Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 4, стр. 837 – 839 *25 августа 1990 г.*

МНОГОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ДЕЙСТВИЯ, ЛОРЕНЦЕВЫ ГАРМОНИКИ И СПИН

И.А.Бандос

Показано, что квантование спиральности безмассовых частиц (и суперсимметричных мультиплетов) является следствием многозначности функционала действия новой твисторно-гармонической формулировки. Приведено новое, чисто топологическое доказательство квантования спиральности в единицах $\hbar/2$.

В связи проблемой ковариантного квантования суперчастиц и суперструн в последнее время интенсивно исследуются модели точечных и протяженных объектов в пространствах и суперпространствах, содержащих дополнительные гармонические (см. [1]) и твисторные переменные [2–9]. Так в [9] показано, что известная проблема ковариантного разделения грассмановых связей для суперчастиц на неприводимые связи 1-го и 2-го рода имеет простейшее решение в $D = 4$, если в число координат суперпространства вводятся бозонные спинорные переменные $v_\alpha^\mp \equiv v_\alpha^{(0|\mp 1)}$, $\bar{v}_{\dot\alpha}^\pm \equiv \bar{v}_{\dot\alpha}^{(\pm 1|0)} = (\overline{v_\alpha^\mp})$, ограниченные условиями $\Xi \equiv v^{\alpha -} v_\alpha^+ - 1 = 0$, $\bar\Xi \equiv \bar{v}_{\dot\alpha}^- \bar{v}^{\dot\alpha +} - 1 = 0$ (см. [1]) и определенные с точностью до преобразований из локальной (в пространстве $\{v_\alpha^\mp, \bar{v}_{\dot\alpha}^\pm\}$) группы $[U(1)]^c \approx U_L(1) \otimes U_R(1) \approx SO(1,1) \otimes SO(2)$ $(q_R(v_\alpha^\mp) = -q_L \times \times (\bar{v}_{\dot\alpha}^\pm) = \mp 1; q_L(v) = q_R(\bar v) = 0)$. Обобщающая [9] формулировка теории нуль-супер-p-бран [10] была построена в [11], где показано, что в ней проведение БРСТ-БФВ-квантования по БФФ-схеме [12] не встречает препятствий.

Цель настоящей работы – обратить внимание на проявляющуюся в таких моделях связь спина с топологией твисторно-гармонического сектора, а также привести новое, чисто топологическое доказательство квантования спиральности безмассовых частиц (и супермультиплетов) в единицах $\hbar/2$.

Действие для безмассовой частицы, движущейся в пространстве $M^{1+3} \otimes \left(SL(2,\mathbb{C})/[U(1)]^c\right)$ ($M^{1+3} \equiv \{x^m\}$ – пространство Минковского $SL(2,\mathbb{C})/[U(1)]^c \equiv \{v_\alpha^\mp, \bar{v}_{\dot\alpha}^\pm\}$ [9] имеет вид [9]

$$S = S_0 + S_{WZ} , \tag{1а}$$

$$S_0 = -\frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau n^{(-|+)} (v^- \sigma_m \bar{v}^+) \partial_\tau x^m, \tag{1б}$$

$$S_{WZ} = -l_1 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \Theta_\tau - l_2 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \bar\Theta_\tau, \tag{1в}$$

где τ – собственное время, $\Theta = \overline{(\bar{\Theta})} = \frac{1}{2i}(v^{\alpha-}dv^{+}_{\alpha} + v^{\alpha+}dv^{-}_{\alpha}) = d\tau\Theta_{\tau}$ – тэта-форма Картана (см. [13]) для $SL(2,\mathbb{C})/[U(1)]^c$ [9]. S_0 (1б) – твистороподобный функционал действия. S_{WZ} – представляет собой сумму весс-зуминовских (топологических) членов. Суперсимметричное обобщение действия (1) получается путем замены в (1б): $\partial_{\tau}x^m \to \omega^m_{\tau} = \partial_{\tau}x^m - i\partial_{\tau}\theta^{\alpha}_{i}\sigma^{m}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}i} + i\theta_{i}\sigma^m\partial_{\tau}\bar{\theta}^{i}$.

Вектор квантового состояния модели (1) описывает частицу со спиральностью [9] [1)] $s = \frac{1}{2}(\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2)$. Здесь $\tilde{l}_1$, $\tilde{l}_2$ – квантовые ("переномированные") значения коэффициентов l_1, l_2 при весс – зуминовских членах в (1в), которые могут отличаться от классических значений l_1, l_2 на сумму констант упорядочения:

$$\tilde{l}_1 = l_1 + \textit{sum of ordering constants}, \qquad \tilde{l}_2 = l_2 + \textit{sum of ordering constants}. \tag{2}$$

Это означает возможность индуцирования весс – зуминовских членов за счет эффектов упорядочения квантовых операторов (что на языке диаграммной техники отвечает вакуумным петлям), аналогичных учету казимировской энергии вакуума. В этом смысле можно говорить о связи весс – зуминовских членов с аномалиями.[2)]

Квантование спиральности $s = \frac{1}{2}(\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2)$ в единицах $\hbar/2$ получено в [9] при решении дифференциального уравнения на вектор состояния. Важно, однако, что этот факт может быть доказан исходя из чисто топологических соображений, подобно тому, как в [14] доказано квантование заряда магнитного монополя (см. также [15]).

