Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 6, с. 474 – 479 © 2026 г. 25 сентября

Термодинамика системы твердых сфер

А. М. Дюгаев[+], *Е. В. Лебедева*[*1)], *П. Д. Григорьев*[+×]

[+]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

[*]*Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

[×]*Национальный исследовательский технологический университет "МИСИС", 119049 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 июня 2026 г.
После переработки 7 августа 2026 г.
Принята к публикации 7 августа 2026 г.

На основе анализа результатов, полученных численным методом Монте-Карло для системы твердых сфер, установлено, что квантовый вклад в ее энергию E, рассчитанную для одной частицы растет при увеличении температуры T как $\sqrt{T}$: $E = \frac{3}{2}T + \delta(\varepsilon_0 T)^{1/2}$, $\varepsilon_0 = \frac{h^2}{2\pi M\sigma^2}$; где M и σ – масса и диаметр сфер, δ – параметр, зависящий от плотности системы твердых сфер. Этот вклад пропорционален первой степени постоянной Планка h. Обоснована интерполяционная формула для теплоемкости C_V: $C_V(\lambda) = \frac{3}{2} + \frac{\delta}{2}\lambda(1-\lambda^2)$, где λ есть отношение длины волны частиц к их диаметру: $\lambda = (\varepsilon_0/T)^{1/2}$. При $\lambda = 1$ C_V для системы твердых сфер имеет веерную точку, разделяющую области высоких $T > \varepsilon_0$ и низких $T < \varepsilon_0$ температур. Итогом стало сравнение модельной системы с физическим жидким ^{4}He, для которого такая веерная точка видна в эксперименте. Вблизи этой точки модельная система и жидкий ^{4}He имеют одинаковую, линейную зависимость давления P от температуры T, характерную для идеального газа, а также одинаковую зависимость энтропии от безразмерной плотности.

DOI: 10.7868/S3034576626090206

1. Введение. Система твердых сфер (далее СТС) давно стала модельной системой при изучении газообразных и жидких сред [1, 2]. Она характеризуется парным взаимодействием между сферами $V(r)$ вида

$$V(r) = \infty \quad r < \sigma; \qquad V(r) = 0 \quad r > \sigma. \tag{1}$$

Плотность системы n и диаметр сфер σ определяет безразмерный параметр ρ, а отношение тепловой длины волны частиц λ_T к σ: $\lambda \equiv \lambda_T/\sigma$ характеризует квантовость СТС.

$$\lambda_T^2 \equiv \frac{h^2}{2\pi MT};\ \lambda = \left(\frac{\varepsilon_0}{T}\right)^{1/2};\ \varepsilon_0 = \frac{h^2}{2\pi M\sigma^2};\ \rho \equiv n\sigma^3. \tag{2}$$

Энергетический масштаб ε_0 возник из обезразмеривания тепловой длины волны λ_T. В него входит единственный параметр длины σ, который характеризует потенциал $V(r)$ (1).

В [3, 4] приведены первые члены разложения вириального коэффициента $B(\lambda)$ по степеням λ (2)

$$B(\lambda) = B(0)\left(1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\lambda + \frac{1}{\pi}\lambda^2\right);$$
$$B(0) = \frac{2\pi}{3}\sigma^3. \tag{3}$$

В классическом пределе $B(0)$ совпадает с $4v_c$, где v_c – объем сферы [5]. С учетом связи свободной энергии F_{ig} идеального больцмановского газа с F, B и энергией на одну частицу E [5]

$$F = F_{ig} + TnB; \quad E = -T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right) \tag{4}$$

получаем вириальную поправку к энергии E и теплоемкости идеального больцмановского газа C_V для СТС

$$E = \frac{3}{2}T + \delta(\varepsilon_0 T)^{1/2} + \gamma\varepsilon_0, \quad C_V \equiv \frac{\partial E}{\partial T},$$
$$C_V = \frac{3}{2} + \frac{\delta}{2}\lambda; \quad \delta = \rho\frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \quad \gamma = \frac{2}{3}\rho, \tag{5}$$

где ε_0, λ и ρ определены в (2).

