Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 4, стр. 842 – 844 *25 августа 1990 г.*

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СТРУНАХ, БОЗОНИЗИРОВАННЫХ ДУХАХ И ФЕРМИОНАХ

А.Д.Попов

Введен новый тип струн, в фоковское пространство которых можно вложить фоковские пространства стандартных бозонных, фермионных и гетеротических струн.

1. После работ [1] стало ясно, что теории струн можно формулировать прямо в $d = 4$ пространстве $R^{3,1}$. При этом разные теории струн соответствуют разным точкам из пространства модулей M_4. Причем $M_4^{Б} = SO(22,22)/SO(22) \times SO(22)$ для бозонных, $M_4^{Ф} = SO(6,6)/SO(6) \times \times SO(6)$ для фермионных и $M_4^{Г} = SO(22,6)/SO(22) \times SO(6)$ для гетеротических струн [2].

Получаем бесконечное число теорий струн в $R^{3,1}$ и неясно, какую из них взять в качестве основной. Фактически, различие теорий обусловлено различием решеток $\Lambda_{q,0}$, генерирующих "внутренние" торы $T^{q,0} = R^{q,0}/\Lambda_{q,0}$. Все такие решетки вкладываются в единственную лоренцеву решетку $\Lambda_{q+1,1}$. Переход $T^{q,0}$ к лоренцеву тору $T^{q+1,1} = R^{q+1,1}/\Lambda_{q+1,1}$ соответствует введению дополнительного временно́го измерения во внутреннем пространстве теорий типа Калуцы – Клейна. Эта идея была выдвинута А.Д.Сахаровым [3] и развивалась в работах [4]. Используя дополнительное временно́е измерение, мы введем струны, названные нами гиперболическими (ГС).

2. Рассмотрим замкнутую бозонную струну в $R^{3,1}$ с $q + 2$ компактными бозонами из тора $T^{q+1,1}$. Такую струну с действием

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2\xi \sqrt{-G}\left[g_{AB} G^{\alpha\beta} \frac{\partial X^A}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^B}{\partial \xi^\beta} + \frac{1}{2} R g_{AB} X^A Q^B\right] \qquad (1)$$

назовем гиперболической струной. Здесь $\xi^1 = \tau$, $\xi^2 = \sigma$, $G_{\alpha\beta}$ – метрика на мировой поверхности струны, $G = det(G_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = 1,2$, X^A – координаты пространства мишеней $R^{3,1} \times T^{q+1,1}$,

$A = 1, \ldots, q+6$, $g_{AB} = \mathrm{diag}(- + \ldots + -)$ – метрика на $R^{3,1} \times T^{q+1,1}$, R – скалярная кривизна для $G_{\alpha\beta}$, $Q^A = \mathrm{const}$.

Последний член в (1) не дает вклада в уравнения движения для X^A, но дает вклад в соответствующие генераторы L_n^A алгебр Вирасоро [5]. Используя конформную калибровку и расщепляя $X^A(\xi^1, \xi^2) = X_+^A(\xi_+) + X_-^A(\xi_-)$ $(\xi_\pm = \xi^1 \pm \xi^2)$ на левые и правые моды, имеем

$$X_\pm^A(\xi_\pm) = q_\pm^A + p_\pm^A \xi_\pm + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_{n\pm}^A \exp(-2in\xi_\pm). \tag{2}$$

Для генераторов $\hat{L}_n^\pm$ алгебр Вирасоро $\mathcal{L}^\pm$ левого и правого секторов имеем [5]:

$$\hat{L}_n^\pm = \sum_{A=1}^{q+6} L_n^{A\pm}, \quad L_n^{A\pm} = \frac{1}{2} g_{AA} [\sum_m :\alpha_{-m\pm}^A \alpha_{(m+n)\pm}^A: - nQ^A \alpha_{n\pm}^A - \frac{1}{4}(Q^A)^2 \delta_{n,0}]. \tag{3}$$

Коммутационные соотношения стандартны [2,5], а для центральных зарядов соответственно имеем $\hat{c}_\pm = \sum_{A=1}^{q+6} c_{A\pm}$, $c_{A\pm} = 1 - 3g_{AA}(Q^A)^2$.

Левый и правый сектор ГС идентичны, поэтому будем рассматривать только левый сектор и опустим из обозначений знаки $\pm$.

