta L) \text{ch}^{j-m}(\gamma\Delta L),$$

Сравним полученные выражения для чисел фотонов, приходящихся на одну моду, с хорошо известным соотношением (7), которое предсказывает стандартная теория без учета эффектов утечки фотонов. С точки зрения нашего рассмотрения, моды сигнального и холостого излучения в этой теории являются K -кратно вырожденными. Для адекватного сравнения, полученные здесь числа фотонов в модах $\langle N_s \rangle$ и $\langle N_i \rangle$ необходимо умножать на число бифотонных мод K , появляющихся в нашем рассмотрении вместо одной. На рисунке 3 представлены рассчитанные та-

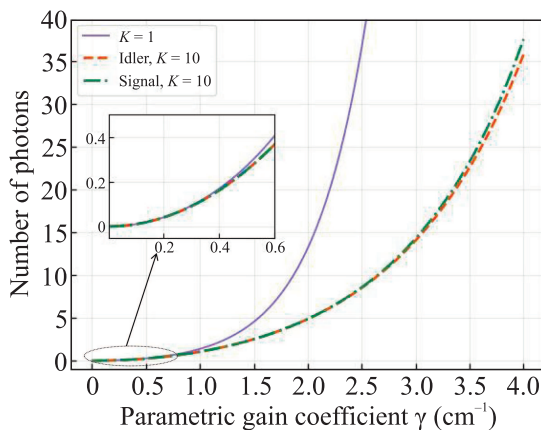


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимости средних чисел фотонов в каналах детектирования холостого (красная пунктирная линия) и сигнального (зеленая штрихпунктирная линия) излучения от коэффициента параметрического усиления при выходе холостых фотонов из объема нелинейного взаимодействия на расстояниях, в 10 раз меньших общей длины кристалла 1 см (расчет при $K = 10$); сплошная линия – то же при коллинеарном процессе ($K = 1$). На вставке: средние числа фотонов при малых значениях коэффициента параметрического усиления

ким образом графики зависимости чисел сигнальных и холостых фотонов от коэффициента параметрического усиления γ . Расчеты проведены для кристалла длиной $L = 1$ см, на которой укладывается 10 слоев длиной 0.1 см. При ширине пучка накачки 1 мм такое число слоев K соответствует случаю генерации холостых фотонов под углами $\vartheta_i \simeq 45^\circ$. Подобная геометрия эксперимента может иметь место при ПР света на холостых фотонах инфракрасных (ИК) частот. При уменьшении частоты холостых волн до терагерцового диапазона угловые отстройки ϑ_i могут возрасти до значений порядка 60° [22], чему будут соответствовать значительно большие числа слоев, $K \simeq 15$ и выше. На этом же рисунке изображены соответствующие числа фотонов, которые наблюдались бы при коллинеарном взаимодействии волн в

кристалле такой же длины. (Как и следовало ожидать, расчеты по известной формуле (7) и по полученным выше (14а) и (15) для 1 слоя длиной 1 см дают одинаковый результат.) Видно, насколько эффект преждевременного выхода холостых фотонов снижает рост чисел фотонов, происходящий в обоих каналах при увеличении коэффициента параметрического усиления. При этом, начиная с некоторых значений коэффициента усиления, сильнее тормозится рост чисел холостых фотонов. Отметим, что, несмотря на отсутствие поглощения волн кристаллом в обоих каналах, учет эффектов утечки в нашей модели приводит при больших коэффициентах усиления к появлению небольшой, но нарастающей с ростом γ разницы в числах детектируемых сигнальных и холостых фотонов. При фиксированном усилении γL данная разница тем больше, чем больше число эффективных слоев K , т.е. чем короче отрезок эффективного трехволнового взаимодействия ΔL . По всей видимости, появление ненулевой разницы $N_s^{\text{det}} - N_i^{\text{det}}$ связано с ограничением области применения рассматриваемой модели дискретных слоев. Вместе с тем, данная разница появляется только при нарушении условия $\gamma \Delta L \ll 1$ и всегда остается много меньше отличия чисел фотонов в обоих каналах от тех значений, которые предсказывает не учитывающая эффекты утечки стандартная теория ПР.