Так как энергия ε_0 пропорциональна квадрату постоянной Планка h (2), из (5) следует, что квантовый вклад в E и C_V пропорционален первой степени h. Более того, этот вклад в E растет как $T^{1/2}$ при повышении температуры T. Это замечательное свойство СТС дает свободу выбора масштаба для E, F и T. Если определить приведенные E_*, F_* и T_* выражениями

$$E_* = \frac{E}{\varepsilon_0}, \quad F_* = \frac{F}{\varepsilon_0}, \quad T_* = \frac{T}{\varepsilon_0}, \quad \lambda = \frac{1}{T_*^{1/2}}, \tag{6}$$

[1)]e-mail: lebedeva@issp.ac.ru

где ε_0 определено в (2), то из (5) следует, что постоянная Планка h уже не представлена явно.

$$E_* = \frac{3}{2}T_* + \delta T_*^{1/2}, \quad C_V = \frac{3}{2} + \frac{\delta}{2T_*^{1/2}}. \qquad (7)$$

Для потенциала (1) не применимо разложение термодинамических величин по степеням h^2 [5], § 33. Необходимо находить вириальный коэффициент через его связь с амплитудой и фазами рассеяния [5], § 77. Эту связь удалось найти в [3, 4] при малом параметре λ (2). Из (3) видно, что разложение $B(\lambda)$ идет не по степеням h^2, а по степеням h. С этим и связан рост квантового вклада в E при повышении T. В случае СТС выйти за пределы вириального ($\rho \ll 1$) и высокотемпературного разложений ($T_* \gg 1$, $\lambda \ll 1$) для E_* и C_V (5), (7) можно только с помощью численных методов. Целью нашей работы является сравнение термодинамических характеристик модельной СТС и физического жидкого гелия в широком диапазоне ρ и T_*. Жидкий гелий ^{4}He детально исследован в [6], где установлено, что его теплоемкость C_V немонотонно зависит от температуры T. При низких T: $C_V < 3/2$, а при высоких T: $C_V > 3/2$. Поэтому есть точка T_0, вблизи которой C_V линейно зависит от $T - T_0$

$$C_V = \frac{3}{2} + \frac{\delta_{He}}{2}\left(\frac{T}{T_0} - 1\right). \qquad (8)$$

Так как при $T \to \infty$ $C_V \to 3/2$, теплоемкость жидкого гелия $C_V(T)$ достигает максимального значения на интервале $T_0 < T < \infty$. Согласно [6], при $T_0 = 17\,\mathrm{K}$ теплоемкость гелия $C_V = 3/2$ и с точностью 0.2 % не зависит от плотности жидкости n (табл. 2 из [6]). Это можно увидеть и на рис. 7 работы [7]. Параметр δ_{He} в (8) растет при увеличении n, поэтому точка $T_0 = 17\,\mathrm{K}$ для жидкого ^{4}He обладает замечательным свойством веерной точки: $\partial C_V/\partial n < 0$ при $T < T_0$, $\partial C_V/\partial n > 0$ при $T > T_0$. Ниже мы покажем, что веерная точка для C_V типа (8) имеет место и для СТС.

