

Косинусно-степенные добавки к спектру Захарова–Филоненко

В. В. Геогджаев¹⁾

Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, 117997 Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 июня 2026 г.

После переработки 7 июля 2026 г.

Принята к публикации 9 июля 2026 г.

Автомодельные спектры для поверхностных волн на воде имеют как теоретическое, так и практическое значение. Известный спектр Захарова–Филоненко хорошо описывает естественные спектры, но не учитывает присущую им анизотропию. Спектр Каца–Конторовича вводит анизотропию путем добавления косинусной добавки к спектру Захарова–Филоненко. Мы выполнили общее исследование косинусно-степенных дополнений к спектру Захарова–Филоненко, используя различные угловые гармоники. Найдено новое приближенное анизотропное решение. Численно найдена колмогоровская константа для потока импульса в решении Каца–Конторовича.

DOI: 10.7868/S3034576626090073

1. Введение. Гравитационные поверхностные волны на воде представляют собой интересный и важный пример динамических систем. Эти волны могут быть описаны как система волновых мод, которые обмениваются энергией посредством нелинейных взаимодействий. Кинетическое уравнение для резонансных волновых взаимодействий (уравнение Хассельманна) было получено в [1]. Теория поверхностных волн стала важным инструментом для моделирования и предсказания ветрового волнения (см., например, [2]).

Гамильтоновский подход, развитый В. Е. Захаровым [3], позволил построить динамическое уравнение, описывающее эволюцию волнения. Используя как малый параметр уклон поверхности, он построил так называемое уравнение Захарова, описывающее 4-волновые взаимодействия. Статистическое рассмотрение этих взаимодействий дает так называемую волновую турбулентность, описываемую кинетическим уравнением.

Спектр Захарова–Филоненко (ЗФ) [4] представляет собой стационарное автомодельное степенное решение, описывающее передачу волновой энергии в высокие частоты. Он распространяется от нулевой до бесконечной частоты, что, очевидно, не может быть полностью реализовано в реальности. Тем не менее, реальные спектры, как правило, включают в себя часть, являющуюся спектром ЗФ.

Спектр ЗФ изотропен, тогда как реальные спектры волнения анизотропны. Он адекватно описывает каскадную часть спектра, но учет анизотропии

требует следующего порядка аппроксимации. Такое решение, известное как спектр Каца–Конторовича (КК), было получено в [5–7]. Оно представляет собой спектр ЗФ с добавлением малой анизотропной степенной добавки. Приближение, в котором был построен этот спектр, нарушается в малых частотах, но для высоких частот спектр КК соответствует реальным спектрам.

Спектр КК был получен, основываясь на масштабной инвариантности решений. Более конкретным подходом является непосредственное изучение малых добавок к спектру ЗФ. Такой подход был применен в [8, 9]. Мы используем его здесь для изучения анизотропных решений, основанных на спектре ЗФ.

Теория стабильности спектров ЗФ (в частности, для уравнения Хассельманна) была развита А. М. Балком и В. Е. Захаровым (см. [10]). Она включает в себя исследование спектра КК как добавки к спектру ЗФ и его стабильности (спектр КК стабилен, если он передает импульс в том же направлении, что и энергию).

В настоящей статье мы изучаем анизотропные добавки к спектру ЗФ. Мы исследовали общие косинусно-степенные добавки и обнаружили, что некоторые из них являются стационарными решениями кинетического уравнения в том же смысле, что и решение Каца–Конторовича. Отличие состоит в том, что спектр КК является непосредственным результатом квадруплетных резонансов, в то время как новые решения определяются формой кинетического уравнения как целого.

Мы используем кинетическое уравнение в квадруплетной форме [11]. Оно представляет собой урав-

¹⁾e-mail: vvg@mail.geogjaev.ru

нение Хассельманна, переписанное так, чтобы явно выделить резонансные квадруплеты. Такая форма позволяет легко увидеть явления, возникающие из-за волновых резонансов, такие как спектры ЗФ и КК. Эта форма также позволяет записать решения в виде интеграла по квадруплетам, который может быть вычислен численно.

