*Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 2, стр. 713–716* *25 июля 1990 г.*

# СОКРАЩЕНИЕ АНОМАЛИЙ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ГЕТЕРОТИЧЕСКИХ СТРУН В ЛАГРАНЖЕВОМ ПОДХОДЕ

*С.В.Кетов, С.М.Кузенко, О.А.Соловьев*

Получены общие условия сокращения (супер)гравитационных и зигелевских аномалий для четырехмерных гетеротических струн, сформулированных в рамках двумерной (1, 0)-суперсимметричной лагранжевой полевой теории с использованием киральных бозонов на косетах.

Ковариантное геометрическое описание четырехмерных гетеротических струн, явная реализация внутренних симметрий возможны при использовании (1, 0)-суперсимметричных *киральных* бозонов в двумерной лагранжевой полевой теории, сформулированной в соответствующем искривленном (1, 0)-суперпространстве. Другие подходы к компактификации струн, основанные на эксплуатации свободных фермионов или ковариантных решеток, многообразий Калаби – Яу или орбифолдов, $N = 0, 1, 2$ минимальных моделей или конструкций Гепнера [1], исходят из фундаментальных требований суперконформной и модулярной инвариантностей и не связаны непосредственно с каким-либо инвариантным двумерным действием. В то же время, построение минимальных серий в двумерной (супер)конформной теории возможно по методу Годдарда – Кента – Олив (ГКО) с использованием (супер)алгебр Каца – Муди (КМ), связанных с косетами $G/H$, что, в свою очередь, допускает реализацию в рамках двумерной лагранжевой квантовой полевой теории в терминах моделей Весса – Зумино – Новикова – Виттена (ВЗНВ) на $G$, в которых $H$ – степени свободы калиброваны подходящим образом [2]. Поэтому имеется возможность построить соответствующее ковариантное двумерное действие, описывающее компактификацию струн на основе минимальных моделей и, в частности, конструкцию Гепнера [1].

Для четырехмерных *гетеротических* струн такое действие может быть построено в терминах (1, 0)-суперсимметричных киральных бозонов (лефтонов и райтонов), которые используются (наряду с гетеротическими фермионами) в качестве внутренних степеней свободы и определены на *независимых* косетах $G^L/H^L$ и $G^R/H^R$, соответственно [3]. Общая структура действия для $D$-мерных ($D \leqslant 10$) гетеротических струн имеет вид[1)]

$$S = S_{HS}(X^{\underline{m}}, \eta^I_-) + S_R(\Phi^{\hat{I}}_R) + S_L(\Phi^{\hat{\alpha}}_L) + S_{NM}(\Psi^{\hat{i}}_-), \tag{1}$$

где $X^{\underline{m}}$ ($\underline{m} = 0, 1, \ldots, D-1$) – скалярные (1, 0)-суперполя, нулевые моды которых суть ко-

[1)] Наши обозначения и соглашения совпадают с принятыми в [3].

ординаты $D$-мерного пространства-времени Минковского, $\eta^I_-$ ($I = 1, \dots, N_F$) – гетеротические фермионы, $S_R$ – киральное (1, 0)-суперсимметричное действие ВЗНВ для $G^R/H^R$-координат $\Phi^{\hat{I}}_R$ ($\hat{I} = 1, \dots, \dim(G^R/H^R)$) – (1, 0)-суперсимметричных (неабелевых) райтонов, $S_L$ – киральное (1,0)-суперсимметричное действие ВЗНВ для $G^L/H^L$-координат ($\hat{\alpha} = 1, \dots, \dim(G^L/H^L)$) – (1,0)-суперсимметричных (неабелевых) лефтонов $\Phi^{\hat{\alpha}}_L$, $S_{NM}$ – действие спинорных нотонов $\Psi^{\hat{i}}_-$ ($\hat{i} = 1, \dots, N_\Psi$). Ради экономии места действие (1) в явном виде здесь не выписывается.

Важно отметить, что действия $S_R$ и $S_L$ являются *киральными*, т.е. содержат соответствующие лагранжевы множители в ковариантных производных, обеспечивающие требуемую киральность для бозонов, и инвариантны относительно ассоциированных с ними локальных преобразований Зигеля [4]. Действие $S_{NM}$ необходимо, вообще говоря, для сокращения сопутствующей аномалии Зигеля (см. ниже). Мы используем лишь *спинорные* нотоны [5], поскольку с ними не связаны какие-либо квантовые обструкции, в отличие от халловских бозонов в [6] (ввиду ограничения на значения зигелевских множителей Лагранжа $\Lambda : \Lambda^2 < 1$) и так называемых $B$–$C$-систем [6] (ввиду существования динамики для этих полей).

В квантовой теории действие (1) необходимо дополнить соответствующими действиями (в подходящих калибровках) для (супер) репараметризационных гостов и гостов, связанных с симметриями Зигеля.