2. Метод Монте-Карло. Для анализа результатов, полученных численными методами для СТС, мы выбрали две работы [8, 9], где представлены рассчитанные значения безразмерной величины E/T для нескольких значений ρ и λ (2), (7). В [8] исследован интервал $0.116 < \lambda < 0.9$, а в [9] $0.2 < \lambda < 2$. Важно, что данные [8, 9] приведены в виде таблиц и согласованы друг с другом. Автор [8] при определении теплоемкости C_V параметризовал свои данные выражением

$$\left(\frac{E}{T} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda} + b. \qquad (9)$$

Параметры a и b были найдены методом наименьших квадратов, а для C_V приведена связь с параметром λ (2)

$$C_V = \frac{3}{2} + \frac{a}{2}\lambda. \qquad (10)$$

Мы нашли параметр a на основе (10) и табличных значений для C_V из [8] и представили в нашей табл. 1 для нескольких значений плотности ρ. Сравнение (9), (10) с (7) показывает, что автор [8] применил высокотемпературное разложение ($\lambda \ll 1$) для E во всем интервале $0.116 < \lambda < 0.9$, а параметры a и b из (9) соответствуют параметрам δ и γ в (5), которые считаются функциями ρ. Этот результат можно назвать математическим и он, безусловно, правильный при $\lambda \ll 1$, но не применим при $\lambda \approx 1$. Физический метод анализа данных [8, 9] основан на определении избыточных термодинамических величин [10]. В нашем случае нужно определить величину E_*^-

$$E_* = \frac{3}{2}T_* + E_*^-. \qquad (11)$$

Так как $E/T = E_*/T_*$, а $\lambda^2 = 1/T_*$, можно найти избыточную энергию E_*^- из данных [8, 9]

$$\left(\frac{E}{T} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{\lambda^2} = E_*^-(\lambda). \qquad (12)$$

Физический метод отличается от математического и в способе параметризации E_*^-. Мы обоснуем интерполяционную формулу для теплоемкости C_V, а затем на основе определения $C_V = \partial E_*/\partial T_*$ найдем E_*^-

$$C_V(\lambda) = \frac{3}{2} + \frac{\delta_E}{2}\lambda(1 - \lambda^2), \qquad (13)$$

$$E_*^-(\lambda) = E_*^-(1) + \delta_E\lambda\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)^2.$$

С учетом $1/\lambda = \sqrt{T_*}$ из (13) следует

$$C_V(T_*) = \frac{3}{2} + \frac{\delta_E}{2}\frac{(T_* - 1)}{T_*^{3/2}}. \qquad (14)$$

Как видно из (14), теплоемкость C_V максимальна при $T_* = 3$ ($\lambda = 1/\sqrt{3}$), где она достигает значения $C_V = 3/2 + \delta_E/(3\sqrt{3})$, а при $T_* \gg 1$ имеет правильный предел $C_V = 3/2 + (\delta_E/2)\lambda$. При $T_* \to 1$ (14) переходит в (8), имеющее место для ^{4}He. Величины $E_*^-(1)$ и δ_E в (13) найдем из данных работ [8, 9]. Для этого введем переменную $y = 1/\lambda - 1 = \sqrt{T_*} - 1$ и запишем (13) в виде

$$E_*^-(y) = E_*^-(\lambda = 1) + \delta_E\frac{y^2}{1 + y}. \qquad (15)$$

На рисунке 1 представлена зависимость $E_*^-(y)$ (15) при $y < 1.5$, что позволяет найти $E_*^-(\lambda = 1)$ и δ_E. Минимум функции $E_*^-(y)$ является признаком веерной точки для C_V

$$E_*^-(T_*) = E_*^-(1) + \frac{\delta_E (T_* - 1)^2}{4}; \qquad T_* \to 1. \qquad (16)$$

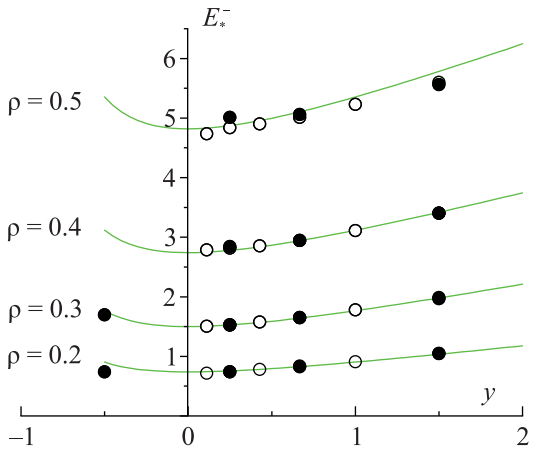

Рис. 1. (Цветной онлайн) Зависимость избыточной энергии E_* (11) от параметра $y = 1/\lambda - 1 = \sqrt{T_*} - 1$. Графики для разных плотностей ρ отвечают (15). Темные точки – из работы [9], светлые – из [8]

