Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 6, с. 487 – 494 © 2026 г. 25 сентября

Применение численного метода реконструкции изображений для повышения пространственного разрешения при диагностике рентгеновских плазменных источников с использованием крупноапертурных камер-обскур

Е. А. Болховитинов[+1)], *А. А. Рупасов*[+], *А. А. Кологривов*[+], *О. П. Иванов*[*], *В. Н. Потапов*[*]

[+] *Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[*] *Национальный исследовательский центр Курчатовский институт, 123182 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31 июля 2026 г.
После переработки 20 августа 2026 г.
Принята к публикации 24 августа 2026 г.

Предлагается метод использования крупноапертурных камер-обскур для регистрации с высоким пространственным разрешением изображений низкоинтенсивных малогабаритных плазменных рентгеновских источников. Для реализации этого метода именно для обскур большого диаметра была разработана и применена математическая процедура реконструкции изображения, основанная на итерационном методе решения некорректно поставленной задачи – интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода со специальной аппаратной функцией. На основе модельных и экспериментальных изображений показано, что использование такой процедуры позволяет получать реконструированные изображения источника с пространственным разрешением, существенно лучшим, чем собственное геометрическое разрешение крупноапертурных обскур. Таким образом, появилась реальная возможность использования в экспериментальной диагностике простых в изготовлении крупноапертурных обскур, обладающих высокой светосилой, которые ранее обычно не применялись для исследований рентгеновских плазменных источников.

DOI: 10.7868/S3034576626090222

Введение. При экспериментальных исследованиях малогабаритных источников мягкого рентгеновского (длина волны $1\,\text{Å} < \lambda < 50\,\text{Å}$) излучения, таких как лазерная плазма [1], микропинч [2, 3], вакуумная искра [4] и ряда других, возникает необходимость получать двумерное изображение этого источника в указанной спектральной области. Простейшим инструментом для получения такого изображения является камера-обскура (далее по тексту – обскура), представляющая собой малое по сравнению с размером источника отверстие в материале, непрозрачном в исследуемом спектральном диапазоне [5]. Неоспоримыми преимуществами обскуры являются ее малогабаритность, простота изготовления, отсутствие необходимости сложной юстировки, которые приводят к тому, что в большинстве экспериментов она является основным, а часто единственным, инструментом, формирующим изображение источника. При этом, в случае малой интенсивности рентгеновского источника, его интенсивности может оказаться недостаточно для получения на детекторе надежно регистрируемого изображения. В случае же использования обскуры большего диаметра для увеличения чувствительности системы регистрации уменьшается пространственное разрешение по объекту.

Возможным решением задачи увеличения интенсивности излучения, попадающего на детектор, без потери пространственного разрешения могло бы быть использование кодирующей апертуры (КА), что показано в [6–8]. Такая апертура может создаваться на основе структуры со взаимноперпендикулярным расположением непрозрачных полос, расстояния между которыми и их ширины рассчитаны по определенному алгоритму. При этом для реконструкции истинного изображения источника из закодированного теневого изображения при использовании КА требуется применение специального математического аппарата. Отметим, что несмотря на достаточно хорошие результаты исследований с использованием КА [6–8], такая диагностика осложняется рядом веских причин: изготовление миниатюрных КА является непростой задачей, требующей применения ультрафиолето-

[1)] e-mail: bolhovitinovea@lebedev.ru

вой литографии; кроме того, КА, вытравленная в тонкой фольге, является дорогостоящим и при этом довольно уязвимым элементом, который легко повредить в процессе экспериментов.

Вместе с тем, успешное применение математического метода реконструкции изображений для КА привело нас к идее разработать также метод для улучшения пространственного разрешения изображений, получаемых с помощью существенно более простых в изготовлении и менее уязвимых, но при этом светосильных обскур большого диаметра. При этом целью реконструкции является получение лучшего разрешения, чем дает обскура с диаметром, большим, чем характерный пространственный масштаб изменения интенсивности источника. Для примера, электрические пинчевые разряды имеют продольный размер обычно порядка нескольких миллиметров, и для них обскуры с диаметром порядка 100–700 мкм являются крупноапертурными.