Спектр КК имеет поток импульса в сторону высоких частот. Этот поток связан с параметром анизотропии спектра через константу. Мы вычисляем эту константу численно.

2. Уравнение Хассельманна. Уравнение Хассельманна [1] представляет собой кинетическое уравнение для гравитационных волн. Мы записываем его здесь в форме для энергетического спектра $\varepsilon(\omega, \theta, t)$ в полярных координатах. ω и θ – частота и направление волн соответственно. Спектр зависит от времени t , мы не указываем эту зависимость явно, чтобы не загромождать формулы.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = & \frac{\pi g^6 \omega^4}{4} \int_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} (T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4})^2 \times \\ & \times \left(\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}{(\omega_2 \omega_3 \omega_4)^4} + \frac{\varepsilon \varepsilon_3 \varepsilon_4}{(\omega \omega_3 \omega_4)^4} - \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon \varepsilon_2 \varepsilon_4}{(\omega \omega_2 \omega_4)^4} - \frac{\varepsilon \varepsilon_2 \varepsilon_3}{(\omega \omega_2 \omega_3)^4} \right) \times \\ & \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \times \\ & \times \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon(\omega_i, \theta_i)$, g – ускорение свободного падения. $\mathbf{k}$ – волновой вектор с амплитудой k и направлением θ . Коэффициент $T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}$ имеет сложную форму, его можно найти, например, в [12].

Волновой вектор k связан с частотой ω дисперсионным соотношением. Мы рассматриваем волны на глубокой воде, для которых

$$\omega = \sqrt{gk}. \quad (2)$$

Уравнение (1) включает две δ -функции, которые определяют условия резонанса для волновых квадруплетов:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \quad (3)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4. \quad (4)$$

Волны, удовлетворяющие этим условиям, могут обмениваться энергией посредством нелинейных взаимодействий.

Резонансные волновые квадруплеты могут быть нормированы с помощью масштабирования и поворота, объединяя таким образом квадруплеты одина-

ковой формы. Мы будем обозначать такие нормированные квадруплеты символом q . Они образуют трехмерное многообразие, по которому можно производить интегрирование (см. [11]). Используя квадруплеты как переменные интегрирования, мы можем переписать (1) в квадруплетной форме:

$$\varepsilon_i = \varepsilon(\omega \tilde{\omega}_i(q), \theta + \tilde{\theta}_i(q)), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} S(\omega, \theta, q) = & \omega^{11} \left(\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}{(\tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3 \tilde{\omega}_4)^4} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_4}{(\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_3 \tilde{\omega}_4)^4} - \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4}{(\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_4)^4} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{(\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3)^4} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(\omega, \theta)}{\partial t} = & \frac{\pi}{2} g^{-4} \int_q (\tilde{T}(q))^2 \times \\ & \times \left[S\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_1(q)}, \theta - \tilde{\theta}_1(q), q\right) + S\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_2(q)}, \theta - \tilde{\theta}_2(q), q\right) - \right. \\ & \left. - S\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_3(q)}, \theta - \tilde{\theta}_3(q), q\right) - S\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_4(q)}, \theta - \tilde{\theta}_4(q), q\right) \right] dq. \end{aligned} \quad (7)$$

Нормированные безразмерные параметры квадруплетов обозначены здесь символом тильда. $\tilde{T}$ представляет собой коэффициент связи для нормированного квадруплета q .

Интеграл по квадруплетам, выписанный в (7), может быть вычислен численно. Некоторые асимптотические случаи допускают аналитическое решение.

3. Приближительные анизотропные решения.

3.1. Общие косинусно-степенные спектры. Спектр ЗФ является стационарным решением уравнения (1) вида [4]:

$$\varepsilon = A\omega^{-4}. \quad (8)$$

Это точное решение, продолжающееся от нуля до бесконечности. Оно имеет ненулевой поток энергии от низких к высоким частотам.