На рисунке 2 представлена зависимость разности $E_*^-(y) - E_*^-(\lambda = 1)$ от y в широком интервале $0 < y < 7.6$. Сравнение рис. 1 с рис. 2 показывает, что один и тот же параметр δ_E определяет зависимость E_* от $\sqrt{T_*} - 1 = y$ во всем интервале $0 < y < 7.6$ $(1 < T_* < 74)$.

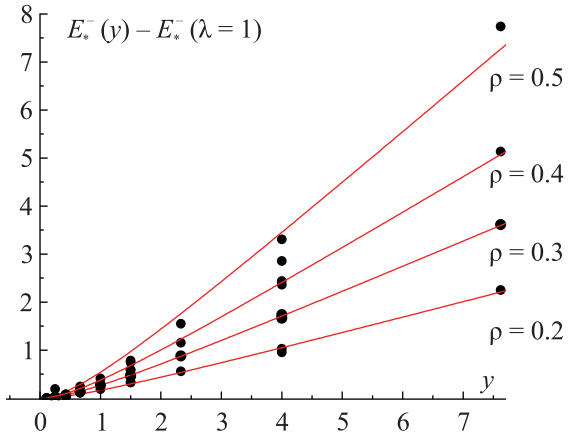

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость разности $E_*^-(y) - E_*^-(\lambda = 1)$ в широком интервале $y = 1/\lambda - 1 = \sqrt{T_*} - 1$. Точки из работ [8, 9]. Кривые отвечают (15)

В таблице 1 приведены параметры $E_*^-(1)$ и δ_E для четырех плотностей ρ (2).

Таблица 1. Приведенная плотность ρ (2); a определена в (9), (10); δ_E и $E_*^-(1)$ представлены в (12), (13); δ_S и $S(1)$ определены в (18), (19)

ρ	a	δ_E	δ_S	$E_*^-(1)$	$S(1)$
0.2	0.276	0.328	0.319	0.72	3.34
0.3	0.44	0.534	0.543	1.51	2.44
0.4	0.6	0.753	0.686	2.74	1.64
0.5	0.9	1.08	0.905	4.82	0.78

На рисунке 3 окончательно подтверждается представление для $E_*^-(\lambda)$ в виде (13):

$$\left[E_*^-(\lambda) - E_*^-(1)\right] \lambda = \delta_E (1 - \lambda)^2. \qquad (17)$$

График покрывает широкий интервал $0.116 < \lambda < 1$.

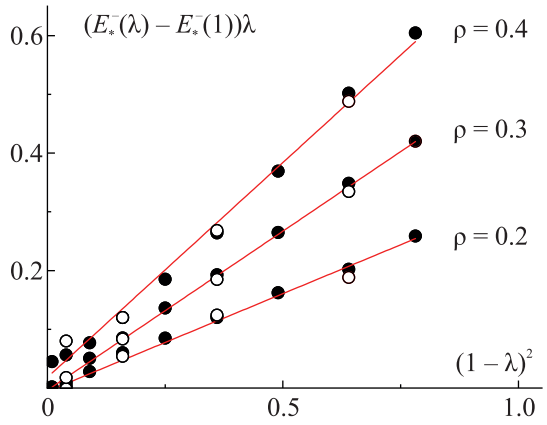

Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость избыточной энергии E_*^- после вычитания $E_*^-(1)$ от $(1 - \lambda)^2$, формула (17). Точки из работ [8, 9]