Существуют несколько методов реконструкции изображений, которые можно разделить на методы деконволюции (алгоритм Ричардсона–Люси, фильтрация Винера, слепая деконволюция), статистические алгоритмы (метод максимального правдоподобия, метод полной вариации), фильтрацию в частотной области (вейвлет-преобразование, полосовая (гомоморфная) фильтрация) и современные нейросетевые алгоритмы (сверточные нейросети (CNNs), генеративно-состязательные сети (GANs)). Как правило, эти методы учитывают ожидаемые пространственные распределения излучения исследуемых объектов, что в нашем случае малогабаритных электроразрядных плазменных источников сделать затруднительно. Поэтому в настоящей работе был выбран достаточно простой и универсальный метод максимального правдоподобия в варианте, предложенном в [9] и эффективно применявшийся для устранения размытия астрономических изображений. В результате появилась возможность применения крупноапертурных обскур в диагностике с высоким пространственным разрешением.

1. Методология реконструкции рентгеновских изображений плазмы, полученных через крупноапертурную обскуру. Одним из хорошо известных малогабаритных источников рентгеновского излучения (РИ) является сильноточный электрический разряд в вакууме. В наших прежних экспериментах с пинчевыми разрядами [8] рентгеновские изображения излучающей области, полученные через крупноапертурную обскуру диаметром $d = 130$ мкм, носили лишь вспомогательный характер и имели невысокое пространственное разрешение. Некоторые из них представлены на рис. 1. В настоящей работе авторами было предложено реконструировать полученные в работе [8] обскурограммы с применением вышеуказанного математического метода, который был специально модернизирован для изображений, полученных через крупноапертурные обскуры.

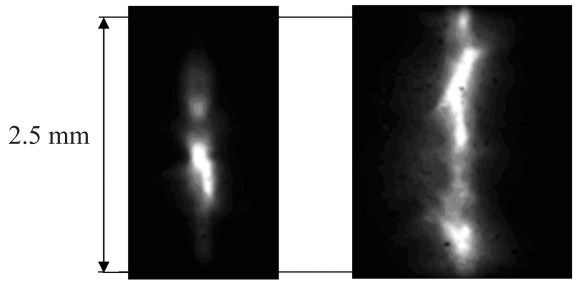


Рис. 1. Изображения плазмы разряда, полученные через крупноапертурную обскуру (130 мкм) на ФЗП для двух экспериментов. Масштаб приведен в пересчете для источника излучения

В экспериментах [8] размер плазменного источника был порядка нескольких миллиметров. Обскура устанавливалась в вакуумном канале между разрядом и детектором РИ, в качестве которого использовалась флуоресцентная запоминающая пластина (ФЗП). Расстояние между источником и обскурой составляло $H = 365$ мм, а между обскурой и ФЗП – $L = 580$ мм. Полученное на ФЗП скрытое теневое изображение излучающей плазмы визуализировалось с помощью специального сканера-ридера Карат КР-35ВР путем сканирования ФЗП с шагом $h = 15$ мкм.

Представленные изображения при указанных параметрах эксперимента имеют невысокое пространственное разрешение более 200 мкм. В то же время применение обскуры малого диаметра (менее 30 мкм) с лучшим пространственным разрешением не давало удовлетворительного результата ввиду низкой интенсивности источника. Поэтому оказалось целесообразно применить указанный выше модернизированный метод математической реконструкции изображений с улучшением пространственного разрешения, который основан на решении обратной задачи построения пространственного распределения излучения источника по его изображению на детекторе, полученному через крупноапертурную обскуру. При этом можно использовать приближение геометрической оптики, так как волновые эффекты на исследуемых длинах волн ($\lambda < 50$ Å) пренебрежимо малы.

2. Метод решения обратной задачи реконструкции изображения (принципиальный подход). Для улучшения пространственного разрешения изображений, полученных с помощью обскуры большого диаметра, был применен подход, связанный с решением интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$F(\mathbf{r}) = \int\limits_{\Delta S} G(\mathbf{r},\mathbf{R})S(\mathbf{R})d\mathbf{R}, \qquad (1)$$

где $F(\mathbf{r})$ – функция, описывающая распределение интенсивности на изображении источника, сформированном обскурой в плоскости экрана; $S(\mathbf{R})$ – функция истинного распределения интенсивности излучения в плоскости расположения источника; $G(\mathbf{r},\mathbf{R})$ – аппаратная функция обскуры, которая описывает зависимость распределения интенсивности от $\mathbf{r}$ в оцифрованных изображениях отверстия обскуры от точечного источника единичной интенсивности, расположенного в каждой точке $\mathbf{R}$ в плоскости источника (в цифровом виде называемых апертурными матрицами); ΔS – область интегрирования в плоскости источника в пределах его геометрических размеров.