Спектр (8) изотропен. А. В. Кац и В. М. Конторович [5] нашли, что это решение допускает малую анизотропную добавку:

$$\varepsilon = A\omega^{-4}(1 + u\omega^{-1} \cos \theta), \quad (9)$$

где $u \ll 1$ – малый параметр. Это решение является приближенным.

В настоящей работе мы изучаем общую форму решения (9).

Мы вводим косинусно степенную добавку общего вида к спектру ЗФ:

$$\varepsilon = A\omega^{-4}(1 + u\omega^{-y}\cos(n\theta)), \quad (10)$$

где $u \ll 1$, y действительное число и n – целое.

Спектры (10) включают в себя спектр (9) (для $n = 1$, $y = 1$) и сам спектр ЗФ (для $n = 0$, $y = 0$).

Спектр (10) ориентирован вдоль оси $\theta = 0$, другие направления могут быть получены поворотом. Ниже мы будем пользоваться комплексной экспонентой $e^{in\theta}$ вместо косинуса, чтобы упростить формулы.

Подстановка этого спектра в кинетическое уравнение (7) дает

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = A^3 g^{-4} u \omega^{-y-1} \cos(n\theta) G_n(y), \quad (11)$$

где $G_n(y)$ – следующая действительная безразмерная функция:

$$\begin{aligned} G_n(y) = & \frac{\pi}{2} \int T^2 (\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3 \tilde{\omega}_4)^{-8} \\ & \times \left[(\tilde{\omega}_2^8 - \tilde{\omega}_3^8 - \tilde{\omega}_4^8) \tilde{\omega}_1^{-y} e^{in\tilde{\theta}_1} \right. \\ & + (\tilde{\omega}_1^8 - \tilde{\omega}_3^8 - \tilde{\omega}_4^8) \tilde{\omega}_2^{-y} e^{in\tilde{\theta}_2} \\ & + (\tilde{\omega}_1^8 + \tilde{\omega}_2^8 - \tilde{\omega}_4^8) \tilde{\omega}_3^{-y} e^{in\tilde{\theta}_3} \\ & + (\tilde{\omega}_1^8 + \tilde{\omega}_2^8 - \tilde{\omega}_3^8) \tilde{\omega}_4^{-y} e^{in\tilde{\theta}_4} \left. \right] \\ & \times \left[\tilde{\omega}_1^{y+1} e^{-in\tilde{\theta}_1} + \tilde{\omega}_2^{y+1} e^{-in\tilde{\theta}_2} \right. \\ & \left. - \tilde{\omega}_3^{y+1} e^{-in\tilde{\theta}_3} - \tilde{\omega}_4^{y+1} e^{-in\tilde{\theta}_4} \right] dq. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (11) показывает, что общая косинусно-степенная добавка к спектру ЗФ ведет себя экспоненциально. Отрицательный знак G соответствует экспоненциальному убыванию добавки, положительный – росту. Стационарные приближительные решения уравнения (1) соответствуют нулям G .

3.2. Длинно-короткие взаимодействия. Косинусно-степенное решение (10) формально продолжается по частоте от нуля до бесконечности, так же, как и решения ЗФ и КК, что ставит вопрос о его валидности. Это решение существует только если интеграл в (12) сходится, в противном случае скорость роста энергии становится бесконечной.

Расходимость интеграла обусловлена взаимодействием между длинными и короткими волнами, т.е. квадруплетами, удовлетворяющими резонансным условиям (3), (4) и включающими в себя как длинные, так и короткие вектора (резонансные усло-

вия допускают произвольное соотношение длин векторов). Воздействие этих квадруплетов ослабляется исключительной малостью коэффициента T для них (см. [13]).

Интеграл в (12) расходится как для достаточно больших, так и для достаточно малых значений y . Решения с такими y “несбалансированы” из-за слишком большой энергии возле нуля или бесконечности, поток которой приводит к бесконечной скорости роста решения. Для подтверждения наличия “окна существования” решения нужно проверять сходимость интеграла в (12).

