Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 3, стр. 780–782 *10 августа 1990 г.*

СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС ПРИ ЛИНЕЙНОМ И НЕЛИНЕЙНОМ ОТКЛИКЕ БИСТАБИЛЬНОЙ СИСМЕТЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

М.И.Дыкман, П.В.Е.Макклинток[1)], *Р.Маннелла*[1)], *Н.Стокс*[1)]

Продемонстрирована применимость теории линейного отклика (выполнение стандартных спектральных соотношений) при стохастическом резонансе (СР). Рассмотрен СР в относительно сильных полях. Указана причина возникновения СР и область параметров, где он проявляется.

Одним из новых флуктуационных явлений в би- и мультистабильных системах является СР: возрастание и последующий спад с ростом внешнего шума отношения сигнал/шум, R, т.е. отношения интенсивности пика в спектральной плотности флуктуаций (СПФ) $Q(\omega)$ на частоте внешнего поля Ω к значению СПФ в отсутствие поля $Q^{(0)}(\Omega)$ (имеются также другие, по существу эквивалентные, определения СР, см. [1,2] и цитированные там работы). СР наблюдался в кольцевых лазерах [1], а также при численном и аналоговом моделировании различных бистабильных систем, ср. [1-3]. При исследовании СР обычно подчеркивается его нелинейная природа.

Ниже показано, что СР в слабом периодическом поле полностью описывается теорией линейного отклика. Это позволяет легко понять причину возникновения СР и установить зависимость R от параметров. Для конкретности анализ проведен для броуновской частицы в двухъямном потенциале $U(q)$ (интерес к этой модели возобновился, в частности, в связи с изучением систем с джозефсоновскими контактами, см. [4]):

$$\ddot{q} + 2\Gamma\dot{q} + U'(q) = A\cos\Omega t + f(t), \quad \langle f(t)f(t')\rangle = 4\Gamma T\delta(t-t'). \tag{1}$$

В результате вынужденных колебаний, которые при малой амплитуде поля A определяются линейной восприимчивостью $\chi(\Omega)$, $\langle q(t)\rangle = A\,\mathrm{Re}[\chi(\Omega)\exp(-i\Omega t)] + \mathrm{const}$, в СПФ системы

$$Q(\omega) = \lim_{\tau\to\infty}(4\pi\tau)^{-1}\left|\int_{-\tau}^{\tau} dt e^{i\omega t} q(t)\right|^2 \tag{2}$$

возникает δ-образный пик на частоте поля Ω. Отношение его интегральной интенсивности (площади) к $Q^{(0)}(\Omega)$, т.е. к СПФ при $A = 0$, очевидно, равно

$$R = \frac{1}{4}A^2|\chi(\Omega)|^2/Q^{(0)}(\Omega) \tag{3}$$

(заметим, что $Q(\omega)$ (2) равно фурье-образу коррелятора $\langle q(t+t_1)q(t_1)\rangle$, усредненного по t_1, и соответствует СПФ, обычно измеряемой экспериментально). Для термодинамически равновесной при $A = 0$ (или квазиравновесной, если шум $f(t)$ имеет нетепловую природу) системы $\chi(\omega)$ стандартным образом выражается через $Q^{(0)}(\omega)$:

$$\mathrm{Re}\,\chi(\omega) = \frac{2}{T}\int_0^{\infty} d\omega_1 Q^{(0)}(\omega_1)\omega_1^2(\omega_1^2-\omega^2)^{-1}, \quad \mathrm{Im}\,\chi(\omega) = \frac{\pi\omega}{T}Q^{(0)}(\omega). \tag{4}$$

Количественное согласие значений R, измеренных (см. [5]) с помощью аналогового моделирования системы (1), со значениеями R, рассчитанными по формулам (3), (4), исходя из СПФ

---

1) Физический факультет, Ланкастерский университет, Великобритания.

$Q^{(0)}(\omega)$, измеренных для той же системы при $A = 0$, видно из рисунка. Эти результаты демонстрируют выполеение флуктуационно-диссипационной теоремы и дисперсионных соотношений в условиях СР.