Задача о решении интегрального уравнения (1), т.е. нахождения $S(\mathbf{R})$, относится к классу некорректных задач. Существуют устойчивые численные методы решения таких задач, один из которых был разработан М. З. Тараско и назван автором методом минимизации направленного расхождения [9]. Позже такой способ решения был получен Ричардсоном [10] и Люси [11] и впоследствии стал известен как метод максимального правдоподобия, он и был применен для решения нашей задачи. Полученное обскурой изображение после сканирования формировалось в виде двумерной матрицы D_{nm}, которая затем преобразовывалась в одномерный вектор $D_{nm} \to \mathbf{f}_j$ $j = 1,\ldots,N$, а уравнение (1) преобразовывалось в систему уравнений:

$$\mathbf{f}(j) = \sum g_{ji} \times \mathbf{S}_i; \quad j = 1,\ldots,N, \qquad (2)$$

где $\mathbf{f}_j$ и $\mathbf{S}_i$ – одномерные массивы (векторы) размера N и M, в которые записываются значения величин цифрового сигнала точек изображения (N значений) и исходного (искомого) изображения источника (M значений) соответственно; g_{ji} – аппаратная функция обскуры в дискретной форме, коэффициенты которой определяются как сигнал от элемента источника, расположенного в точке i, регистрируемый в элементе изображения j.

Для использования метода максимального правдоподобия необходимо перенормировать элементы системы уравнений (2). Эти перенормировки вводятся для того, чтобы провести рассмотрение задачи с точки зрения теории вероятности (при этом необходимо, чтобы вероятностные компоненты не превышали значения, равного 1) [9]. Перенормированные таким образом элементы приобретают вид:

$$\hat{f}_j = \mathbf{f}_j \Big/ \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_j, \quad \hat{g}_{ji} = g_{ji} \Big/ \sum_{j=1}^{N} g_{ji},$$

$$\hat{S}_i = S_i \left[\sum_{j=1}^{N} \hat{g}_{ji} \Big/ \sum_{j=1}^{N} \hat{f}_j \right]. \qquad (3)$$

После этого решение задачи сводится к итерационному процессу, который осуществляется в соответствии с выражением:

$$\hat{S}_i^{(n+1)} = \hat{S}_i^{(n)} \sum_{j=1}^{N} \left[\hat{g}_{ji}\hat{f}_j \Big/ \sum_{i=1}^{N} \hat{g}_{ji}\hat{S}_i^{(n)} \right], \qquad (4)$$

где $\hat{S}_i^{(n)}$ – результат n-й итерации, минимизирующей функционал направленного расхождения

$$J(\hat{S}^{(n)}) = \sum_{j=1}^{N} \hat{f}_j \lg \left[\hat{f}_j \Big/ \sum_{i=1}^{M} \hat{g}_{ji}\hat{S}_i^{(n)} \right]. \qquad (5)$$

Этот функционал получен путем преобразования функционала, введенного в [9], и минимизируется итерационным процессом.

Вопрос о завершении итерационного процесса не может быть однозначно определен этим функционалом, поскольку на результат вычисления влияют статистические флуктуации. Следовательно, наиболее разумным завершением итерационного процесса является достижение требуемой точности, т.е. выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{M} \left| \frac{S_i^{(n)} - S_i^{(n-1)}}{S_i^{(n-1)}} \right| S_i^{(n)} \le \rho, \qquad (6)$$

где ρ – заданный параметр. Для применения вышеописанного алгоритма было разработано необходимое программное обеспечение с целью реализации расчетов на ПК. Опыт восстановления тестовых изображений с использованием этого программного обеспечения показал, что, когда значение введенного параметра ρ в формуле (6) становится меньше 1 %, итерационный процесс может быть остановлен.