В пределе малого усиления на длине одного слоя, когда $\gamma \Delta L \ll 1$ и $\text{ch}(\gamma \Delta L) \approx 1 + (\gamma \Delta L)^2/2$, полученные выражения (14а) и (15) дают одинаковые числа фотонов на моду в обоих каналах. При умножении на K получаем зависимость от длины кристалла $N_s^{\text{det}, \text{SPDC}} = N_i^{\text{det}, \text{SPDC}} = (\gamma L)^2$, совпадающую с результатом стандартной теории в режиме СПР (при $\gamma L \ll 1$), т.е. без учета эффектов утечки через боковые стороны объема нелинейного взаимодействия. Однако, если коэффициент параметрического усиления γ настолько велик, что условие $\gamma \Delta L = \gamma D / \text{tg} \vartheta_i \ll 1$ не выполняется, числа детектируемых фотонов будут меньше предсказываемых стандартной теорией. Отметим, что совпадение результатов, получаемых при учете и без учета бокового выхода холостых фотонов, имеет место только в режиме СПР в кристалле полной длины, т.е. когда усиление слабо не только в пределах одного слоя, но и на всем расстоянии L , т.е. $\gamma L \ll 1$. Если же последнее условие не выполняется, то выражения (14а) и (15) предсказывают более низкие значения чисел фотонов, чем известное соотношение (7). Вплоть до нарушения условия $\gamma \Delta L \ll 1$ зависимость чисел фотонов от растущей величины γL остается такой же медленной, как и при СПР.

Отметим, что в рассматриваемой схеме детектирования (рис. 1b) возможные потери фотонов в каналах передачи излучения от кристалла к детекторам не берутся в расчет, поскольку не являются принципиальными для анализа эффектов, связанных с выходом фотонов из области взаимодействия еще на стадии генерации в кристалле. К тому же данные потери, которые можно учесть при расчете чисел фотонов, введя полные квантовые эффективности трактов η_s и η_i , не влияют на величину нормированной корреляционной функции бифотонного поля.

4. Корреляционная функция бифотонного поля. По аналогии с тем, как были получены соотношения (14) и (15) для чисел фотонов, среднее от произведения этих чисел в единичных сигнальных и холостых модах должно рассчитываться следующим образом:

$$\langle :N_s N_i: \rangle = \quad (16)$$

$$\left\langle a_s^{(K)+} (\gamma L) \sum_{j=1}^K a_i^{(j)+} (j \Delta L) a_s^{(K)} (\gamma L) \sum_{j'=1}^K a_i^{(j')} (j' \Delta L) \right\rangle / K.$$

Рассчитаем нормированную корреляционную функцию $g^{(2)} = \frac{\langle :N_s N_i: \rangle}{\langle N_s \rangle \langle N_i \rangle}$, вновь опираясь на введенное ранее представление полевых операторов (11). Учитывая (12) и (16), в итоге получим:

$$g^{(2)} = 2 + \frac{1}{\text{ch}^{2K}(\gamma L/K) - 1} \simeq 2 + \frac{K}{N_i^{\text{det}}}. \quad (17)$$

Анализ этого выражения показывает, что квантовая добавка к классическому уровню корреляционной функции $g_q^{(2)} = g^{(2)} - 2$ может значительно, в K раз превосходить $1/N_i^{\text{det}}$ – величину, наблюдаемую при коллинеарном ПР. Довольно неожиданным результатом является также и то, что потери, вызванные утечкой холостых фотонов, приводят не к уменьшению квантовой части корреляционной функции, а к ее росту. Как известно, учет потерь, вызванных поглощением холостых фотонов в материале кристалла, приводит к обратному эффекту – корреляции снижаются [13].

