

ДВУМЕРНАЯ ДИФФУЗИЯ В ШИРОВОЙ СИСТЕМЕ

П.Н. Юшманов

В работе исследован перенос пробных частиц, обусловленный флуктуациями с двумерной структурой, в системах для магнитного удержания с учетом шира поля. Анализ проводится как аналитически с использованием теории перколяции, так и численно. Вычислены коэффициент диффузии и инкремент расходимости близких траекторий. Показано, что несмотря на наличие ширового потенциала перколяционный подход может быть использован для анализа диффузии в таких системах.

Общепризнано, что причиной аномально быстрых потерь энергии в системах для магнитного удержания плазмы являются надтепловые электромагнитные флуктуации¹. Из-за наличия сильного продольного магнитного поля большинство колебаний, развивающихся в таких системах, вытянуты вдоль поля и имеют двумерную структуру ($k_{\parallel} \ll k_{\perp}$). В последнее время в понимании механизма переноса в полях с двумерной структурой турбулентности был достигнут значительный прогресс, связанный с пониманием роли длинных траекторий и определением количественных характеристик их распределения²⁻⁴. Однако, в большинстве работ, в том числе во всех относящихся к режимам большой амплитуды флуктуаций $\tilde{V} > \Delta\omega/k_{\perp}$ (\tilde{V} – осцилляторная скорость частиц, $\Delta\omega$ – ширина спектра колебаний, k^{-1} – характерный поперечный размер неоднородности), представляющим наибольший интерес для практических приложений, не учитывались эффекты шира. Тем не менее шир, т.е. изменение направления основного магнитного поля с радиусом, изменяет вытянутость двумерных структур, что приводит к пространственной локализации флуктуаций и ограничивает их амплитуду.

Целью настоящей работы является исследование переноса пробных частиц в шировой системе с двумерной структурой флуктуаций. Анализ будет проведен на примере диффузии магнитного поля, хотя гамильтонов подход использованный ниже позволяет простой заменой обозначений рассматривать и другие классы подобных систем.

Без учета эффектов тороидальности в постановке периодического цилиндра с координатами x по радиусу, y по углу и z вдоль цилиндра, эволюция силовых линий описывается гамильтоновыми уравнениями.

$$\frac{dr_{\perp}}{dz} = \frac{1}{B_0} \mathbf{e}_z \nabla \Psi, \tag{1}$$

где B_0 – основное магнитное поле, Ψ – продольная компонента векторного потенциала, представляющая собой сумму резонансных гармоник и шировой параболической ямы:

$$\Psi = \sum \Psi_n + B_0(x - x_0)^2/L_s. \tag{2}$$

Потенциалы Ψ_n описывают возмущения вытянутые вдоль магнитного поля на резонансных поверхностях $q(x_n) = m/n$

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \Psi_0(x - x_n) \cos\left(m \frac{y}{x_n} + n \frac{z}{R} + \phi_n\right) \approx \\ &\approx \Psi_0(x - x_n) \cos\left(k_y(y + (x_n - x_0)z/L_s) + \phi_n\right). \end{aligned} \tag{3}$$

где x_0 – радиус, при котором направление невозмущенного магнитного поля совпадает с осью z , x_n – радиус резонансной поверхности с тороидальным и полоидальным волновыми числами n и m , $L_s = Rq/s$ – шировая длина, $s = d \ln(q)/d \ln(x)$, q^{-1} – величина вращательного преобразования невозмущенного магнитного поля на заданной поверхности, $2\pi R$ – длина

периода цилиндрической геометрии. Радиальная локализация этих колебаний Δx предполагается большей расстояния между гармониками $dx = x_{n+1} - x_n$ (рис. 1), поэтому в каждой точке пространства одновременно действуют несколько колебаний с продольной длиной корреляции

$$L_{\parallel} = L_s / (k_{\perp} \Delta x), \quad (4)$$

что и приводит к диффузии силовых линий.