Уместно указать на принципиальную разницу между физическим и численным экспериментами. В физическом случае измеряется теплоемкость C_V, и веерная точка на ее температурной зависимости явно видна [6, 7]. В численном эксперименте все сложнее. Чтобы найти C_V, нужно сделать два вычитания. В первом из E_* вычитается большая величина $\frac{3}{2}T_*$ и находится E_*^-, а во втором вычитается также большая постоянная $E_*^-(1)$, что видно из (17). Этим объясняется разброс точек на рис. 3. Поправку к поправке $E_*(T_*)$ нельзя найти точнее, чем точность определения самой величины E_* численными методами. По этой же причине трудно численно исследовать предел малой плотности $\rho \ll 1$ и высоких температур $T_* \gg 1$. Поэтому мы и ограничились рассмотрением для ρ интервала $0.2 < \rho < 0.5$, где СТС является жидкостью, а не слабонеидеальным газом.

3. Энтропия на одну частицу S_V. В работе [8] приведены значения энтропии S_V, полученные численным методом. Так как $C_V = T\partial S_V/\partial T$, ожидаемая температурная зависимость S_V на основе (13) имеет вид

$$S_V(T_*) = \frac{3}{2}\ln T_* + S(1) + \delta_S(1-\lambda)^2\left(\frac{2+\lambda}{3}\right). \quad (18)$$

Мы ввели в рассмотрение параметр δ_S, чтобы независимо подтвердить представление (13) для C_V, ожидая, что $\delta_S \approx \delta_E$. Далее, как и для E_*, нужно сделать два вычитания и найти $S(1)$ и δ_S.

$$S^-(T_*) = S_V - \frac{3}{2}\ln T_*,$$
$$S^-(T_*) - S(1) = \delta_S(1-\lambda)^2\left(\frac{2+\lambda}{3}\right). \quad (19)$$

График $S^- - S(1)$ как функции $(1-\lambda)^2$ приведен на рис. 4, а $S(1)$ и δ_S содержатся в табл. 1, где видно, что δ_S и δ_E мало отличаются друг от друга. Это указывает на совместимость двух определений теплоемкости C_V

$$C_V = \frac{\partial E_*}{\partial T_*}, \quad C_V = T_*\frac{\partial S_V}{\partial T_*}, \quad (20)$$

где E_* и S_V найдены численными методами. Полезно привести эквивалентные формулы для E_* (13) и S_V (19)

$$E_*^-(\lambda) - E_*^-(1) = \delta_E\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda - 2\right),$$
$$S^-(\lambda) - S(1) = \frac{\delta_S}{3}\left(\lambda^3 - 3\lambda + 2\right). \quad (21)$$

Из (21) следует замечательное своей простотой выражение для свободной энергии на одну частицу

$$F_* = E_* - T_*S,$$
$$F_* = F_{T*} + E_*^-(1) - T_*S(1) - \frac{2}{3}\delta T_*(1-\lambda)^3. \quad (22)$$

Здесь $\lambda^2 = 1/T_*$, а F_{T*} – тепловая энергия:

$$F_{T*} = \frac{3}{2}T_*(1 - \ln T_*). \quad (23)$$

В (22) положено $\delta_E = \delta_S \equiv \delta$, т.е. из двух δ_E, δ_S выбрана δ_E, так как она определена по данным двух работ [8, 9], а δ_S – по данным только одной [8]. Из термодинамических тождеств и (22) следуют, конечно, выражения для E_*, C_V (13) и для S (18). Веерной точке для температурной зависимости C_V (14) отвечает точка перегиба для F, так как последний член в (22) при $T_* \to 1$ имеет вид