Вычисление (супер) гравитационных аномалий (например, по методу собственного времени в формализме фонового поля) позволяет сформулировать условия исчезания суммарного центрального заряда в $L$- и $R$-секторах в виде

$$\begin{aligned}
&\sum_i \left[ \frac{\dim(G_i^L)}{1 + c_2(G_i^L)/2k_i} - \frac{\dim(H_i^L)}{1 + c_2(H_i^L)/2k_i'} + \frac{1}{2}\dim(G_i^L/H_i^L)\right] = \frac{3}{2}(10 - D), \\
&\sum_\alpha \left[ \frac{\dim(G_\alpha^R)}{1 + c_2(G_\alpha^R)/2k_\alpha} - \frac{\dim(H_\alpha^R)}{1 + c_2(H_\alpha^R)/2k_\alpha'} \right] + \frac{1}{2}N_F = 26 - D,
\end{aligned} \tag{2}$$

где суммирование проводится по всем простым факторам в $G_R^L/H^L$ $(G^R/H^R)$ : $G^L/H^L = \prod_i G_i^L/H_i^L$ $(G^R/H^R = \prod_\alpha G_\alpha^R/H_\alpha^R)$, $c_2(G)$ – собственное значение оператора Казимира второго порядка в присоединенном представлении $G$ (с генераторами $t^{\hat{I}}$ и структурными константами $f^{IJk}$);

$$\begin{aligned}
&[t^{\hat{I}}, t^{\hat{J}}] = i f^{\hat{I}\hat{J}\hat{K}} t^{\hat{K}}, \quad f_{\hat{I}\hat{J}\hat{K}} f_{\hat{N}}^{\hat{J}\hat{K}} = c_2 \delta_{\hat{I}\hat{N}}, \\
&\mathrm{tr}(t^{\hat{I}} t^{\hat{J}}) = 2k\delta^{\hat{I}\hat{J}},
\end{aligned} \tag{3}$$

$k$ – уровень в КМ-алгебре $\hat{G}$, используемый в ГКО-построении представлений (супер) конформной алгебры. Аналогичные определения имеют место для подгруппы $H$ в $G$ (уровень $k'$ определяется способом вложения $\hat{H}$ в $\hat{G}$. Отметим, что данной конформной модели фактически можно сопоставить несколько разных ГКО-конструкций; следовательно, выбор геометрического пространства также *не* является однозначным.

Формулы (2) должны быть дополнены условиями исчезания суммарных зигелевских аномалий раздельно для $L$- и $R$-сектора (мы используем один зигелевский множитель Лагранжа в каждом секторе), которые также вычисляются по методу собственного времени в формализме фонового поля аналогично супергравитационным аномалиям. Уравнения, определяющие исчезание суммарных коэффициентов перед зигелевскими аномалиями, имеют вид

$$\frac{1}{2}N_\Psi + \sum_i \left[ \frac{\dim(G_i^L)}{1+c_2(G_i^L)/2k_i} - \frac{\dim(H_i^L)}{1+c_2(H_i^L)/2k_i'} \right] = 26,$$

$$\sum_\alpha \left[ \frac{\dim(G_\alpha^R)}{1+c_2(G_\alpha^R)/2k_\alpha} - \frac{\dim(H_\alpha^R)}{1+c_2(H_\alpha^R)/2k_\alpha'} + \frac{1}{2}\dim(G_\alpha^R/H_\alpha^R)\right] = 15. \qquad (4)$$

Формулы (2) и (4) могут быть выведены как в (1,0)-суперполях, так и в компонентах. С компонентной точки зрения, (1,0)-*суперлефтонные* фермионы (имеющие динамику) не взаимодействуют с зигелевскими вспомогательными полями (множителями Лагранжа) и поэтому не дают вклада в зигелевскую аномалию, в то время как (1,0)-*суперрайтонные* фермионы (являющиеся фактически нотонами) *взаимодействуют* с соответствующими зигелевскими множителями Лагранжа и поэтому дают вклад в зигелевскую аномалию.

Формулы (2) и (4) представляют основные результаты. Ниже рассматривается несколько возможных решений этих уравнений. Заметим, что первое уравнение в (4) определяет только число $N_\Psi$ нотонов и поэтому является несущественным для приложений.

а) Стандартной десятимерной гетеротической струне отвечает отсутствие лефтонов и райтонов, поэтому можно ограничиться уравнениями (2) с решениями $D = 10$ и $N_F = 32$, соответствующими (с привлечением условия модулярной инвариантности) калибровочным группам Spin $(32)/Z_2$ и $E_8 \times E_8'$

б) В *абелевом* случае для лефтонов *без райтонов*, что соответствует тороидальной компактификации гетеротической струны, легко находим систему уравнений

$$D + N_L = 10, \quad D + \frac{1}{2}N_F = 26, \quad \frac{1}{2}N_\Psi + N_L = 26, \qquad (5)$$

что в четырехмерном случае $(D = 4 : N_L = 6, N_F = 44, N_\Psi = 40)$ приводит к $SO(44)$ или $E_8 \times E_8' \times E_6$ гетеротическим струнам с $N = 4$ пространственно-временной суперсимметрией и $G^L = [U(1)]^6$.