Многочисленные тестовые расчеты по реконструкции модельных изображений показали, что результат реконструкции и скорость его получения практически не зависят от выбора нулевого при-

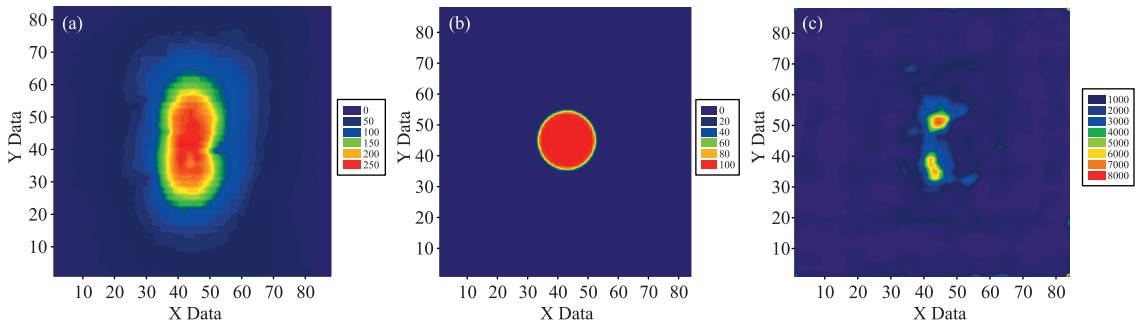


Рис. 2. (Цветной онлайн) (a) – Изображение модельного источника через отверстие обскуры ($\mathbf{f}_j$ в системе уравнений (2)). (b) – Изображение отверстия обскуры, оцифровка которого представляет собой апертурную матрицу. (c) – Реконструированное изображение источника ($\hat{S}_i^{(n+1)}$ в формуле (4)). По осям координат отложены номера пикселей. Цветовая гамма соответствует градациям интенсивности

ближения в итерационном процессе. Поэтому, ради простоты, в качестве такового использовалась равномерная светимость всей регистрируемой площади источника.

3. Модельный эксперимент по реконструкции разработанным методом изображения, получаемого с помощью обскуры. Для применения данного метода для крупноапертурных обскур, которые не обеспечивают необходимого геометрического пространственного разрешения, но при этом обладают высокой светосилой, при решении описанной выше обратной задачи в качестве апертурной матрицы выбирается изображение отверстия обскуры.

Ниже приведен пример численной реконструкции изображения заданного модельного объекта (в виде двух разнесенных точечных источников разной интенсивности): изображение этого объекта, смоделированное с использованием обскуры с отверстием большого диаметра (рис. 2a); изображение обскуры для получения апертурной матрицы (рис. 2b); реконструированное изображение источника, полученное при обработке файла изображения из рис. 2a с помощью разработанного описанного выше итерационного метода (рис. 2c).

Полученный результат наглядно демонстрирует улучшение пространственного разрешения изображения модельного источника и подтверждает возможность применения этого метода для реконструкции таких изображений в реальном эксперименте.

4. Модельные расчеты, иллюстрирующие влияние сжатия изображений и диаметра обскуры на качество реконструированных изображений. С увеличением числа точек обрабатываемого изображения N необходимый объем оперативной памяти компьютера возрастает как N^4, поэтому при расчетах с использованием персональных компьютеров приходится вводить ограничение на величину N. В нашем случае применялось ограничение $N < 100 \times 100$ точек. Если объем изображения в пикселях превосходил указанное ограничение, применялось принудительное сжатие до требуемой величины с определенным коэффициентом. Отметим, что сжатие само по себе ухудшает разрешение, но, несмотря на это, в результате работы программы реконструкции (как будет показано далее) итоговое разрешение улучшается по сравнению с разрешением, которое было бы получено при регистрации через такую обскуру без использования математической реконструкции.

Ниже приведены результаты модельного эксперимента по влиянию коэффициента сжатия и диаметра обскуры на качество восстановленных изображений протяженного источника, состоящего из 9-ти точечных источников различной интенсивности, который был выбран в качестве тестового объекта. В таблице 1 приведены результаты расчетов при использовании обскуры двух размеров – 100 и 700 мкм для различных значений коэффициента сжатия, а в табл. 2 – результаты исследования влияния диаметра обскуры (для диаметров 200, 400 и 600 мкм) на качество реконструированных изображений этих источников при коэффициенте сжатия 3. Параметры выбранного объекта: расстояние между ближайшими точечными источниками – 195 мкм, общее количество точечных источников – 9, а их интенсивность возрастает в соответствии с последовательностью 1–2–3–4–5–6–7–8–9 относительных единиц. Общая длина цепочки источников – 1560 мкм. В расчетах, результаты которых приведены в табл. 1, 2, размеры пикселей 15×15 мкм, расстояния обскура-детектор $L = 580$ мм и источник-обскура $H = 365$ мм взяты из реального эксперимента. Поле первичных изображений в табл. 1 и 2 составляет 200×200 пикселей, что соответствует линейному размеру 3 мм. Количество итераций – 100. Изоб-