3.3. Мода $n = 0$. Наиболее интересными модами являются $n = 0$ и $n = 1$.

Мода $n = 0$ описывает изотропные решения в виде спектра ЗФ с малой степенной добавкой.

График функции $G_0(y)$, полученный численно, показан на рис. 1. Он имеет два нуля. Их появление обусловлено занулением подынтегрального выражения в (12) (конкретно, второй скобки) из-за резонансных соотношений. Эти нули существуют как для реального набора квадруплетов, так и для упрощенных наборов (используемых во многих моделях).

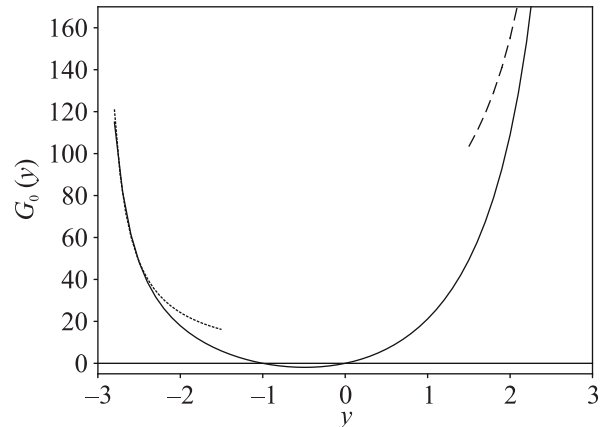


Рис. 1. График функции $G_0(y)$. Также показаны асимптотики

Ноль при $y = 0$ тривиален, он соответствует невозмущенному спектру ЗФ.

Ноль при $y = -1$ соответствует изотропному решению КК, найденному в [5]

$$\varepsilon = A\omega^{-4}(1 + u\omega). \quad (13)$$

“Окно существования” может быть рассчитано с использованием пределов для длинно-коротких квадруплетов и коэффициента T . Решение существует если

$$-3 < y < 3. \quad (14)$$

Это доказывает валидность решения (13).

$G_0(y)$ имеет следующие асимптотики около краев “окна существования”:

$$\begin{aligned} G_0(y) &= \frac{5\pi^3}{3-y}, \quad y \rightarrow 3, \\ G_0(y) &= \frac{25\pi^3}{32} \frac{1}{y+3}, \quad y \rightarrow -3. \end{aligned} \quad (15)$$

Эти асимптотики не имеют непосредственного физического значения. Кроме того, они в основном обусловлены длинно-короткими взаимодействиями, для которых валидность кинетического уравнения сомнительна. Тем не менее, эти асимптотики являются одним из немногих аналитических результатов, полученных для кинетического уравнения, и могут быть использованы для проверки и калибровки численных моделей.

3.4. Мода $n = 1$. Мода $n = 1$ является косинусной модой. Численные расчеты, представленные в [14], показывают, что эта мода преобладает в хвостовой части спектра.

График функции $G_1(y)$ (полученный численно) показан на рис. 2. Эта функция имеет два нуля, соответствующих решениям уравнения (1) (с точностью до первого порядка малого параметра u).

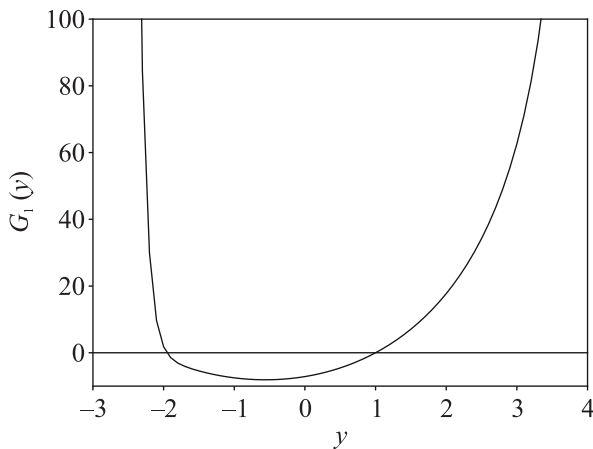


Рис. 2. График функции $G_1(y)$

Ноль при $y = 1$ соответствует решению КК (9). Он является результатом зануления второй скобки под интегралом в (12) из-за резонансного условия (3). Действительно,