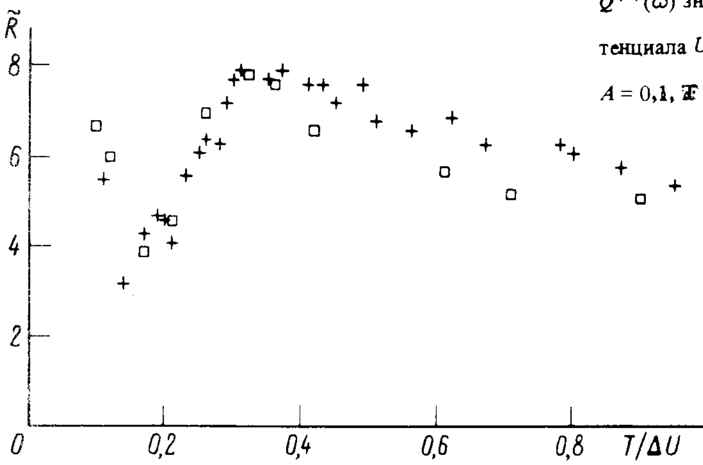
Возникновение СР с периодической модуляцией [6] вероятностей флуктуационных междуямных переходов W_{ij} и заселенностей потенциальных ям w_i $(i = 1{,}2)$ переменным полем (ср. [1]). В отсутствие поля флуктуационные переходы при $T \ll \Delta U_{1,2}$ (ΔU_i – глубина i-ой ямы) приводят к узкому пику $Q^{(0)}_{tr}(\omega)$ в $Q^{(0)}(\omega)$ (см. [7]),

$$Q^{(0)}_{tr}(\omega) = \frac{1}{\pi} w_1 w_2 (q_1 - q_2)^2 W/(W^2 + \omega^2), \quad W = W_{12} + W_{21} \tag{5}$$

($q_{1,2}$ – положения равновесия). При учете в $Q^{(0)}(\omega)$ лишь слагаемого (5), как ясно из (3), (4),

$$R = \frac{1}{4} \pi A^2 (q_1 - q_2)^2 w_1 w_2 W/T^2 \propto \exp(-\Delta U_{max}/T), \quad \Delta U_{max} = max(\Delta U_1, \Delta U_2), \tag{6}$$

т.е. отношение сигнал/шум R экспоненциально возрастает с ростом T, причем как при равных [1-3], так и при различающихся глубинах ям.



Измеренные непосредственно (□) и рассчитанные (+) на основе измеренных $Q^{(0)}(\omega)$ значения $R = 6{,}51 \cdot 10^{-4} R$ для потенциала $U(q) = -\frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{4} q^4$; $\Omega = 0{,}0695$, $A = 0{,}1$, $\Gamma = 0{,}125$; $\Delta U = 1/4$

Область применимости (6) и существования СР определяется из условия близости $Q^{(0)}(\omega)$ к $Q^{(0)}_{tr}$, т.е. малости вкладов в $Q^{(0)}(\omega)$ от колебаний относительно положений равновесия $Q^{(0)}_i(\omega) \approx \frac{2}{\pi} \Gamma T w_i [(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + 4\Gamma^2 \omega^2]^{-1}$, $\omega_i = [U''(q_i)]^{1/2}$ $(T \ll \Delta U_i)$. Поскольку $W_{ij} \propto$ $\propto \exp(-\Delta U_i/T) \ll 1$, СР отчетливо прявляется лишь при очень малых частотах $\Omega \ll \omega_{1,2}$, $\omega^2_{1,2}/\Gamma$. Заметим, что в системах с малым затуханием, $\Gamma \ll \omega_{1,2}$, уже при сравнительно малых T в области $\omega \lesssim 2\Gamma$ становится важной добавка $\delta Q^{(0)}_i \approx (4\Gamma^2 + \omega^2)^{-1} \Gamma/_{2\pi} w_i [TU'''(q_i)\omega_i^{-4}]^2$ [7]. Это существенно ограничивает интервал Ω, T, где наблюдается СР, что подтвердилось в наших экспериментах. Из сказанного ясно, что для данного Ω при очень малых T, когда $W \ll \Omega$, величина R уменьшается с T (как $1/T$ при $\Gamma \gtrsim \omega_{1,2}$), а затем при больших T возникает рост R, что и наблюдалось в [1] (ср. рисунок).