Прежде чем переходить к анализу движения в системе (1) – (3) укажем, что перколяционный подход развитый в ^{3, 4} к этой задаче, строго говоря, неприменим. Причина – параболическая шировая добавка к потенциалу, препятствующая образованию больших в направлении x траекторий. Однако, при смещении частицы из начального положения x_0 в некоторую точку x_1 можно перейти в систему отсчета, вращающуюся со скоростью невозмущенного магнитного поля на поверхности x_1 . В результате этого гамильтониан формально примет тот же вид (2) – (3), но с заменой x_0 на x_1 . Таким образом, в каждой точке шировую параболу можно устранить переходом к другой системе отсчета, хотя нельзя устранить на всем интервале. Поэтому несмотря на то, что перколяционные распределения и неприменимы к уравнениям (1) – (3), этот подход может быть использован как гипотеза, которая в дальнейшем будет проверена численными расчетами.

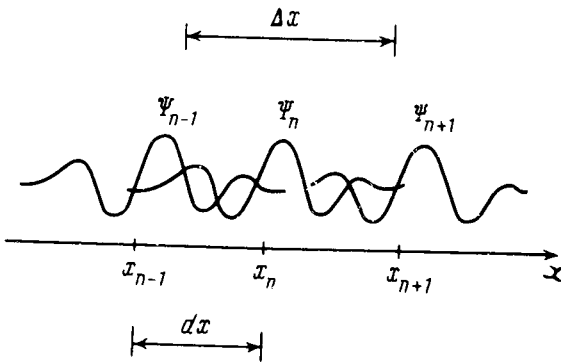


Рис. 1. Вид потенциала в шировой системе

Оценим транспортные коэффициенты, предполагая справедливыми распределения траекторий по длинам, полученные методом теории перколяции. Пусть $\xi = \Psi / \langle \Psi \rangle$ описывает относительную высоту уровня, где $\langle \Psi \rangle$ – среднеквадратичная амплитуда возмущений. Тогда длина проекции траектории в конечной плоскости $l_{\perp} \sim \xi^{-(\nu+1)} / k_{\perp}$, где $\nu = 4/3$. Ширина пучка траекторий уровня ξ и ниже $\Delta \sim \xi / k_{\perp}$, а максимальный поперечный размер таких траекторий $\tilde{x} \sim \xi^{-\nu} / k_{\perp}$. Эти оценки стандартны для перколяционного подхода ⁴ и пока никак не учитывают шир. Шир оказывает влияние на корреляционную длину шумов создающих траекторию уровня ξ . Если размер этой орбиты \tilde{x} превысит область радиальной локализации колебаний Δx , то из-за шир орбита будет испытывать воздействие шумов с более короткой эффективной длиной корреляции, чем (4). С учетом этого обстоятельства продольную корреляционную длину шумов для орбиты уровня ξ можно оценить как:

$$l_c \sim \xi L_s / ((\Delta x + \tilde{x}) k_y), \quad (5)$$

где по сравнению с ⁴ учтено, что декоррелирующим является максимальный из размеров Δx и \tilde{x} . С учетом доли поверхности, занимаемой траекториями уровня ξ : $f \sim \Delta l_{\perp} / \tilde{x}^2$, коэффициент диффузии можно оценить как

$$D_{\xi} \sim f \frac{\tilde{x}^2}{l_c} \sim \frac{\Delta l_{\perp}}{l_c} \sim \frac{l_{\perp}}{L_s} (\Delta x + \tilde{x}) \sim \frac{1}{L_s k_y^2} \xi^{-(\nu+1)} (\Delta x + \tilde{x}). \quad (6)$$

Полный коэффициент диффузии представляет собой интеграл от D_{ξ} по всем уровням ξ . Его можно легко оценить, учитывая максимальный вклад от траекторий, для которых частица успевает обойти орбиту за время декорреляции траектории $l_{\perp} \approx \langle \Psi \rangle k_y l_c / B_0$

$$\xi_m = \begin{cases} R_{\Psi}^{\nu+2} & \text{при } 1 < R_{\Psi} < (k_y \Delta x)^{1+2/\nu} \\ (R_{\Psi} k_y \Delta x)^{\frac{1}{2\nu+2}} & \text{при } (k_y \Delta x)^{1+2/\nu} < R_{\Psi}, \end{cases} \quad (7)$$