$$\begin{aligned} \omega_1^2 e^{-i\theta_1} + \omega_2^2 e^{-i\theta_2} \omega_3^2 e^{-i\theta_3} - \omega_4^2 e^{-i\theta_4} = \\ k_1 \cos \theta_1 + k_2 \cos \theta_2 - k_3 \cos \theta_3 - k_4 \cos \theta_4 - \\ i(k_1 \sin \theta_1 + k_2 \sin \theta_2 - k_3 \sin \theta_3 - k_4 \sin \theta_4), \end{aligned} \quad (16)$$

что тождественно (3).

Многие приближенные волновые модели основаны на упрощенном наборе квадруплетов. Такое приближение может исказить интеграл в (1), но решение КК останется существующим, если только не нарушено резонансное условие (3).

Другой ноль $y \approx -1.92$ соответствует решению вида

$$\varepsilon = A \omega^{-4} (1 + \omega^{1.92} \cos \theta) \quad (17)$$

(коэффициент 1.92 получен численно). Это – новое приближенное решение уравнения (1).

Это новое решение не имеет столь глубоких оснований в структуре кинетического уравнения, как решение КК. Степенной коэффициент этого решения был получен путем полного подсчета интеграла в (12); при изменении набора квадруплетов это решение также изменится.

Функция $G_1(y)$ имеет следующую область существования (полученную численно):

$$-2 < y < 4. \quad (18)$$

Аналитическое вычисление границ этой области слишком сложно.

3.5. Высшие моды. Графики функции G для нескольких высших мод показаны на рис. 3. Моды

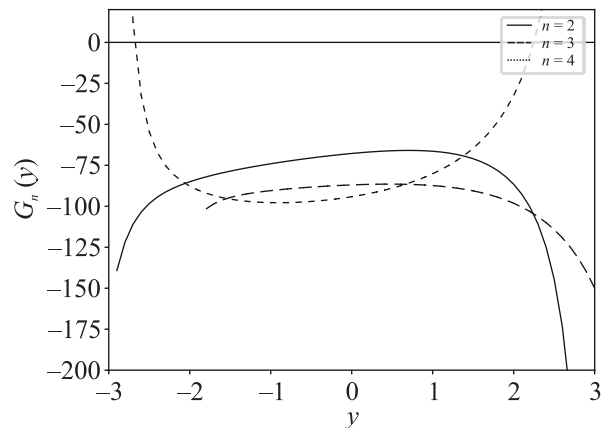


Рис. 3. Графики $G_n(y)$ для $n = 2, 3, 4$

$n = 2$ и $n = 3$ имеют большие отрицательные инкременты для всех y . Таким образом, эти добавки быстро убывают. То же самое в основном имеет место для $n = 4$, однако эта мода имеет нули вблизи краев интервала существования. Эти нули соответствуют новым стационарным решениям, однако эти решения в основном обеспечиваются длинно-короткими взаимодействиями, и представляют собой не более чем артефакт модели.

Более подробное изучение высших мод выходит

за рамки настоящей статьи. В работах [10, 15] имеется подобное исследование для различных типов волн.

4. Поток импульса для спектра КК. Как известно, спектр КК передает импульс в высокие частоты. Рассмотрим это детально.

Коэффициент A в (9) определяется потоком энергии соответствующего спектра ЗФ (см. [16]):

$$\varepsilon = 2C_p \frac{(g^4 P)^{1/3}}{\omega^4} (1 + u\omega^{-y} \cos \theta). \quad (19)$$

Здесь P – поток энергии, $C_p \approx 0.194$ – колмогоровская константа.