На рисунке 4 приведены результаты расчета корреляционной функции на основании полученного соотношения (17). Как и на предыдущем рисунке, предполагается, что длина кристалла 1 см, но рассмотрены различные числа слоев, укладываемых на этой длине. Случай $K = 1$, очевидно, соответствует коллинеарному процессу, а чем больше угол между холостыми фотонами и накачкой, тем выше K и меньше расстояние ΔL , на котором холостая волна покидает область нелинейного взаимодействия. Вид-

но, что с ростом числа эффективных слоев возрастает величина корреляционной функции.

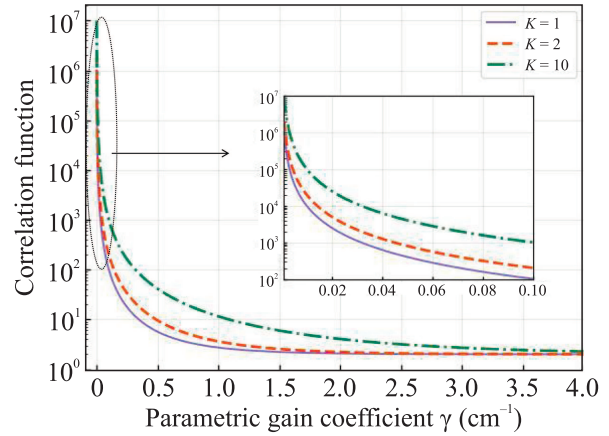


Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимости корреляционной функции бифотонного поля от коэффициента параметрического усиления при выходе холостых фотонов из объема нелинейного взаимодействия на расстояниях, которые в 2 (красная пунктирная линия, $K = 2$) или в 10 раз (зеленая штрих-пунктирная линия, $K = 10$) меньше общей длины кристалла 1 см; сплошная линия – то же при коллинеарном процессе ($K = 1$). На вставке: зависимости в области малых коэффициентов параметрического усиления более подробно

При необходимости полученный результат (17) может быть расширен и на случай взаимодействия в пределах большого числа детектируемых пространственно-временных мод. При этом вместо (6) следует ожидать зависимость корреляционной функции от числа мод вида

$$g^{(2)} \simeq 1 + \frac{1}{M} + \frac{K}{N_{i,M}^{\text{det}}}. \quad (17a)$$

Здесь $N_{i,M}^{\text{det}} \simeq MK(\text{ch}^{2K}(\gamma L/K) - 1)$ – полное число детектируемых фотонов. Квантовая добавка и в этом случае будет в K раз выше, чем обратная величина от полного числа фотонов, падающих на детектор. Полученный результат может быть полезен при построении систем квантовой информации и сенсорики, в которых требуются высокие значения корреляционной функции бифотонного поля, однако минимальное значение обнаружимых детекторами сигналов не позволяет переходить в режим регистрации потоков из малых чисел фотонов. Особенно это актуально для задач, требующих регистрации слабых потоков излучения в дальнем ИК и терагерцовом диапазонах [22].

Из соотношения (17) следует, что в режиме слабого усиления на длине одного слоя, когда $\gamma \Delta L \ll 1$,

Таблица 1. Параметры схем ПР на трех различных длинах волн холостого излучения (длина волны накачки 523 нм)

	Idler wavelength λ_i		
	2 μm (<i>ooe</i>)	5 μm (<i>ooe</i>)	300 μm (<i>eee</i>)
Signal wavelength λ_s	708 nm	584 nm	524 nm
Signal angle ϑ_s	4.35°	3.38°	0.20°
Idler angle ϑ_i	12.8°	34.9°	6.6°
Crystal length L	10 mm	10 mm	10 mm
Pump diameter D	1.8 mm	1.4 mm	0.9 mm
Layer length ΔL	10 mm	2 mm	0.5 mm
Number of layers K	1	5	20
Parametric gain coefficient γ	0.016 cm ⁻¹	0.016 cm ⁻¹	0.096 cm ⁻¹
Change in the number of biphotons compared to collinear PDC $N_i^{\text{det}}/N_{i,K=1}^{\text{det}} = \left(\frac{\text{sh}(\gamma\Delta L)}{\text{sh}(\gamma L)} \cdot \frac{\text{ch}^K(\gamma\Delta L)-1}{\text{ch}(\gamma\Delta L)-1} \right)^2$	No change	0.999 times	0.997 times
Change in quantum part of the correlation function compared to collinear PDC $g_q^2/g_{q,K=1}^{(2)} \simeq \frac{\text{sh}^2(\gamma L)}{\text{ch}^{2K}(\gamma\Delta L)-1}$	No change	5.0 times	20.1 times