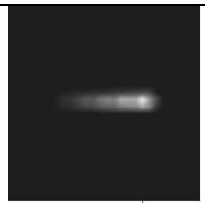
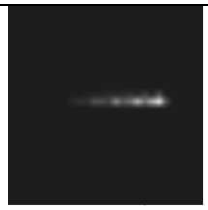
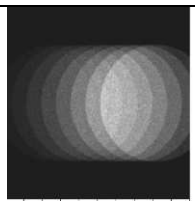
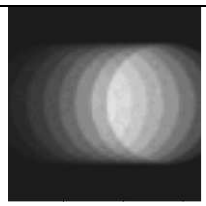
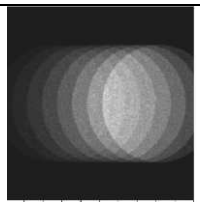
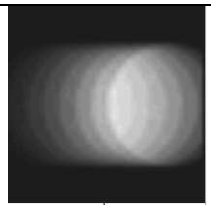
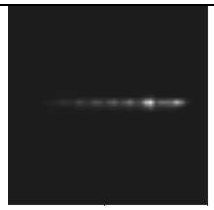
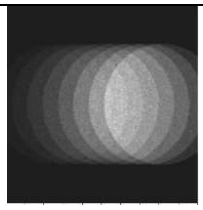
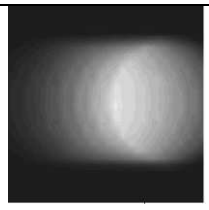
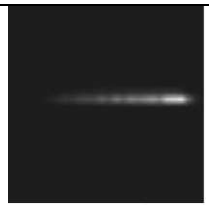
Characteristics of the model experiment	Original image (uncompressed)	Image after compression	Image reconstructed from data of compressed image
Pinhole diameter 100 μm Compression ratio 3			
Pinhole diameter 100 μm Compression ratio 5			
Pinhole diameter 100 μm Compression ratio 7			
Pinhole diameter 700 μm Compression ratio 3			
Pinhole diameter 700 μm Compression ratio 5			
Pinhole diameter 700 μm Compression ratio 7			

Таблица 1. Моделирование реконструкции изображений последовательности точечных источников излучения в зависимости от степени сжатия исходного изображения

ражения в таблицах получены с учетом статистических шумов, рассчитанных в пуассоновском приближении.

Типичное время работы разработанной компьютерной программы для обработки одного изображения с применением 50–100 итераций, составляет на

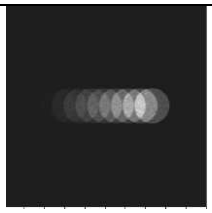
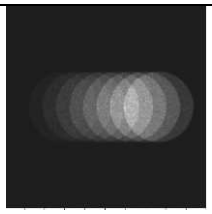
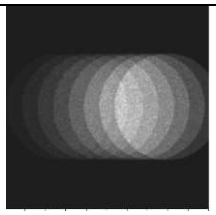
Characteristics of the model experiment	Original image	Reconstructed image
Pinhole diameter 200 μm Compression ratio 3		
Pinhole diameter 400 μm Compression ratio 3		
Pinhole diameter 600 μm Compression ratio 3		

Таблица 2. Моделирование реконструкции изображений последовательности точечных источников излучения в зависимости от диаметра обскуры

персональном компьютере примерно 50–100 с. Полученные реконструированные изображения массива точечных источников показывают удовлетворительные результаты работы предложенного алгоритма реконструкции вплоть до значения коэффициента сжатия, равного 7. Проведенное моделирование с бóльшими коэффициентами сжатия изображений (например, 10) показало существенное падение разрешения полученных реконструированных изображений.