По обычному алгоритму квантования [2,5] переходим к алгебре Гейзенберга с генераторами α_n^A, q^A, Id и вводим фоковское пространство $\hat{H} = \mathbb{C}[R^{3,1} \oplus \Lambda_{q+1,1}] \otimes Sym(\alpha_{-n}^A)$ как пространство представления этой алгебры. Здесь $Sym(\alpha_{-n}^A)$ – алгебра полиномов от α_{-n}^A $(n > 0)$, а $\mathbb{C}[R^{3,1} \oplus \Lambda_{q+1,1}]$ – алгебра функций вида $\exp(\gamma)$, $\gamma \in R^{3,1} \oplus \Lambda_{q+1,1}$ [6].

Считаем $\hat{c} = 0$ (этого можно добиться выбором q и Q^A) и вводим $\mathcal{L}$-инвариантное физическое подпространство $\hat{H}_0$ в фоковском пространстве $\hat{H}$:

$$\hat{H}_0 = \{\psi \in \hat{H} : \hat{L}_n \psi = 0, \ n \in \mathbb{Z}\}. \tag{4}$$

Пространство $\hat{H}_0$ соответствует переносу связей $\hat{L}_n = 0$ на квантовый уровень.

Заметим, что $Q^A = 0$ для стандартных бозонов, $Q^A = \pm 1, \pm 2$ для "бозонизированных" супердухов β и γ и $Q^A = \pm 3$ для бозонизированных духов b и c [5].

3. Рассмотрим замкнутую фермионную струну Неве – Шварца – Рамона в $R^{3,1} \times T^{6,0}$. Как известно [2,5], можно бозонизировать фермионы, духи и супердухи этой теории, сопоставляя им соответственно торы $T^{5,0} = R^{5,0}/\Lambda_{5,0}$, $T^{1,0} = R^{1,0}/\Lambda_{1,0}$ и $T^{1,1} = R^{1,1}/\Lambda_{1,1}$. Здесь $\Lambda_{5,0}$ – решетка весов алгебры Ли $so(10)$. Таким образом, полностью бозонизированная фермионная струна описывается бозонами $X^A = (X^\mu, X^I, Y^i)$ из пространства $R^{3,1} \times T^{11,0} \times T^{1,1} \times T^{1,0}$, $\mu = 1, \ldots, 4$, $I = 1, \ldots, 11$, $i = 1, 2, 3$.

Действие для $d = 4$ бозонизированной фермионной струны имеет вид (11) с $q = 12$, $Q^\mu = Q^I = 0$, $Q^1 = 1$, $Q^2 = 2$, $Q^3 = 3$. Легко видеть, что $\hat{c} = 0$ и можно ввести пространство $\hat{H}_0$ как в (4). Таким образом, безаномальная бозонизированная фермионная струна совпадает с гиперболической струной с $q = 12$, которую мы назовем фермионной гиперболической струной (ФГС).

Более того, все многообразие фермионных струн в $d = 4$, описываемое пространством модулей M_4^Φ, вкладывается в единственную ФГС. Это следует из того, что параметр $\lambda \in M_4^\Phi$ входит в характеристики решетки $\Lambda_{6,0}^\lambda$ и любую евклидову решетку $\Lambda_{6,0}^\lambda \oplus \Lambda_{5,0} \oplus \Lambda_{1,0}$ можно вложить в единственную каноническую лоренцеву решетку $\Lambda_{13,1} \supset \Lambda_{6,0}^\lambda \oplus \Lambda_{5,0} \oplus \Lambda_{1,1} \oplus \Lambda_{1,0}$, характеризующую ФГС. Соответственно фоковское пространство любой $d = 4$ фермионной струны можно получить как подпространство в $\hat{H}_0$ фиксацией вакуума $\lambda \in M_4^\Phi$ и фиксацией класса из $\Lambda_{5,0}$ [2,5].

