*Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 2, стр. 730–733* *25 июля 1990 г.*

# ДИФФУЗИЯ В СЛУЧАЙНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ: РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

*Е.Б.Коломейский*

Показано, что в неоднородной среде не слишком высокой размерности перенос осуществляется путем движения локализационного центра. Найдены законы его движения и условия перехода к обычной диффузии в зависимости от характера неоднородностей и размерности пространства.

В последние годы достигнут значительный прогресс в понимании свойств различных многообразий (доменных стенок, вихревых линий в сверхпроводниках, границ раздела фаз и т.д.), находящихся в случайной среде (см., например, обзоры [1, 2]). Перечисленные выше системы описываются гамильтонианом общего вида:

$$H = \int d^{D}\mathbf{x}\left[\frac{m}{2}(\nabla \mathbf{z})^2 + V(x, \mathbf{z}(x))\right], \tag{1}$$

где $m$ – эффективная жесткость $D$-мерного многообразия, $\mathbf{z}$–$d$-мерный вектор его поперечного смещения, $V$ – случайный потенциал с нулевым средним. Например, абрикосовскому вихрю отвечает $D = 1$, $d = 2$, а доменной стенке в трехмерном кристалле – $D = 2$, $d = 1$. Хорошо изученными являются случаи, когда корреляционная функция случайного потенциала достаточно быстро убывает в продольном направлении $x$: $\langle V(x, \mathbf{z}) V(x', \mathbf{z}') \rangle = \Delta\delta(x - x')R_0(\mathbf{z}-\mathbf{z}')$. В предлагаемой работе будет исследован вырожденный случай, когда случайный потенциал вообще не зависит явно от продольных координат. На первый взгляд такая модель случайной среды представляется достаточно искусственной и практически не реализуемой. Эта точка зрения является правильной, если иметь в виду лишь перечисленные выше объекты. Вместе с тем существует достаточно широкий класс других физических систем, где принятый нами вид случайного потенциала является скорее правилом, чем исключением. Действительно, при $D = 1$ статистическая сумма $W(t, \mathbf{z})$ закрепленной в точках (0,0) и $(t, \mathbf{z})$ линии подчиняется диффузионному уравнению типа $d$-мерного уравнения Шредингера [3]:

$$T\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{T^2}{2m}\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{z}^2} - V(t, \mathbf{z})W, \tag{2}$$

причем роль постоянной Планка играет температура $T$, времениподобной переменной является длина линии $t$, а "массе" частицы отвечает жесткость $m$. Если отвлечься от физической сущности этих параметров, связанной с гамильтонианом (1), то само по себе уравнение (2) описывает $d$-мерную диффузию некоторой величины $W$, происходящую в случайном потенциале. В качестве примеров можно привести также автокаталитические химические реакции в неоднородной среде, распространение мигрирующих популяций, биологическую эволюцию и т.д. [4]. В этих случаях $W$ имеет смысл плотности вероятности соответствующей величины. Ясно, что с точки зрения этих задач, решению которых и посвящена предлагаемая работа, наиболее естественной постановкой представляется такая, когда свойства среды, в которой происходит диффузия, не меняются со временем: $V(t, \mathbf{z}) = V(\mathbf{z})$. Таким образом, свойства гамильтониана (1) с нереалистичным на первый взгляд видом случайного потенциала тесно связаны с поведением другой реальной физической системы. Вместе с тем, исследование гамильтониана оказывается предпочтительным, поскольку существуют наглядные физические соображений (см. ниже), позволяющие достаточно просто получить большую часть результатов. В дальнейшем за параметрами $m$ и $T$ будут сохранены прежние названия, хотя реально это могут быть другие величины, а время $t$ в контексте гамильтониана (1) будет иметь смысл длины.

Нашей отправной точкой будет гамильтониан (1) с произвольным $D$ и корреляционной функцией $\langle V(\mathbf{z})V(\mathbf{z}')\rangle = \Delta R_0(\mathbf{z}-\mathbf{z}')$ общего вида: $R_0(\mathbf{z}) = z^{-\beta d}$ при $z \to \infty$. Ниже будет рассмотрен также случай нескоррелированного потенциала. Функциональное нелинейное уравнение ренормгруппы, отвечающее гамильтониану (1) с $V(x, \mathbf{z}(x)) = V(\mathbf{z}(x))$, отличается от приведенных в [5,6,2] лишь своей линейной частью:

$$\frac{dR}{dl} = (4-4\zeta)R + \zeta z R'(z) + \frac{1}{2}R''^2(z) - R''(z)R''(0) + \frac{d-1}{2}\,\frac{R'(z)}{z}\,(R'(z) - R''(0))\,. \quad (3)$$

Здесь $l$ – обычный ренормировочный параметр, $\zeta$ – так называемый индекс шероховатости, соответствующий масштабной размерности поля $z(x)$ [1,2] (он и будет характеризовать диффузию). При написании уравнения (3) также предполагалось, что $R$ зависит лишь от абсолютной величины $z$, а ренормированная температура, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dT}{dl} = (2 - D - 2\zeta)T \quad (4)$$

несущественна в ренормгрупповом смысле. Поскольку дальнейший анализ уравнения (3) во многом повторяет рассуждения, подробно изложенные в работах [5,6,2], приведем лишь окончательные результаты. Фиксированная функция уравнения (3) в пределе больших $z$ состоит из двух слагаемых

$$R^*(z) = Az^{4-4/\zeta} + Bz^{(4/\zeta)-4-d}\exp(-\zeta z^2/2\epsilon)\,, \quad (5)$$