5. Результаты реконструкции экспериментальных обскурограмм. На рисунках 3, 4 представлены результаты реконструкции некоторых экспериментальных обскурограмм, полученных при регистрации мягкого рентгеновского излучения электроразрядной плазмы пинчевых разрядов. При математической реконструкции использовался коэффициент сжатия от 5 до 7. На рисунке 3 приведены результаты реконструкции изображения пинчевого разряда с 7-кратным коэффициентом сжатия. Видно, что реконструкция улучшает разрешение всех элементов в изображении, а относительный размер всех элементов уменьшается. В соответствии с геометрией эксперимента при диаметре обскуры 130 мкм разрешение в плоскости источника составляет $d \cdot (L + H)/L = 130\,\text{мкм} \cdot (580 + 365)/580 = 212\,\text{мкм}$. Для восстановленного изображения размер пикселя определяется выражением $s \cdot (H/L) = 105 \cdot (365/580) = 66\,\text{мкм}$, где s – размер эффективного пикселя обскурограммы, который используется в алгоритме реконструкции и который равен $7 \cdot h = 7 \cdot 15\,\text{мкм} = 105\,\text{мкм}$. Отсюда можно сделать вывод, что даже при таком коэффициенте сжатия пространственное разрешение изображения улучша-

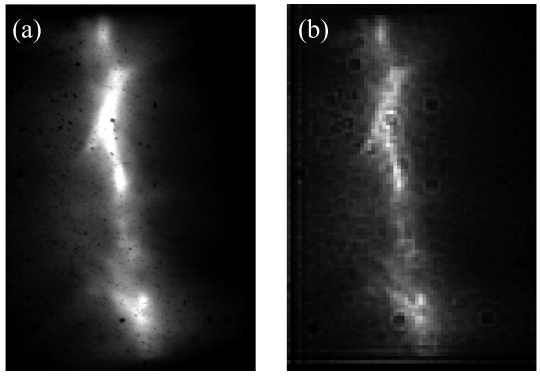
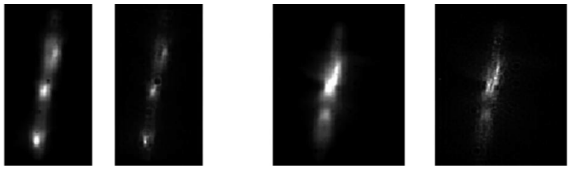


Рис. 3. Обскурограмма разряда (a) и реконструированное изображение размером 68 × 100 пикселей (количество итераций – 80) (b) после применения 7-кратного сжатия к исходной обскурограмме (a)



(a) (b)

Рис. 4. Примеры реконструкции двух обскурограмм. На каждой паре картинок слева – исходное изображение, справа – реконструированное изображение источника (количество итераций – 80) после сжатия в 5.7 (a) и 6.0 (b) раз, соответственно

ется примерно в 3 раза. Очевидно, что при меньшем сжатии улучшение будет более значительным.

На рисунке 4 приведены еще два примера реконструкции, из которых видно, что детализация и пространственное разрешение реконструированных изображений существенно лучше, чем у исходных. При этом дефекты исходного изображения, связанные с несовершенством детектора, несколько ухудшали качество реконструированного изображения, однако, практически не влияли на реализацию процесса реконструкции. Тем не менее, перед реконструкцией изображений желательно проводить их предварительную фильтрацию для устранения дефектов.

Естественным ограничением применения данного метода является размер шага сканирования изображения, который не позволяет сделать разрешение лучше, чем размер этого шага в пересчете на излучающий объект. Также достоверность результатов при применении метода ограничивается качеством изготовления обскуры. Насыщение детектора, обусловленное избыточной интенсивностью излучения, тоже приводит к недостоверности результатов реконструкции.