Сумма весс – зуминовских членов (1в) инварианта относительно калибровочных $[U(1)]^c \approx U_L(1) \otimes U_R(1)$ преобразований лишь с точностью до "граничных" членов ($U_L(1) \approx \{\exp[i \times (\gamma(\tau) + i\beta(\tau))]\}$, $U_R(1) \approx \{\exp[i(\gamma - i\beta)]\}$)

$$S'_{WZ} = S_{WZ} - (l_1 + l_2)\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\gamma(\tau) - i(l_1 - l_2)\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\beta(\tau). \tag{3}$$

Отождествление $[U(1)]^c$-преобразований в начальный и конечный моменты собственного времени ($\exp[i(\gamma(\tau_i) + i\beta(\tau_i))] = \exp[i(\gamma(\tau_f) + i\beta(\tau_f))]$) приводит к следующим условиям на параметры групп $SO(1,1)$: $\beta(\tau_i) = \beta(\tau_f)$ и $SO(2) \approx U(1)$: $\gamma(\tau_i) - \gamma(\tau_f) = 2\pi k$. При этом второй член в (4) исчезает, а первый сводится к $2\pi k(l_1 + l_2)$

$$S'_{WZ} = S_{WZ} + 2\pi k(l_1 + l_2), \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{4}$$

В (4) целое число k является топологическим инвариантом – степенью отображения пространства компактифицированного собственного времени S^1_{τ} в групповое пространство S^1 подгруппы $U(1) \subset [U(1)]^c$ ($k = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1_{\tau}} d\gamma \in \pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$; $\gamma(\tau): S^1_{\tau} \to S^1 \approx SO(2) \approx U(1) \subset [U(1)]^c$.

Следовательно функционал (1) инвариантен лишь относительно топологически тривиальных преобразований из $U(1) \subset [U(1)]^c$. Однако $[U(1)]^c$-преобразования представляют собой преоб-

---

[1)] Постоянные l_1, l_2 в (1в) имеют размерность действия, поскольку в силу условий "гармоничности" $\Xi = v^{\alpha-}v^{+}_{\alpha} - 1 = 0$, гармоники безразмерны.

[2)] В близкой к [9] твисторной формулировке теории (супер-) частиц [8] весс – зуминовские члены не включались в действие, т.е., с нашей точки зрения, они могли быть лишь индуцированы при квантовании за счет эффектов упорядочения: $(\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2)$ [8] $\equiv c$ [8] $= \textit{sum of ordering constants}$. Именно из-за этого величина спина в [8] представлялась ограниченной сверху числом имеющихся в теории переменных (твисторов).

разования эквивалентности на множестве спинорных бозонных переменных $v^{\mp}_{\alpha}, \bar{v}^{\pm}_{\dot{\alpha}}$, определяющие гармонический сектор нашего пространства: $SL(2, \mathbb{C})/[U(1)]^c$ [9]. Поэтому неинвариантность (4) действия (1) относительно топологически нетривиальных преобразований из $U(1) \subset \subset [U(1)]^c$ следует интерпретировать как многозначность функционала действия (см. [14,15])

$$S \sim S + 2\pi k(l_1 + l_2), \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{5}$$

Иными словами действие (1) определено лишь по модулю $2\pi k(l_1 + l_2)$.

При квантовании константы l_1 и l_2 могут получить аддитивные добавки (2) [9] за счет констант упорядочения. Поэтому, в силу (1), (5), эффективное действие квантовой теории определено лишь по модулю $2\pi k(\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2)$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$S_{eff} \sim S_{eff} + 2\pi k(\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2). \tag{6}$$

Однако мера континуального интегрирования, содержащая множитель $\exp\{\frac{i}{\hbar} S_{eff}\}$ должна быть однозначно определена: $\exp\{\frac{i}{\hbar} S_{eff}\} = \exp\{\frac{i}{\hbar}[S_{eff} + 2\pi k(\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2)]\}$. Это требование приводит к квантованию спиральности и единицах $\hbar/2$:

$$s = \frac{1}{2}(\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2) = 0; \pm\frac{\hbar}{2}; \ \pm\hbar; \ \pm\frac{3}{2}\hbar; \ \ldots . \tag{7}$$

Таким образом квантование (7) спиральности безмассовых частиц (и супермультиплетов) является следствием многозначности (6) функционала эффективного действия и доказана из чисто топологических соображений.

Литература

1. *Galperin A. et al.* Class. Quant. Grav., 1984, **1**, 469; 1985, **2**, 155.
2. *Sokatchev E.* Phys. Lett. B, 1986, **169**, 209; Class. Quant. Grav., 1987, **4**, 237.
3. *Nissimov E. et al.* Nucl. Phys. B, 1988, **296**, 46; **B297**, 233; **B299**, 183; 1989, **B317**, 344.
4. *Kallosh R., Rahmanov M.* Phys. Lett., 1988, **209B**, 233; **211B**, 514.
5. *Volkov D.V., Zheltukhin A.A.* Lett. Math. Phys., 1989, **17**, 489.
6. *Sorokin D.P. et al.* Mod. Phys. Lett., 1989, **A4**, 901; Phys. Lett., 1989, B, **216**, 302.
7. *Eisenberg Y., Solomon S.* Nucl. Phys. B. 1989, **309**, 709.
8. *Eisenberg Y., Solomon S.* Phys. Lett. B, 1989, **220**, 562.
9. *Бандос И.А.* ЯФ, 1990, **51**, 1429.
10. *Желтухин А.А.* ЯФ, 1988, **48**, 587; 1990, **51**, 509.
11. *Бандос И.А., Желтухин А.А.* Письма в ЖЭТФ, 1990, **51**, 11.
12. *Batalin I.A. et al.* Nucl. Phys. B, 1989, **314**, 158.
13. *Волков Д.В.* ЭЧАЯ, 1973, **4**, 3.
14. *Witten E.* Nucl. Phys., 1983, **B223**, 422.
15. *Шварц А.С.* Квантовая теория поля и топология. М.: 1989.

Харьковский
государственный университет

Поступила в редакцию
26 июня 1990 г.