квантовая добавка к корреляционной функции будет определяться суммой чисел фотонов, рожденных в отдельных слоях: $g_q^{(2)} = 1/[K(\gamma\Delta L)^2]$. Эта величина может быть гораздо выше, чем соответствующее превышение корреляционной функции при коллинеарном процессе СПР, которое в последнем случае определяется всей длиной кристалла: $g_{q,SPDC}^{(2)} = 1/(\gamma L)^2$ (см. вставку на рис. 4). Однако отметим, что общее число слоев K не может наращиваться бесконечно путем уменьшения сечения луча накачки и/или увеличения общей длины кристалла. При неколлинеарном параметрическом процессе сигнальные (более высокочастотные) фотоны также распространяются под некоторыми ненулевыми углами по отношению к накачке θ_s и могут покидать область нелинейного взаимодействия через боковые стороны. При значительной длине кристалла и фокусировке накачки в тонкую нить подобные эффекты утечки сигнальных фотонов на расстояниях, больших чем $\Delta L_s \ll D/\text{tg } \vartheta_s$, также должны браться во внимание. Проведенное выше рассмотрение справедливо до тех пор, пока общая длина кристалла не превосходит длины более протяженных слоев ΔL_s , в пределах которых подавляющая часть сигнальных фотонов не покидает область нелинейного взаимодействия. Это означает, что число слоев K в данной модели ПР не больше максимального значения $K_{\text{max}} = \Delta L_s/\Delta L_i = \text{tg } \vartheta_i/\text{tg } \vartheta_s$. При точном синхронизме углы рассеяния зависят от соотношения волновых векторов сигнальных и холостых волн, так что $\sin \vartheta_i/\sin \vartheta_s = k_s/k_i$. Если углы рассеяния сигнальных волн малы и $\sin \vartheta_s \approx \text{tg } \vartheta_s \approx \vartheta_s$, то число слоев, рассчитанное как отношение проекций волновых векторов $K_{\text{max}} = k_{sx}/k_{ix}$, позволяет оценить предель-

ное увеличение квантовой добавки к корреляционной функции.

Рассмотрим в качестве примера несколько вариантов экспериментальных схем ПР на фотонах различных холостых частот в кристалле Mg:LiNbO₃ длиной 1 см, вырезанном параллельно оптической оси, от импульсной накачки на длине волны 523 нм – второй гармонике излучения Nd:ILF лазера с длительностью импульсов 25 нс, частотой повторения 7 кГц и одинаковой средней мощностью. В табл. 1 для сравнения приведены ключевые параметры, рассчитанные для схем рассеяния на верхней поляритонной ветви в геометрии *ooe* (необыкновенно поляризована накачка, нелинейный коэффициент d_{31}) – на двух длинах волн холостого излучения, 2 и 5 мкм, а также для схемы рассеяния на нижней поляритонной ветви в геометрии *eee* (все волны необыкновенно поляризованы, нелинейный коэффициент d_{33}) – на частоте холостого излучения 1 ТГц. При расчете использовались данные о дисперсии показателей преломления кристалла в терагерцовом, видимом и ИК диапазонах из работ [24] и [25].