в) В *абелевом* случае для лефтонов *с райтонами,* также отвечающем тороидальной компактификации гетеротической струны, имеем

$$D + N_L = 10, \quad N_R + D + \frac{1}{2}N_F = 26, \quad N_L + \frac{1}{2}N_\Psi = 26, \quad N_R = 10, \qquad (6)$$

что в четырехмерном случае $(D = 4: N_L = 6, N_R = 10, N_F = 24, N_\Psi = 40)$ приводит к $SO(24)$ или $E_6 \times E_6'$ гетеротическим струнам с $N = 4$ пространственно-временной суперсимметрией.

г) В *неабелевом* случае *без лефтонов*[2], соответствующем компактификации 10-мерных гетеротических струн на орбифолдах, при $k = 1$ имеется два простых уравнения:

$$\operatorname{rank}(G^R/H^R) + \frac{1}{2}\dim(G^R/H^R) = 15, \quad \frac{1}{2}N_F + \operatorname{rank}(G_R/H_R) = 16. \qquad (7)$$

Первое условие может быть удовлетворено, например, выбором $G^R/H^R = [SU(2)]^6$ с размерностью 18 и рангом 6. Тогда $N_F = 20$ определяет калибровочную группу рангом $10 = 5 + 5$, например, $SO(10) \times SO(10)$, причем $SO(10)$, являющаяся максимальной компактной подгруппой в $E_6$, может быть "поднята" до $E_6$ с помощью построения Френкеля – Каца. Таким

[2] Заметим, что в этом случае нет нотонов, $N_\Psi = 0$, поскольку нет и первого уравнения в (4).

образом, с использованием бозонизации гетеротических фермионов в райтоны сохраняется возможность "раздувания" орбифолда в соответствующее многообразие Калаби – Яу, также отвечающее $E_6$-симметрии в четырехмерном пространстве-времени. Конечно, допустимы и другие возможности, например, калибровочная группа $SO(20)$ на базе 20 гетеротических фермионов.

д) В *неабелевом* случае *с лефтонами* для обеспечения $N = 1$ пространственно-временной суперсимметрии естественно, следуя Гепнеру [1], использовать комбинацию $N = 2$ минимальных моделей, реализованных в рассматриваемом случае с помощью $(1,0)$-суперсимметричных косетов $\hat{SU}(2)_k/\hat{U}(1)$. $(2,0)$-суперсимметрия на мировом листе необходима и достаточна для $N = 1$ пространственно-временной суперсимметрии. Тогда в четырехмерном случае первое уравнение (2) приводит к стандартному условию [1]

$$\sum_{i=1}^{i_0} 3k_i/(k_i + 2) = 9, \tag{8}$$

168 решений которого табулированы в [7]. Для обеспечения модулярной инвариантности $(2,0)$-суперсимметрия должна быть расширена до $(2,2)$-суперсимметрии, что в существенном достигается использованием тех же строительных $G/H$-блоков в $R$-секторе, что использовались в $L$-секторе [1]. При этом число возможностей увеличивается только в этом месте до 1176 с учетом выбора разных модулярно-инвариантынх статсумм согласно $A - D - E$ классификации [7].

"Занимая" 9 единиц центрального заряда во второй формуле (4), для остатка $(G^R/H^R)'$ после вложения $(G^L/H^L)$ в $(G^R/H^R)$ : $(G^R/H^R) = (G^L/H^L) \otimes (G^R/H^R)'$ находим при $k = 1$ для $(G^R/H^R)'$ условие

$$\operatorname{rank}(G^R/H^R)' + \frac{1}{2}\dim(G^R/H^R)' = 6, \tag{9}$$

причем

$$N_F = 14 + \frac{1}{2}\dim(G^R/H^R). \tag{10}$$

Например, условие (9) может быть удовлетворено для $(G^R/H^R)' = SU(3)$ с размерностью 8 и рангом 2. Тогда $N_F = 22 + 2i_0$. В частности, для $3^5$ модели [1] $(5 \cdot 9/5 = 9)$ имеем $N_F = 32$.

Заметим, что все рассмотренные выше случаи благодаря использованию тороидальной компактификации или минимальных моделей являются точно решаемыми, а возможности г) и д) могут быть полезны для построения реалистических моделей четырехмерных гетеротических струн и феноменологических приложений.

Авторы признательны Д.Гепнеру и А.Ю.Морозову за полезные обсуждения.

**Литература**

1. *Gepner D.* Phys. Lett. B, 1987, **199**, 380; Nucl. Phys. B, 1988, **296**, 757.
2. *Karabali D., Park Q.-H., Schnitzer H.J.* Phys. Lett. B, 1989, **216**, 307.
3. *Gates S.J., Siegel W.* Phys. Lett. B, 1988, **206**, 631.
4. *Siegel W.* Nucl. Phys. B, 1984, **238**, 307.
5. *Kuzenko S.M., Soloviev O.A.* Int. J. Mod. Phys. A, 1990, **5**, 1341.
6. *Hull C.M.* Phys. Lett. B, 1988, **206**, 234; ibid. **212**, 419.
7. *Lynker M., Schimmrigk R.* Phys. Lett. B, 1988, **208**, 216; ibid. **215**, 681.

Институт сильноточной электроники
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступила в редакцию
30 мая 1990 г.