где $A$ и $B$ – произвольные постоянные, $\epsilon = -R''(0)$. Асимптотика (5) определяется первым, вторым и четвертым слагаемыми правой части уравнения (3). Все остальные слагаемые, а также невыписанные члены более высокого порядка по производным $R$ не меняют поведения функции фиксированной точки на больших расстояниях, поскольку последняя стремится к нулю при $z \to \infty$. Первое слагаемое (5) соответствует дальнодействующим корреляциям, а второе – случайному потенциалу конечного радиуса действия. Приравнивая показатели первого слагаемого и затравочного коррелятора $R_0 = z^{-\beta d}$, получаем для этого случая

$$\zeta_{LR}(\beta, d) = \frac{4}{4+\beta d}\,. \quad (6)$$

Найденная "дальнодействующая" фиксированная точка (5), (6) устойчива при $\beta < 1/2$ [6,2]. Заметим, что ей соответствуют оба отличных от нуля коэффициента $A$ и $B$. При $\beta \geqslant 1/2$ поведение на больших масштабах (временах) определяется только вторым слагаемым формулы (5) (первое несущественно в ренормгрупповом смысле [6,2]). Поскольку $\beta$ не входит в уравнение (3), величина индекса $\zeta_{SR}$ при $\beta \geqslant 1/2$ (а также для нескоррелированного потенциала) не зависит от $\beta$ и может быть найдена из соображений непрерывности [6,2]:

$$\zeta_{SR}(d) = \zeta_{LR}(\beta = 1/2, d) = \frac{8}{8+d}\,. \quad (7)$$

Покажем, как эти результаты могут быть воспроизведены из простых физических соображений, восходящих к Имри и Ма [7]. Индекс $\zeta$ формируется как следствие компромисса между увеличением упругой части энергии деформированного многообразия (первое слагаемое (1)) и уменьшением случайной части (второе слагаемое (1)). Рассмотрим многообразие линейного размера $t$ с характерным поперечным смещением $\langle z \rangle$. Для дальнодействующего потенциала с $R_0 = z^{-\beta d}$ условие компромисса выглядит как

$$m(\langle z \rangle / t)^2 \approx (\Delta \langle z \rangle^{-\beta d})^{1/2}.$$

Отсюда

$$\langle z \rangle \approx \left(\frac{\Delta}{m^2}\right)^{\frac{1}{4+\beta d}} t^{\frac{4}{4+\beta d}}. \tag{8}$$

Сравнивая с определением $\langle z \rangle \sim t^{\zeta}$, приходим к формуле (6). При $\beta \geqslant 1/2$, а также для нескоррелированного потенциала, подставляя в (8) результат ренормгруппового анализа $\beta =$ $= 1/2$, находим

$$\langle z \rangle \approx \left(\frac{\delta}{m^2}\right)^{\frac{2}{8+d}} t^{\frac{8}{8+d}}. \tag{9}$$

Здесь $\delta$ – пропорционально $\Delta$, зависит от затравочного коррелятора $R_0$ и, зная последний, его легко восстановить из соображений размерности. "Нуль-температурные" фиксированные точки, отвечающие диффузионным законам (8), (9), устойчивы, если выражение в скобках формулы (4) (при $D = 1$) отрицательно. Иными словами, аномальная диффузия (отличие $\zeta$ от 1/2) имеет место, если

$$\begin{aligned} \beta d &< 4, \quad \beta < 1/2, \\ d &< 8, \quad \beta \geqslant 1/2 \end{aligned} \tag{10}$$

"Нуль-температурность" имеет ясное физическое содержание. Выше уже отмечалось, что температура в уравнении (2) имеет смысл постоянной Планка в уравнении Шредингера. Поэтому "нуль-температурность" означает классичность. Однако в классической механике траектория частицы хорошо определена, поэтому решение уравнения (2) представляет собой локализационный центр (резкий максимум плотности вероятности), перемещающийся согласно законам (8), (9) по все более выгодным минимумам случайного потенциала. Последний вывод (без доказательства) был сделан также в работе [4]. Интересно, что проведенный в этой работе вариационный расчет, использующий идеи Мотта [8], для нескоррелированного случайного потенциала независимо от размерности пространства привел к результату $\langle z \rangle \sim t/\ln t$, который численно близок к (7) в пространстве малой размерности.

Если размерность пространства не удовлетворяет неравенствам (10), то случайный потенциал несуществен и на больших временах происходит обычная диффузия: $\langle z \rangle \approx (T/m)^{1/2} t^{1/2}$.

Я благодарен Н.И.Лебедеву и А.П.Леванюку за полезные дискуссии, а также анонимному рецензенту за замечания по тексту работы.

### Литература

1. *Nattermann T., Villain J.* Phase Transitions, 1988, 11, 5.
2. *Nattermann T., Rujan P.* Int. J. Mod. Phys., to be published.
3. *Huse D.A., Henley C.L., Fisher D.S.* Phys. Rev. Lett., 1985, 55, 2924.
4. *Zhang Y.C.* Phys. Rev. Lett., 1986, 56, 2113.

5. *Fisher D.S.* Phys. Rev. Lett., 1986, 56, 416.
6. *Halpin-Healy T.* Phys. Rev. Lett., 1989, 62, 442.
7. *Imry Y., Ma S-K.* Phys. Rev. Lett., 1975, 35, 1399.
8. *Mott N.F.* J. Non-Cryst. Solids., 1968, 1, 1.

Институт кристаллографии им. А.В.Шубникова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 июня 1990 г.