Заметим, что выбор вектора $\gamma \in R^{3,1} \oplus \Lambda_{6,0} \oplus \Lambda_{5,0} \oplus \Lambda_{1,1} \oplus \Lambda_{1,0}$ соответствует фиксации вакуума $|\gamma\rangle = \exp\gamma$ теории струн. В частности, фиксация $p \in \Lambda_{5,0} \oplus \Lambda_{1,1} \oplus \Lambda_{1,0}$ называется фиксацией "картины" (вакуум фермионов и духов). При этом оператор "смены картины" имеет вид [2]: $X = \exp(p_{5,0})\exp(p_{2,1}) \in \mathbb{C}[\Lambda_{5,0} \oplus \Lambda_{2,1}]$ $(\Lambda_{2,1} \equiv \Lambda_{1,1} \oplus \Lambda_{1,0})$, т.е. это просто элементы групповой алгебры для дискретной группы $\Lambda_{5,0} \oplus \Lambda_{2,1}$ (см. [6]).

4. Рассмотрим гиперболическую струну с $q = 24$ и координатами $X^A = (X^\mu, X^I, Y^\alpha, Z^i)$, $\mu = 1, \ldots, 4$, $I = 1, \ldots, 22$, $\alpha = 1, 2$, $i = 1, 2$. Положим $Q^\mu = Q^I = Q^\alpha = 0$, $Q^1 = 3$, $Q^2 = 1$. Легко видеть, что при этом суммарный центральный заряд $\hat{c}$ алгебры Вирасоро равен нулю. Введем $\hat{H}$ и $\hat{H}_0$.

Стандартная безаномальная бозонная струна в $d = 4$ соответствует пространству мишеней $R^{3,1} \times T^{22,0}$. Решетка $\Lambda^\lambda_{22,0}$, определяющая тор $T^{22,0}_\lambda$, характеризуется $\lambda \in M_4^Б$. Вложим $\Lambda^\lambda_{22,0}$ в единственную каноническую лоренцеву решетку $\Lambda_{25,1} \supset \Lambda^\lambda_{22,0} \oplus \Lambda_{1,1} \oplus \Lambda_{2,0}$, задающую тор $T^{25,1} = R^{25,1}/\Lambda_{25,1}$. Получаем, что любая стандартная теория $d = 4$ замкнутой бозонной струны вкладывается в единственную безаномальную бозонную гиперболическую струну (БГС) с $q = 24$ и указанными выше значениями Q^A.

5. Как известно, стандартные $d = 4$ гетеротические струны получаются объединением левого сектора бозонной струны в $R^{3,1} \times T^{22,0}$ и правого сектора суперструны в $R^{3,1} \times T^{6,0}$. Из вышеизложенного следует, что любую гетеротическую струну можно вложить в единственную асимметричную гиперболическую струну с левым сектором от БГС и правым сектором от ФГС. При этом "проекцию" на фиксированную стандартную $d = 4$ гетеротическую струну можно понимать как фиксацию вакуума из пространства модулей $M_4^Г$ гетеротических струн.

6. Характерной чертой гиперболических струн является наличие дополнительного временного измерения, введение которого в рамках полевого предела струн было предложено А.Д.Сахаровым [3]. На возможность более общей теории струн с лоренцевым внутренним тором и соответствующей ему лоренцевой алгеброй Каца – Муди указывал также Виттен [7]. Полученные выше результаты говорят в пользу дальнейшего изучения гиперболических струн.

Литература

1. *Narain K.S.* Phys. Lett. B, 1986, **169**, 41; *Narain K.S., Sarmadi M.H., Witten E.* Nucl. Phys. B, 1987, **279**, 369.
2. *Lerche W., Schellekens A.N., Warner N.P.* Phys. Rep., 1989, 177, 1.
3. *Сахаров А.Д.* ЖЭТФ, 1984, **87**, 375.
4. *Арефьева И.Я., Волович И.В.* Письма в ЖЭТФ, 1985, **41**, 535; Phys. Lett. B, 1985, **164**, 287; ТМФ, 1987, **70**, 422; *Попов А.Д.* ТМФ, 1988, **74**, 223; **76**, 78.
5. *Thorn C.B.* Phys. Rep., 1989, **175**, 1.
6. *Frenkel I.B.* Lect. Appl. Math., 1985, **21**, 325; Proc. Int. Congr. Math. Berkeley, 1986, **1**, 821.
7. *Witten E.* Int. J. Mod. Phys. A, 1986, **1**, 39.

Владимирский политехнический институт

Поступила в редакцию
9 июля 1990 г.