Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 2, стр. 767--768 25 июля 1990 г.

ГАЗ АНИОНОВ НА РЕШЕТКЕ В ПРЕДЕЛЕ НИЗКОЙ ПЛОТНОСТИ

А.А.Белов, С.Я.Житомирская, Ю.Е.Лозовик,
В.А.Мандельштам

Методом функций Грина получено точное выражение для второго вириального коэффициента решеточного газа частиц с дробной статистикой, возникающего в некоторых моделях ВТСП.

За последнее время был достигнут значительный прогресс в изучении свойств систем тождественных частиц, обладающих дробной статистикой, которые играют важную роль в объяснении механизма высокотемпературной сверхпроводимости (см. обзор [1]). Вильчеком с соавторами [2] было положено начало исследованию термодинамики анионов. Работой Лафлина и др. [3] было инициировано изучение анионов в рамках RPA-приближения. Фрелихом и Марчетти [4] была сформулирована решеточная теория анионов. В приближении среднего поля решеточный анионный газ сводится к задаче Хофштадтера [5].

Проблема анионного газа низкой концентрации и, в частности, задача о взаимодействии двух анионов на решетке $\mathbf{Z}^2$ в отличие от случая $\mathbb{R}^2$ оказывается чрезвычайно сложной.

В данной работе получено частичное решение указанной проблемы, а именно найдено выражение для решеточной функции Грина частицы в поле единственного вихря, с помощью которого могут быть вычислены различные характеристики системы "частица + вихрь", а следовательно, и термодинамические свойства разреженного газа анионов. В качестве иллюстрации метода мы получим выражение для второго вириального коэффициента $B(\varphi, \beta)$, где φ – поле вихря (в единицах кванта потока), $\beta = 1/T$. Метод данной работы может быть использован для построения эффективного лагранжиана решеточной теории с вихрями.

Непрерывный аналог рассматриваемой задачи (в пределе $\beta \to \infty$ рассмотренный еще Карслоу в 1909 г). возникал в разное время и независимо в эффекте Ааронова – Бома [6], физике полимеров [7], теории анионов [2] и др. приложениях.

Перейдем к формулировке модели. Гамильтониан композитного образования "частица + + струка Дирака" имеет вид

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle} C_i^+ e^{-i\theta_{ij}} C_j, \tag{1}$$

причем каждому ребру, пересекающему струну, присваивается фаза $\varphi = \pi - \theta$ (для частиц с θ-статистикой) и $\theta_{ij} = \varphi N_{ij}$, где N_{ij} – число струн, пересекающих ребро $\langle ij \rangle$. В пределе разреженного газа достаточно знать второй вириальный коэффициент

$$\widetilde{B}(\varphi, \beta) = -\frac{1}{Z_1(\beta)} \widetilde{Z}_2(\varphi, \beta), \tag{2}$$

где тильда здесь и далее означает вычитание значения функции при $\varphi = 0$ (с целью избежать расходимостей), $Z_1(\beta) = I_0^2(2\beta)$ - одночастичная статсумма, Z_2 – статсумма относительного движения двух частиц,

Статсумма $Z_2(\varphi, \beta)$ связана преобразованием Лапласа со следом функции Грина $\widetilde{G}_\varphi(z)$:

$$\mathrm{tr}\, \widetilde{G}_\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-\beta z} \widetilde{Z}_2(\varphi, \beta) d\beta. \tag{3}$$

Функцию Грина G мы будем вычислять используя решеточный аналог метода накрывающего пространства. Вначале перейдем к четырехструнной калибровке, так, чтобы струны ограничивали квадранты решетки; при этом в каждом из квадрантов движение описывается свободным гамильтонианом:

$$H_0 = -t \sum_{\langle ij \rangle} C_i^+ C_j.$$

Представим функцию Грина (3) в виде суммы по ансамблю случайных блужданий:

$$\operatorname{tr} \widetilde{G}_\varphi(z) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} \sum_{\gamma: x \to x} z^{|\gamma|}(e^{ik(\gamma)\varphi} - 1), \tag{4}$$

где $|\gamma|$ – длина пути γ, а $k(\gamma)$ – число обкруток γ вокруг вихря.

При суммировании по путям мы будет пользоваться вариантом блочно-резольвентного разложения [8]. Именно, каждому замкнутому пути γ ставится в соответствие укрупненный путь Γ, состоящий из координат последовательных первых перескоков с одной из прямых $\{(x = (0), (y = 0)\}$ на другую. При этом задача о суммировании по путям γ, которым отвечает путь $\Gamma(\gamma)$ длины K, факторизуется на задачу о блуждании на $\mathbf{Z}_4$, приводящем к данному числу обкруток $k(\gamma)$ и задачу о нахождении функции Грина перескока с луча $(x > 0, y = 0)$ на луч $(x = 0, y > 0)$ при свободном движении частицы в первом квадранте, свернутой с самой собой K раз.

Приведем окончательное выражение для интересующей нас функции, оставляя подробный математический вывод для другого случая. Введем в рассмотрение интегральный оператор $\hat{F}_z : L_2(0, 1) \to L_2(0, 1)$ с ядром

$$F_z(x, y) = \frac{2z}{\pi} \frac{E(4z\sqrt{xy})}{1 - 16z^2 xy}, \tag{5}$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода. Пусть $\hat{A}_z \equiv (2\hat{F}_z)^{-1}(1 - (1 - 4\hat{F}_z^2)^{1/2})$. Тогда для $G_\varphi(z)$ имеем:

$$\operatorname{tr} \widetilde{G}_\varphi(z) = 8z(1 - \cos\varphi)\operatorname{Tr}[\hat{A}_z^3 \frac{\partial \hat{A}_z}{\partial z} (\hat{A}_z^4 + 1)(1 - A_z^4)^{-1}(1 - 2A_z^4 \cos\varphi + \hat{A}_z^8)^{-1}]. \tag{6}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к (6) из (2), (3) находим $\widetilde{B}(\varphi, \beta)$.

Заметим, что ввиду компактности оператора $\hat{A}_z$ функция $\widetilde{B}(\varphi, \beta)$ может быть найдена численно с высокой точностью. Результаты машинных расчетов будут опубликованы отдельно.

Авторы благодарны Я.Г.Синаю за внимание к работе и С.К.Нечаеву за полезные обсуждения.

Литература

1. *Chen Y.-H., Wilczek F., Witten E., Halperin B.I.* Int. J. Mod. Phys. B, 1989, **3**, 1001.
2. *Arovas D., Schrieffer J.R., Wilczek F., Zee A.* Nucl. Phys. B, 1985, **251**, 117.
3. *Fetter A.L., Hanna C.B., Laughlin R.B.* Phys., Rev. B, 1989, **39**, 9679.
4. *Fröhlich J., Marchetti.* Comm. Math. Phys., 1989, **121**, 177.
5. *Hofstadter D.R.* Phys. Rev. B., 1976, **14**, 2239.
6. *Gerry C.C., Singh V.A.* Phys. Lett., 1982, **92A**, 11.
7. *Гросберг А.Ю., Хохлов А.Р.* Статистическая физика макромолекул М.: Наука, 1989.
8. *Fröhlich J., Spencer T.* Comm. Math. Phys., 1983, **88**, 151.

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
7 июня 1990 г.