Выводы. Проведенные модельные эксперименты и реконструкция изображений, полученных в реальных экспериментах на электроразрядном источнике, показали высокую эффективность предложенного итерационного метода улучшения пространственного разрешения изображений, полученных при использовании обскур большого диаметра. Установлено, что даже при достаточно большом коэффициенте сжатия исходных изображений (необходимом для возможности расчетов на ПК с использованием разработанного авторами программного обеспечения), несмотря на некоторые потери качества сжатого изображения, целесообразность применения разработанного метода сохраняется, поскольку пространственное разрешение реконструированных изображений существенно превышает разрешение изображений, полученных непосредственно через такие крупноапертурные обскуры. Таким образом, появилась реальная возможность использования в экспериментальной диагностике простых в изготовлении крупноапертурных обскур, обладающих высокой светосилой, которые ранее обычно не применялись для исследований излучающих малоразмерных объектов слабой интенсивности, ввиду их низкого собственного геометрического пространственного разрешения.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета института. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. Н. Г. Басов, Ю. А. Захаренков, А. А. Рупасов, Г. В. Склизков, А. С. Шиканов, *Диагностика плотной плазмы* (Наука, М., 1989) [N. G. Basov, Yu. A. Zaharenkov, A. A. Rupasov, G. V. Sklizkov, and A. S. Shikanov, *Diagnostika plotnoj plazmy* (Nauka, Moscow, 1989)].
2. E. A. Bolkhovitinov, I. N. Tilikin, T. A. Shelkovenko, A. A. Kologrivov, V. M. Romanova, A. A. Rupasov, S. A. Pikuz, "Study of VUV radiation of hybrid and standard X-pinches on KING electric discharge facility", Plasma Sources Sci. Technol. **29**(2), 025009 (2020); DOI: 10.1088/1361-6595/ab6363.
3. S. A. Pikuz, T. A. Shelkovenko, I. N. Tilikin, E. A. Bolkhovitinov, A. A. Kologrivov, A. R. Mingaleev, V. R. Romanova, and A. A. Rupasov, "Study of SXR/EUV radiation of exploded foils and wires with spectral, spatial and temporal resolution simultaneously on KING electric discharge facility", Plasma Sources Sci. Technol. **30**(11), 115012 (2021); Doi.org/10.1088/1361-6595/ac3211.
4. А. Н. Зайдель, Е. Я. Шрейдер, *Вакуумная спектроскопия и ее применение* (Наука, М., 1976), с. 57 [A. N. Zajdel' and E. Ya. Shrejder, *Vakuumnaya spektroskopiya i eyo primenenie* (Nauka, Moscow, 1976), p. 57].
5. N. G. Basov, A. A. Rupasov, G. V. Sklizkov, A. S. Shikanov, Y. A. Zakharenkov, and N. N. Zorev, "Heating and Compression of Laser Irradiated Targets" (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).
6. A. Iltis, Z. Hmissi, A. Kologrivov, A. Rupasov, E. Bolkhovitinov, V. Potapov, and O. Ivanov, "Recording of X-ray laser plasma radiation with new coded aperture imaging system", Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A, Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment **1049**, 168121 (2023); doi.org/10.1016/j.nima.2023.168121.

7. A. A. Kologrivov, A. A. Rupasov, E. A. Bolkhovitinov, O. P. Ivanov, V. N. Potapov, I. A. Stuchebrukhov, and S. A. Abrosimov, "Application of a New Type of Coded Aperture for Reconstruction of Laser Plasma Images in the Soft X-ray Range", Physics of Atomic Nuclei **86**(11), 1 (2023); DOI:10.1134/S1063778823110224.
8. Е. А. Болховитинов, А. А. Рупасов, А. А. Кологривов, С. А. Пикуз, И. Н. Тиликин, Т. А. Шелковенко, О. П. Иванов, В. Н. Потапов, "Исследование пространственного распределения излучения плазмы Х- пинчей с помощью кодирующей апертуры нового типа", Письма в ЖЭТФ **120**(6), 459 (2024); [E. A. Bolkhovitinov, A. A. Rupasov, A. A. Kologrivov et al. (Collaboration), "Study of the Spatial Distribution of X-Pinch Plasma Radiation Using a New-Type Coded Aperture", JETP Lett. **120**, 445 (2024)]; DOI: 10.31857/S0370274X24090224.
9. М. З. Тараско, "Об одном методе решения линейных систем со стохастическими параметрами", Препринт Физико-Энергетического института # 156, Обнинск, 1969. Перепечатано в кн. В. Ю. Теребиж, *Введение в статистическую теорию обратных задач* (Физматлит, М., 2005), с. 335 (Приложение VI) [M. Z. Tarasko, Ob odnom metode reshenija linejnykh system so stokhasticheskimi matritsami. Preprint FEI-156. Leypunsky Institute for Physics and Power Engineering, Obninsk, Russia, 1969 [in Russian]. Reprint in the book V. Yu. Terebizh, *Vvedenie v statisticheskuyu teoriyu obratnyh zadach* (Fizmatlit, Moscow, 2005), p. 335 (Prilozhenie VI) [in Russian]].
10. W. H. Richardson, J. Opt. Soc. Am. **62**, 55 (1972); DOI: 10.1364/JOSA.62.000055.
11. B. Lucy, Astron. J. **79**, 745 (1974).