Коэффициент u в (9) связан с потоком импульса $K = \varepsilon g^{-1} \omega \cos \theta$ в высокие частоты. Этот поток для произвольного y и $n = 1$ равен

$$\begin{aligned} M &= \int_{\omega}^{\infty} d\omega \oint d\theta \frac{\partial K}{\partial t} = \\ &= 8\pi C_p^3 P g^{-1} u \omega^{1-y} \frac{G_1(y)}{y-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

В точке $y = 1$ имеется неопределенность, раскрывая которую, получаем

$$M = 8\pi C_p^3 P g^{-1} u \left. \frac{dG_1}{dy} \right|_{y=1}. \quad (21)$$

Решение КК, выраженное через потоки, имеет вид

$$\varepsilon = 2 \frac{g^4 P^{1/3}}{\omega^4} \left(C_p + C_m \frac{gM}{\omega P} \cos \theta \right). \quad (22)$$

Константа C_m имеет вид

$$C_m = \left(8\pi C_p^2 G'_1(y)|_{y=1} \right)^{-1}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} G'_1(y)|_{y=1} &= \frac{\pi}{2} \int T^2 (\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3 \tilde{\omega}_4)^{-8} \\ &\times \left[(\tilde{\omega}_2^8 - \tilde{\omega}_3^8 - \tilde{\omega}_4^8) \tilde{\omega}_1^{-1} e^{i\tilde{\theta}_1} \right. \\ &+ (\tilde{\omega}_1^8 - \tilde{\omega}_3^8 - \tilde{\omega}_4^8) \tilde{\omega}_2^{-1} e^{i\tilde{\theta}_2} \\ &+ (\tilde{\omega}_1^8 + \tilde{\omega}_2^8 - \tilde{\omega}_4^8) \tilde{\omega}_3^{-1} e^{i\tilde{\theta}_3} \\ &+ \left. (\tilde{\omega}_1^8 + \tilde{\omega}_2^8 - \tilde{\omega}_3^8) \tilde{\omega}_4^{-1} e^{i\tilde{\theta}_4} \right] \\ &\times \left[\tilde{\omega}_1^2 e^{-i\tilde{\theta}_1} \ln \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2^2 e^{-i\tilde{\theta}_2} \ln \tilde{\omega}_2 \right. \\ &- \left. \tilde{\omega}_3^2 e^{-i\tilde{\theta}_3} \ln \tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_4^2 e^{-i\tilde{\theta}_4} \ln \tilde{\omega}_4 \right] dq. \end{aligned} \quad (24)$$

Численный расчет дает

$$C_m \approx 0.093. \quad (25)$$

5. Стабильность спектра ЗФ. Стабильность спектра ЗФ по отношению к изотропным возмущениям обсуждалась в [9]. Здесь мы можем обсудить эту стабильность по отношению к угловым возмущениям. Пусть

$$\gamma_n = G_n(0). \quad (26)$$

Коэффициент γ_n представляет собой скорость убывания гармонического возмущения спектра ЗФ. Первые несколько коэффициентов (полученные численно) имеют значения

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\approx -7.12, \quad \gamma_2 \approx -67.6, \quad \gamma_3 \approx -87.3, \\ \gamma_4 &\approx -93.6, \quad \gamma_5 \approx -123.9. \end{aligned} \quad (27)$$

Все эти значения отрицательны, что означает стабильность спектра ЗФ по отношению к соответствующим возмущениям.

Значение γ_1 существенно меньше остальных. Это означает, что чисто косинусное возмущение (возможно, производимое внешним источником) убывает гораздо медленнее, чем другие гармоники. Как результат, в реальных спектрах имеется преобладание первой гармоники.

6. Обсуждение. Спектр ЗФ широко используется в моделях ветрового волнения как “хвостовая” часть спектра, что в достаточной степени соответствует численным и экспериментальным данным. Его недостатком является то, что это изотропное решение, игнорирующее существенное свойство реальных спектров – анизотропию. Решение КК восполняет этот недостаток, изучение этого решения позволяет добиться лучшего понимания настоящего (анизотропного) поведения волн (см. [14]).