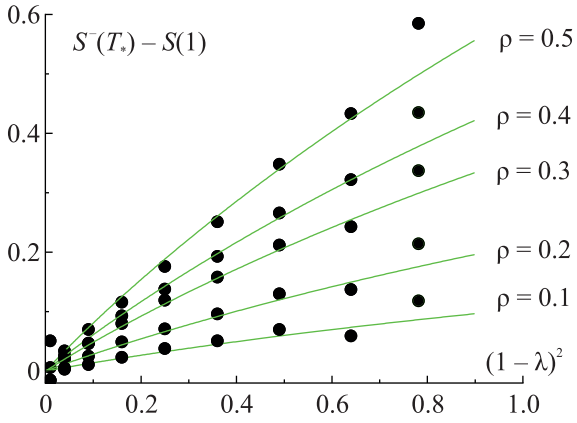

Рис. 4. (Цветной онлайн) Избыточная энтропия $S^-(T_*) - S(1)$ как функция $(1-\lambda)^2$. Графики отвечают (19). Точки из работы [8]

$$\frac{2}{3}\delta T_*(1-\lambda)^3 \simeq \frac{\delta}{12}(T_* - 1)^3. \quad (24)$$

Давление P в системе определяется через производную по n от свободной энергии F на одну частицу [5, 10]. Так же, как для E, F, T (6), можно определить безразмерное давление P_*

$$P \equiv \frac{\varepsilon_0}{\sigma^3}P_*; \quad P = n^2\frac{\partial F}{\partial n}; \quad P_* = \rho^2\frac{\partial F_*}{\partial \rho}, \quad (25)$$

где ε_0 определена в (2), а F_* – в (22). На основе (22), (25) получаем

$$P_* = P_{*0} + T_*\left[c_1 - c_2(1-\lambda)^3\right]. \quad (26)$$

Параметры в (22), (26) связаны выражениями

$$P_{*0} = \rho^2\frac{\partial E_*^-(1)}{\partial \rho}; \qquad c_1 = -\rho^2\frac{\partial S(1)}{\partial \rho};$$
$$c_2 = \frac{2}{3}\rho^2\frac{\partial \delta}{\partial \rho}. \quad (27)$$

Согласно (26), P_* почти линейно зависит от T_*. Этот замечательный эффект был обнаружен при $T > 10\,\mathrm{K}$ в 1960 г. [6] для жидкого ^{4}He и не был объяснен. Дело в том, что температурная область $T > 10\,\mathrm{K}$ содержит веерную точку $T = 17\,\mathrm{K}$, вблизи которой член $c_2(1-\lambda)^3$ в (26) мал. Характерная для идеального газа линейная зависимость P_* от T_* имеет место и в пределе $\lambda \to 0$ ($T_* \to \infty$), где она становится точной. Для СТС [8, 9] в (26) выполнено неравенство $c_2 \ll c_1$, и из-за фактора $(1-\lambda)^3$ в области средних T_* реализуется "гелиевый" эффект, обнаруженный в [6]. Следовательно, как для ^{4}He, так и для СТС жидкость помнит о своем "газовом происхождении" не только

при $T_* \to \infty$, где $C_V = 3/2$, но и при $T_* \to 1$, где также $C_V = 3/2$ для веерной точки.

Для количественного сравнения свойств СТС и жидкого ^{4}He зафиксируем масштабную энергию ε_0 (2) положением веерной точки у ^{4}He $T_0 = 17$ K: $T_0 = \varepsilon_0$. Это дает значение $\sigma_{He} = 2.116$ Å эффективного диаметра атома. Приведенная плотность жидкого ^{4}He есть $\rho_{\rm He} = n_{\rm He}\sigma_{\rm He}^3$ (2). При нулевых давлении и температуре она имеет значение $\rho_{\rm He} = 0.207$. Проанализируем только одну величину, энтропию S в веерной точке $S(1) = S(T_* = 1)$. Зависимости $S(1)$ для СТС (данные работы [8] и табл. 1) и для ^{4}He (данные работы [6]) от величины $\ln(1/\rho)$ приведены на рис. 5. Видно, что эти зависимости с поразительной точностью совпадают.