где $R_{\Psi} = \langle \Psi \rangle k_y L_s / (B_0 \Delta x)$ – параметр характеризующий амплитуду шумов. Из этих оценок можно получить следующие величины коэффициента диффузии:

$$D_m k_y^2 L_s = \begin{cases} R_{\Psi}^{7/10} k_y \Delta x & \text{при } 1 < R_{\Psi} < (k_y \Delta x)^{5/2} \\ R_{\Psi}^{11/14} & \text{при } (k_y \Delta x)^{5/2} < R_{\Psi}, \end{cases} \quad (8)$$

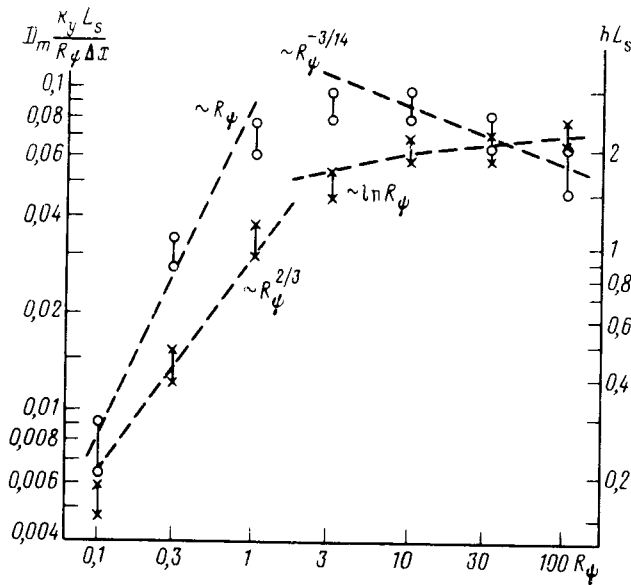


Рис. 2. Сравнение коэффициента диффузии D_m (○) и колмогоровской энтропии h (×) с теоретическими оценками

где первый случай соответствует оценке D_m без учета шировых эффектов ⁴, а второй учитывает шир. В реальных условиях параметр $k_y \Delta x$ близок к 1. Поэтому шировый предел $D_m \sim R_{\Psi}^{11/14} / (k_y^2 L_s)$ начинает работать сразу после квазилинейного предела $D_m \sim k_y \Delta x / (k_y^2 L_s)$ справедливого при $R_{\Psi} < 1$ ⁵.

Для проверки перколяционных гипотез, заложенных в оценки (7) – (8) проведено численное исследование уравнений (1) – (3) методом аналогичным использованному при расчете

диффузии в двух волнах с различными фазовыми скоростями ⁶. На рис. 2 представлены коэффициент диффузии D_m и колмогоровская энтропия

$$h = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{d(0)},$$

а также дано сравнение с теоретическими оценками. Значения D_m удовлетворительно совпадают с теоретическими оценками. Однако энтропия h отличается по функциональной зависимости от оценки $h \sim L_s^{-1} R_\Psi^{-1/2} \ln(R_\Psi)$, полученной в ⁴. Она лучше сходится с оценкой $h \sim L_s^{-1} \ln(R_\Psi)$, выведенной из результатов численного расчета для диффузии в двух волнах ⁶.

Литература

1. *Liever P.C.* Nucl. Fusion, 1985, 25, 543.
2. *Saleur H., Duplantier B.* Phys. Rev. Lett., 1987, 58, 2325.
3. *Исиченко М.Б., Калда Я.Л., Татаринова Е.Б. и др.* ЖЭТФ, 1989, 177, 733.
4. *Грузинов А.В., Исиченко М.Б., Калда Я.Л.* ЖЭТФ, 1990, 97, 476.
5. *Rechester A.B., Rosenbluth M.N., White R.B.* Phys. Rev. Lett., 1979, 42, 1247.
6. *Kleva R.G., Drake J.F.* Phys. Fluids., 1984, 27, 1686.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
4 июля 1990 г.