Спектр КК содержит параметр анизотропии (связанный с потоком импульса). Этот параметр определяется спектром в районе пика энергии, и, таким образом, является внешним для хвоста спектра. Вопрос об определении этого параметра до сих пор открыт.

Спектр ЗФ является стойким в том смысле, что он естественным образом возникает при наличии потока энергии. Такой же стойкостью обладает и спектр КК. Вообще, первая косинусная гармоника обладает повышенной стабильностью, имея гораздо меньший коэффициент затухания, чем остальные.

7. Выводы. Была найдена явная формула для косинусно-степенных добавок к спектру ЗФ. В явном виде показана связь спектра КК с потоком импульса, был вычислен соответствующий коэффициент.

Были показаны особые свойства первой косинусной гармоники, обладающей значительно меньшим коэффициентом затухания, чем остальные. Это по-

казывает, что первая гармоника преобладает в развитии решения.

Кроме того, было найдено новое косинусно-степенное решение.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета института. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. K. Hasselmann, “On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory”, *J. Fluid Mech.* **12**, 481 (1962).
2. J.-H. Alves, F. Ardhuin, A. Babanin et al. (Collaboration), “Wave modelling – the state of the art”, *Progress in Oceanography* **75**, 603 (2007).
3. V.E. Zakharov, “Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid”, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190 (1968).
4. V.E. Zakharov and N.N. Filonenko, “Energy spectrum for stochastic oscillations of the surface of liquid”, *Doklady Acad. Nauk SSSR* **170**(6), 1292 (1966).
5. A.V. Kats and V.M. Kontorovich, “Drift stationary solutions in the weak turbulence theory”, *JETP Lett.* **14**, 392 (1971).
6. A.V. Kats and V.M. Kontorovich, “Anisotropic turbulent distributions for waves with a non-decay dispersion law”, *Soviet Physics JETP* **38**, 102 (1974).
7. A.V. Kats, V.M. Kontorovich, S.S. Moiseev, and V.E. Novikov, “Exact power law solutions of the particle kinetic equations”, *Soviet Physics JETP* **44**, 93 (1976).
8. A.M. Balk, “On the Kolmogorov–Zakharov spectra of weak turbulence”, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **139**, 137 (2000).
9. V.V. Geogjaev, “Stability of Kolmogorov spectra for surface gravity waves”, *Theor. Math. Phys.* **203**, 437 (2020).
10. V.E. Zakharov, V.S. Lvov, and G. Falkovich, *Kolmogorov–Zakharov Spectra of Turbulence* (Springer, Cham, 2025).
11. V. Geogjaev, “Quadruplet form of water waves kinetic equation”, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **483**, 134977 (2025).
12. V.E. Zakharov, “Statistical theory of gravity and capillary waves on the surface of a finite-depth fluid”, *European Journal of Mechanics – B/Fluids* **18**(3), 327 (1999).
13. V. Geogjaev, “Properties and asymptotics of water waves nonlinear interaction coefficient”, *J. Fluid Mech.* **1009**, A54-1 (2025).
14. S.I. Badulin, V.V. Geogjaev, and A.N. Pushkarev, “Kats–Kontorovich anisotropic solution in simulations of ocean swell”, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **482**, 134906 (2025).
15. А.М. Балк, В.Е. Захаров, “Об устойчивости слаботурбулентных колмогоровских спектров”, *Докл. Акад. наук* **299**(5), 1112 (1988) [A.M. Balk and V.E. Zakharov, “Stability of slightly turbulent Kolmogorov spectra”, *Sov. Phys. Dokl.* **33**(4), 270 (1988)].
16. В.В. Геогджаев, В.Е. Захаров, “Численный и аналитический расчет параметров степенных спектров гравитационных волн на глубокой воде”, *Письма в ЖЭТФ* **106**(3), 175 (2017) [V.V. Geogjaev and V.E. Zakharov, “Numerical and analytical calculations of the parameters of power-law spectra for deep water gravity waves”, *JETP Lett.* **106**(3), 184 (2017)].