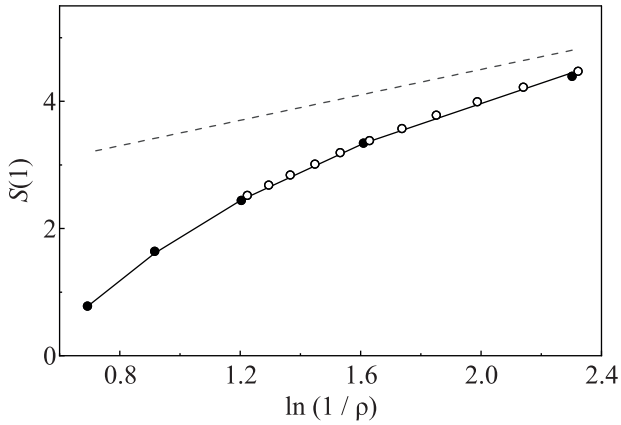

Рис. 5. Зависимость энтропии в веерной точке $S(1)$ от приведенной плотности. Темные точки соответствуют расчетам для СТС, светлые – экспериментальным данным для жидкого ^{4}He. Сплошная линия – аналитическая зависимость (30), пунктирная прямая – зависимость в веерной точке энтропии идеального газа от плотности (28)

Рисунок 5 показывает, что с уменьшением плотности ρ энтропия $S(1)$ для СТС и ^{4}He стремится к энтропии идеального больцмановского газа

$$S_{ig}(T_*) = \frac{5}{2} + \ln\frac{1}{\rho} + \frac{3}{2}\ln T_*,$$
$$S_{ig}(1) = \frac{5}{2} + \ln\frac{1}{\rho}. \qquad (28)$$

Выражение (28) следует из представления в наших единицах свободной энергии на одну частицу F_{ig*} в виде [5]

$$F_{ig*} = -T_*\left(1 + \ln\frac{1}{\rho} + \frac{3}{2}\ln T_*\right). \qquad (29)$$

Анализ опытных данных позволяет найти вириальное разложение для разности $S(1) - S_{ig}(1)$.

Для СТС

$$S(1) - S_{ig}(1) = -3.2\rho - 3.27\rho^2. \qquad (30)$$

Для жидкого ^{4}He

$$S(1) - S_{ig}(1) = -3.28\rho - 2.81\rho^2. \qquad (31)$$

Важно, что так как метод Монте-Карло [8, 9] не учитывает эффекты статистики частиц, столь точное совпадение (30) и (31) указывает на малость обменных эффектов для жидкого ^{4}He [11, 12]. Отсюда следует также, что СТС является квантовой невырожденной жидкостью, которая подчиняется закону соответственных состояний, сформулированному для жидких ^{4}He и ^{3}He. Этот закон связан с зависимостью масштабной энергии ε_0 от массы частиц M. Например, связь теплоемкостей СТС с разными M_1 и M_2, но одинаковыми σ имеет вид

$$C_{M1}(T) = C_{M2}\left(T\frac{M_1}{M_2}\right). \qquad (32)$$

Для жидкого ^{3}He формула (32) прогнозирует существование веерной точки при $T_{03} = (4/3)T_{04} = 22.7$ K.

4. Заключение. В настоящей работе мы продолжили исследование квантовых невырожденных жидкостей, начатое в [7, 11–13], в применении к СТС. Наиболее интересный результат дало сравнение этой модельной системы с жидким ^{4}He. Подобное сравнение оказывается полезным и в других областях теоретической физики [14]. В физическом эксперименте измеряется теплоемкость C_V. Интегрированием термодинамических тождеств можно определить энтропию S и энергию E, а далее и $F = E - TS$. В численном эксперименте [8, 9] находится E, а также S [8], эти величины надо дифференцировать для определения C_V. При малом количестве данных выполнение такой математической операции численными методами дает плохую точность и требует параметризации температурных зависимостей E и S. Физический метод, который применили мы, основан на формулах (13). Мы параметризовали не E и S, а температурную зависимость C_V, которая, как и у ^{4}He, имеет веерную точку. Затем интегрированием нашли E и S и сравнили их с результатами [8, 9]. Рисунки 1–5 говорят о хорошем соответствии результатов численного эксперимента и наших расчетов.