Расчеты показывают, что при выбранных параметрах экспериментальной установки и сечениях накачки в районе 1–2 мм влияние эффекта утечки холостых фотонов пренебрежимо мало, если длина холостой волны не выше 2 мкм. Изменение чисел фотонов остается также практически незаметным при дальнейшем увеличении длины холостой волны в ИК и терагерцовом диапазонах. Однако при этом может наблюдаться довольно значительный рост корреляционной функции бифотонов, вплоть до 20-кратного увеличения в терагерцовом диапазоне холостых частот. Отметим, что рассмотренная в статье прибли-

женная модель не учитывает возможной неоднородности поперечного распределения плотности мощности накачки. Экспериментальная проверка точности расчетов может быть проведена путем исследования поведения величины корреляционной функции при изменении сечения пучка накачки в кристалле.

5. Заключение. В данной работе был рассмотрен вариант неколлинеарной схемы параметрического рассеяния света, в которой холостые низкочастотные фотоны преждевременно покидают область нелинейного взаимодействия в кристалле, пересекая луч накачки или боковую сторону нелинейного кристалла. Продемонстрирован достаточно простой теоретический подход к расчетам корреляционной функции и чисел фотонов в каналах детектирования при неколлинеарном ПР, основанный на представлении кристалла в виде набора слоев меньшей длины ΔL_i , в пределах которых подавляющая часть холостых фотонов из рождающихся в слое коррелированных бифотонных пар еще остается в объеме нелинейного взаимодействия. Максимальное число слоев такого типа определяется соотношением проекций волновых векторов сигнального и холостого излучения на направление накачки в кристалле $K_{\max} = k_{sx}/k_{ix}$. Показано, что применение данного подхода накладывает специфические условия на коммутаторы операторов рождения и уничтожения холостых фотонов на входе каждого слоя – такие, как если бы операторы полей в разных слоях относились к различным модам излучения.

В рамках проведенного рассмотрения было показано, что преждевременная утечка холостых фотонов из области взаимодействия может приводить к общему снижению средних чисел сигнальных и холостых фотонов в пространственно-частотных модах на выходе из нелинейной среды по отношению к числам, генерируемым в коллинеарной геометрии, а также к значительному возрастанию квантового вклада во взаимную корреляционную функцию бифотонного поля. Согласно полученным соотношениям, отличие в числах фотонов пренебрежимо мало в режиме спонтанного ПР для всей длины кристалла L , т.е. когда $\gamma \ll 1/L$. Однако это отличие становится заметным уже при значениях коэффициента параметрического усиления в интервале $1/L \leq \gamma \ll 1/\Delta L_i$, и далее с ростом коэффициента γ увеличивается все быстрее. При этом вызванный эффектами утечки холостых фотонов рост корреляционной функции обеспечивается не только за счет уменьшения чисел фотонов, но и благодаря снижению длины слоя параметрического взаимодействия ΔL_i , в пределах которого взаимное усиление волн происходит без потери

рождающихся холостых фотонов. Как и в коллинеарной геометрии, квантовый вклад в корреляционную функцию растет при уменьшении γ и переходе в спонтанный режим, однако сохраняется и его превышение над значением корреляционной функции в коллинеарной геометрии ПР, кратное числу слоев $K = L/\Delta L_i$.

Разработанный подход может применяться в случаях, когда не существенна расходимость волн в каналах ПР, связанная с допустимой расстройкой фазового синхронизма. Неучет многомодового характера ПР, обусловленного неточным синхронизмом, является основным приближением принятой в работе модели ПР. В частности, это приближение накладывает ограничение на минимальную ширину слоев ΔL_i , в пределах которых подавляющая часть холостых фотонов из рождающихся в слое коррелированных бифотонных пар еще остается в объеме нелинейного взаимодействия. Последовательный учет допустимой расстройки фазового синхронизма позволит в будущем также определить степень влияния эффектов утечки на форму линии ПР в холостом и сигнальном каналах. Исследование возможных искажений будут важны для оценки точности обработки сигналов в схемах квантовых интерферометров на основе неколлинеарных процессов СПР.