В области низких T отклик бистабильных систем на низкочастотное поле ($\Omega \ll \Gamma$, $\omega^2_{1,2}/\Gamma$) существенно нелинеен уже при малых A, когда $\Delta U_{1,2} \gg A\,|q_{1,2} - q_s| \gg T$ (q_s – положение локального максимума $U(q)$), поскольку обусловленная полем модуляция заселенностей ям оказывается сильной. Решая уравнения баланса для заселенностей с учетом периодической добавки к ΔU_i в выражении для вероятности перехода $W_{ij} \propto \exp(-\Delta U_i/T)$, можно показать, что связанное с переходами слагаемое $\langle q(t) \rangle_{tr}$ в $\langle q(t) \rangle$ описывается почти прямоугольной гребенкой. В простейшем случае симметричного потенциала, $U(q) = U(-q)$, $q_2 = -q_1$,

$$\langle q(t) \rangle_{tr} \approx 2\bar{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\theta(t - \frac{2\pi n}{\Omega}) - \theta(t - \frac{\pi(2n+1)}{\Omega})] - \bar{q},$$

$$\bar{q} = q_1 \operatorname{th}\lambda, \quad \lambda = (\frac{2\pi T}{|Aq_1|})^{1/2} \frac{W_{12}}{2\Omega} \exp(\frac{|Aq_1|}{T}) \quad (W_{12} = W_{21}). \tag{7}$$

При $\lambda \gg 1$ (отметим, что $1 - \operatorname{th}\lambda < 0{,}1$ при $\lambda \geqslant 1{,}5$) $\bar{q} \approx q_1$ не зависит от T практически, и потому интенсивность пика $Q(\omega)$ (2) на частоте Ω также почти не зависит от T. СР возникает при этом в области $\Omega < W = 2W_{12}$ (где $\lambda \gg 1$) заведомо) и обусловлен уменьшением $Q^{(0)}(\Omega)$ с ростом T вследствие расплывания пика (5) : $Q_{tr}^{(0)}(\Omega) \propto \exp(\Delta U_1/T)$ при $\Omega \ll W$. Из (2), (7) видно, что наблюдавшаяся в [2,3] малость пиков $Q(\omega)$ на обертонах Ω в режиме сильной нелинейности имеет численную причину: интенсивность пика на частоте $(2k+1)\Omega$ пропорциональна $(2k+1)^{-2}$.

Из результатов настоящей работы и [6,7] следует, что в системах с несколькими устойчивыми режимами вынужденных колебаний в интенсивном периодическом поле (оптически би- и мультистабильные системы, электроны, возбуждаемые полем на циклотронной частоте [8], и др.) СР должен иметь место как на низких частотах, так и на частотах, близких к частоте сильного поля.

Литература

1. *McNamara B., Wiesenfeld K., Roy R.* Phys. Rev. Lett., 1988, **60**, 2626; *McNamara B., Wiesenfeld K.* Phys. Rev. A, 1989, **39**, 4854.
2. *Zhou T., Moss F.* Phys. Rev. A, 1990, in press.
3. *Gammaitoni L. et al.* Phys. Rev. Lett., 1989, **62**, 349.
4. *Лихарев К.К.* Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985.
5. *McClintock P.V.E., Moss F.* In: Noise in Nonlinear Dynamical Systems. Eds. F.Moss, P.V.E.McClintock, Cambridge, CUP, 1989, **3**, 243.
6. *Дыкман М.И., Кривоглаз М.А.* ЖЭТФ, 1979, **77**, 60; *Dykman M.I., Krivoglaz M.A.* In: Sov. Phys.Rev. Ed. I.M.Khalatnikov, N.-Y.: Harwood, 1984, **5**, 265.
7. *Dykman M.I., Krivoglaz M.A., Soskin S.M.* In: Noise in Nonlinear Dynamical Sestems. Eds. F.Moss, P.V.E.McClintock, Cambridge, CUP, 1989, **2**, 347; *Dykman M.I. et al.* Phys. Rev. A, 1988, **37**, 1303.
8. *Gabrielse G., Dehmelt H., Kells W.* Phys. Rev. Lett., 1985, **54**, 537.

Институт полупроводников
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
22 июня 1990 г.