Авторы выражают благодарность Л. П. Межову-Деглину за полезные обсуждения работы.

Финансирование работы. Работа финансировалась из госзаданий Института теоретической физики Российской академии наук и Института физики твердого тела Российской академии наук.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. C. E. Hecht, *Statistical Thermodynamics and Kinetic Theory* (Dover, N.Y., 1998).
2. Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, (Мир, М., 1978), т. 1 [R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics* (Wiley, N.Y., 1975)].
3. R. N. Hill, "Quantum Corrections to the Second Virial Coefficient at High Temperatures", J. Math. Phys. **9**, 1534 (1968); doi: 10.1063/1.1664485.
4. W. G. Gibson, "Quantum-Mechanical Second Virial Coefficient at High Temperatures", Phys. Rev. A **2**, 996 (1970); doi: 10.1103/PhysRevA.2.996.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика, ч. 1* (Наука, М., 1976) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part 1* (Pergamon, Oxford, 1980)].
6. R. W. Hill and O. V. Lounasmaa, "The thermodynamic properties of fluid helium", Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A **252**, 357 (1960); doi: 10.1098/rsta.1960.0014.
7. Е. В. Лебедева, А. М. Дюгаев, П. Д. Григорьев, "О термодинамике квантовых жидкостей", Физика низких температур **40**(6), 615 (2014) [E. V. Lebedeva, A. M. Dyugaev, and P. D. Grigoriev, "On the thermodynamics of quantum liquids", Low Temp. Phys. **40**, 475 (2014)]; doi: 10.1063/1.4881196.
8. L. M. Sesé, "Thermodynamic and structural properties of the path-integral quantum hard-sphere fluid", J. Chem. Phys. **108**, 9086 (1998); doi: 10.1063/1.476354.
9. L. M. Sesé, "On the accurate direct computation of the isothermal compressibility for normal quantum simple fluids: Application to quantum hard spheres", J. Chem. Phys. **136**, 244504 (2012); doi: 10.1063/1.4729254.
10. Б. Н. Есельсон, В. Н. Григорьев, В. Г. Иванцов, Э. Я. Рудавский, Д. Г. Саникидзе, И. А. Сербин, *Растворы квантовых жидкостей He^3–He^4* (Наука, М., 1973) [B. N. Esel'son, V. N. Grigor'ev, V. G. Ivantsov, E. Ya. Rudavskii, D. G. Sanikidze, and I. A. Serbin, *Solutions of ^3He–^4He Quantum Liquids* (Plenum, N.Y., 1974)].
11. А. М. Дюгаев, "Закон соответственных состояний для квантовых жидкостей", ЖЭТФ **95**, 838 (1989) [A. M. Dyugaev, "Corresponding states law for quantum liquids", Sov. Phys. JETP **68**, 473 (1989)].
12. A. M. Dyugaev, "Rough model of a quantum liquid", J. Low Temp. Phys. **78**, 79 (1990); doi: 10.1007/BF00682111.
13. А. М. Дюгаев, П. Д. Григорьев, Е. В. Лебедева, "Энергия основного состояния квантовых жидкостей", Письма в ЖЭТФ **98**(1), 38 (2013); [A. M. Dyugaev, P. D. Grigoriev, and E. V. Lebedeva, "Ground-state energy of quantum liquids", JETP Lett. **98**, 33 (2013)]; doi: 10.1134/S0021364013140051.
14. G. E. Volovik, *The universe in a helium droplet* (Oxford University Press, N.Y., 2005).