Однако, несмотря на все ограничения принятой модели, полученные результаты выявляют особенности квантовых параметров ПР в неколлинеарной геометрии нелинейно-оптического взаимодействия. Учет возможного негативного или, напротив, позитивного влияния этих особенностей одинаково необходим при создании квантово-оптических устройств. В частности, при планировании схем генерации одnofотонных состояний методом условного отбора, при развитии методов построения скрытых изображений, основанных на высокой степени корреляции фотонов, при определении точности основанных на СПР методов абсолютной квантовой фотометрии, а также в других применениях ПР в квантовой метрологии и сенсорике [26].

Авторы выражают глубокую благодарность П. А. Прудковскому за плодотворные дискуссии и ценные замечания. А. В. Осипенков выражает благодарность Фонду развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

Финансирование работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант # 22-12-00055-П).

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. D. N. Klyshko, *Photons and Nonlinear Optics* (Gordon and Breach Science Publishers, N.Y., 1988).
2. P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto, T. C. Ralph, J. P. Dowling, and G. J. Milburn, "Linear optical quantum computing with photonic qubits", *Rev. Mod. Phys.* **79**, 135 (2007).
3. N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, "Quantum cryptography", *Rev. Mod. Phys.* **74**, 145 (2002).
4. V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone, "Advances in quantum metrology", *Nat. Photonics* **5**, 222 (2011).
5. A. Christ, K. Laiho, A. Eckstein, K. N. Cassemiro, and C. Silberhorn, "Probing multimode squeezing with correlation functions", *New J. Phys.* **13**, 033027 (2011).
6. Д. Н. Клышко, "Об использовании двухфотонного света для абсолютной калибровки фотоэлектрических детекторов", *Квантовая электроника* **7**, 1932 (1980) [D. N. Klyshko, "Use of two-photon light for absolute calibration of photoelectric detectors", *Sov. J. Quantum Electronics* **10**, 1112 (1980)].
7. Z. Jin, B. Yu, J. Chu, J. Li, and X. Zheng, "Study on the correction factors in detection efficiency measurements based on spontaneous parametric down-conversion", *Opt. Express* **33**, 27358 (2025).
8. D. A. Safronov, P. A. Prudkovskii, A. V. Osipenko, and G. Kh. Kitaeva, "Elementary responses of analog photodetectors and absolute calibration of their efficiency", *J. Appl. Phys.* **137**, 184402 (2025).
9. J. H. Shapiro and R. W. Boyd, "The physics of ghost imaging", *Quantum Inf. Process* **11**, 949 (2012).
10. M. V. Chekhova and Z. Y. Ou, "Nonlinear interferometers in quantum optics", *Adv. Opt. Photon.* **8**, 104 (2016).
11. M. H. Rubin, D. N. Klyshko, Y. H. Shih, and A. V. Sergienko, "Theory of two-photon entanglement in type-II optical parametric down-conversion", *Phys. Rev. A* **50**, 5122 (1994).
12. G. Kh. Kitaeva, V. V. Kornienko, A. A. Leontyev, and A. V. Shepelev, "Generation of optical signal and terahertz idler photons by spontaneous parametric down-conversion", *Phys. Rev. A* **98**, 063844 (2018).
13. G. Kh. Kitaeva, A. A. Leontyev, and P. A. Prudkovskii, "Quantum correlation between optical and terahertz photons generated under multimode spontaneous parametric down-conversion", *Phys. Rev. A* **101**, 053810 (2020).
