Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 1, стр. 658–660 *10 июля 1990 г.*

$SL(2, Z)$-ИНВАРИАНТНОСТЬ В ЗАМКНУТОЙ СУПЕРМЕМБРАНЕ

С.Д.Одинцов

Выдвинуто предположение, что группой инвариантности амплитуд замкнутой супермембраны на плоском фоне является $SL(2, Z)$. Показано, что вакуумная энергия замкнутой супермбраны, компактифицированной на тор, действительно может быть представлена в модулярно-инвариантной форме.

В настоящее время поиски правильной группы инвариантности (скрытой симметрии) являются одной из основных задач теории струн [1]. Хорошо известна роль модулярной инвариантности ($SL(2, Z)$-инвариантности) в теории замкнутой струны. Представление струнных амплитуд в модулярно-инвариантной форме позволяет избежать суммирования по бесконечному числу эквивалентных областей интегрирования, ограничиваясь одной фундаментальной областью. Требование модулярной инвариантности статсуммы вне массовой оболочки ведет к уравнениям на фоновые поля, эквивалентным уравнениям, возникающим из условия зануления β-функций.

---

[1] Детали вычислений будут представлены в расширенном варианте данной работы.

Очевидно, что подобные вопросы должны возникать и в теории мембран (для обзора см., например, [2,3]), изученных в гораздо меньшей степени. Поскольку струну можно рассматривать как некоторым образом редуцированную мембрану, на наш взгляд, естественно предположить, что амплитуды замкнутой мембраны на плоском фоне могут быть представлены в модулярно-инвариантной форме.

Действительно, рассмотрим $D=11$ замкнутую супермембрану на плоском фоне s_1 (температура) $\times R_{11-d} \times T_d$. Вакуумная энергия в такой теории в рамках квазиклассического квантования при $d=0$ была вычислена в работе [5], а при $d \neq 0$ в [6]. (На плоском фоне R_{11} вакуумная энергия зануляется в силу суперсимметрии.) При этом вакуумная энергия V представлена в виде трехкратного интеграла $\int_{-(1/2)}^{1/2} ds \int_{-(1/2)}^{1/2} d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2$ от некоторого выражения. Введем новую переменную $\tau = \tau_1 + i\tau_2$. Нетрудно проверить, что подынтегральное выражение в вакуумной энергии из работ [5,6] инвариантно относительно $\tau \to \tau + 1$ (группа дискретных трансляций U, состоящая из матриц типа $U \equiv \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \in Z$). Группа U является борелевой подгруппой группы $SL(2,Z)$. Тогда можно воспользоваться теоремой работы [4] в соответствии с которой, если некоторое выражение инвариантно относительно определенных подгрупп $SL(2,Z)$ (и в частности, U), то оно может быть представлено в модулярно-инвариантной форме. Явный рецепт такого представления является чрезвычайно простым [4].

В качестве примера рассмотрим вакуумную энергию в $D=11$ супермембране на фоне S_1 (температура) $\times R_8 \times T_2$ [6]. Модулярно-инвариантное выражение для нее может быть записано в форме[1)]:

$$V = -\int_F \frac{d^2\tau}{\pi^2 R_1 R_2} \sum_{(c,d)=1} (2\operatorname{Im}\gamma_{cd}\tau)^{-11/2} \Big[\Theta_3\Big(0 \,\Big|\, \frac{i\beta^2}{2\operatorname{Im}\gamma_{cd}\tau}\Big) -$$

$$-\Theta_4\Big(0 \,\Big|\, \frac{i\beta^2}{2\operatorname{Im}\gamma_{cd}\tau}\Big) \int_{-1/2}^{1/2} dy \sum_{\substack{n_1, n_2, \\ k_1, k_2 = -\infty}}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{(n_1 R_1 n_2 R_2)^2}{2\pi} \operatorname{Im}\gamma_{cd}\tau -$$

$$-\Big(\frac{n_1^2}{R_1^2} + \frac{n_2^2}{R_2^2}\Big)\frac{\operatorname{Im}\gamma_{cd}\tau}{2\pi} + 2\pi i(n_1 k_1 \operatorname{Re}\gamma_{cd}\tau + n_2 k_2 y)\Big\} \times$$

$$\times \Big[\prod_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp\big(-\frac{\operatorname{Im}\gamma_{cd}\tau}{\pi}\omega_{m_1,m_2} + 2\pi i m_1 \operatorname{Re}\gamma_{cd}\tau + 2\pi i y m_2\big)}{1 + \exp\big(-\frac{\operatorname{Im}\gamma_{cd}\tau}{\pi}\omega_{m_1 m_2} + 2\pi i m_1 \operatorname{Re}\gamma_{cd}\tau + 2\pi i y m_2\big)}\Big]^{-8},$$

где $F = \{-\frac{1}{2} \leqslant \tau_1 \leqslant \frac{1}{2},\ \tau_2 > \sqrt{1-\tau_1^2}\}$ – фундаментальная область, R_1, R_2 – радиусы тора, $\Theta_3(a,b)$ – Θ_3 – функция Якоби, $\omega_{m_1 m_2} = [(m_1 n_1 R_1)^2 + (m_2 n_2 R_2)^2]^{1/2}$, $\sum_{(c,d)=1}$ – сумма по всем взаимно простым c и d, $\gamma_{cd} = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$, символ $*$ означает, что любое преобразование в $SL(2,Z)$ с заданными (c,d) может быть использовано как представитель косет-разложения [4]. Тем же путем, что и выше можно представить в модулярно-инвариантной форме и другие амплитуды. Интересно, что амплитуды суперсимметричных замкнутых p-бран на подобном фоне могут быть представлены в форме, инвариантной относительно $G = [SL(2,Z)]^{n+1}$ при $p = 2n+1$ или $G = [SL(2,Z)]^{n+1} \otimes U$ при $p = 2n+2$.

В заключение отметим , что открытым остается вопрос: существует ли более широкая группа инвариантности замкнутой супермембраны, содержащая $SL(2, Z)$ как подгруппу?

Я признателен П.Таунсенду, К.Стелле и А.Быценко за полезные дискуссии.

Литература

1. *Witten E.* Preprint IASSNS-HEP-88/55, Princeton, 1988.
2. *Bergshoeff E., et al.* Ann. Phys. 1987, **185**, 330.
3. *Duff M.J.* Class. Quant. Grav. 1989, **6**, 1557.
4. *Alvarez E., Osorio M.A.R.* Nucl. Phys. B, 1988, **304**, 327.
5. *Bytsenko A.A., Ktitorov S.A.* Phys. Lett., B, 1989, **225**, 325.
6. *Bytsenko A.A., Odintsov S.D.* Preprint NCL-TP /26, Newcastle upon Tyne, 1989; Phys. Lett. B, 1990, in press.

Томский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
21 мая 1990 г.