14. О. А. Иванова, Т. С. Исхаков, А. Н. Пенин, М. В. Чехова, "Многофотонные корреляции при параметрическом рассеянии света и их измерение в импульсном режиме", *Квантовая электроника* **36**, 951 (2006) [O. A. Ivanova, T. S. Iskhakov, A. N. Penin, and M. V. Chekhova, "Multiphoton correlations in parametric down-conversion and their measurement in the pulsed regime", *Quantum Electronics* **36**, 951 (2006)].
15. G. Brida, I. P. Degiovanni, M. Genovese, M. L. Rastello, and I. Ruo-Berchera, "Detection of multimode spatial correlation in PDC and application to the absolute calibration of a CCD camera", *Opt. Express* **18**, 20572 (2010).
16. D. A. Safronov, N. A. Borshchevskaya, T. I. Novikova, K. G. Katamadze, K. A. Kuznetsov, and G. Kh. Kitaeva, "Measurement of the biphoton second-order correlation function with analog detectors", *Opt. Express* **29**, 36644 (2021).
17. A. I. Lvovsky and M. G. Raymer, "Continuous-variable optical quantum-state tomography", *Rev. Mod. Phys.* **81**, 299 (2009).
18. A. Fabre and N. Treps, "Modes and states in quantum optics", *Rev. Mod. Phys.* **92**, 035005 (2020).
19. П. А. Прудковский, Д. А. Сафроненков, Г. Х. Китаева, "Метод Клышко для аналоговых фотодетекторов и безэталоное измерение числа фотонов", *Известия РАН. Серия физическая* **88**, 909 (2024) [P. A. Prudkovskii, D. A. Safronov, and G. Kh. Kitaeva, "Klyshko Method for Analog Photodetectors and Absolute Measurement of Photon Numbers", *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.* **88**, 866 (2024)].
20. S. V. Polyakov and A. L. Migdall, "High accuracy verification of a correlated photon-based method for measuring photon counting detection efficiency", *Opt. Express* **15**, 1390 (2007).
21. О. А. Аброскина, Г. Х. Китаева, А. Н. Пенин, "Абсолютная калибровка фотоприемников с использованием спонтанного параметрического рассеяния", *Измерительная техника* **29**, 198 (1986) [O. A. Abroskina, G. Kh. Kitaeva, and A. N. Penin, "Absolute measurement of the spectral density for electromagnetic radiation", *Measurement Techniques* **29**, 198 (1986)].
22. А. А. Леонтьев, К. А. Кузнецов, П. А. Прудковский, Д. А. Сафроненков, Г. Х. Китаева, "Прямое измерение корреляционной функции оптико-терагерцовых бифотонов", *Письма в ЖЭТФ* **114**, 635 (2021) [A. A. Leontyev, K. A. Kuznetsov, P. A. Prudkovskii, D. A. Safronov, and G. Kh. Kitaeva, "Direct Measurement of the Correlation Function of Optical-Terahertz Biphotons", *JETP Lett.* **114**, 565 (2021)].
23. K. Murate and K. Kawase, "Perspective: Terahertz wave parametric generator and its applications", *J. Appl. Phys.* **124**, 160901 (2018).
24. K. A. Kuznetsov, G. Kh. Kitaeva, S. P. Kovalev, S. A. Germansky, A. M. Buryakov, A. N. Tuchak, and A. N. Penin, "Complex extraordinary dielectric function of Mg-doped lithium niobate crystals at terahertz frequencies", *Appl. Phys. B* **122**, 223 (2016).
25. Г. Х. Китаева, К. А. Кузнецов, И. И. Наумова, А. Н. Пенин, "Влияние дефектов структуры на опти-

- ческие свойства монокристаллов $\text{LiNbO}_3\text{:Mg}$ ”, Квантовая электроника **30**, 726 (2000) [G. Kh. Kitaeva, K. A. Kuznetsov, I. I. Naumova, and A. N. Penin, “Influence of structural defects on the optical properties of Mg:LiNbO_3 single crystals”, Quantum Electronics **30**, 726 (2000)].
26. А. П. Алоджанц, Д. В. Царев, Д. А. Куц, С. А. Подошведов, С. П. Кулик, “Квантовая оптическая метрология”, Успехи физических наук **194**, 711 (2024) [A. P. Alodjants, D. V. Tsarev, D. A. Kuts, S. A. Podoshvedov, and S. P. Kulik, “Quantum optical metrology”, Phys.-Uspekhi **67**, 668 (2024)].