Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 5, стр. 885 - 887 10 сентября 1990 г.

МОДЕЛЬ КОМПЛЕКСНЫХ МАТРИЦ И ДВУМЕРНАЯ КВАНТОВАЯ ГРАВИТАЦИЯ

Ю.М.Макеенко

Предложено точное решение модели $N \times N$-комплексных матриц. Показано, что в непрерывном пределе воспроизводится "струнное уравнение", соответствующее двумерной квантовой гравитации.

Недавние достижения [1-4] в теории некритических струн и двумерной квантовой гравитации основаны на рассмотрении модели эрмитовых матриц, которая служит удобной дискретизацией непрерывной теории и допускает решение в скейлинговом пределе. Для простейшего случая двумерной квантовой гравитации без материи полученное "струнное уравнение" является уравнением Пенлеве I. В качестве альтернативы рассматривались и другие матричные модели; так в работе [5] было показано, что модель унитарных матриц сводится к уравнению Пенлеве II и принадлежит к другому классу универсальности.

В настоящей работе исследуется модель $N \times N$-комплексных матриц, определяемая статистической суммой

$$Z = \int \prod_{i,j=1}^{N} d\mathrm{Re}\varphi_{i,j} d\mathrm{Im}\varphi_{i,j} \exp\{-N \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j} g_j \mathrm{tr}(\varphi^+ \varphi)^j\}. \tag{1}$$

Эта модель отвечает дискретизации случайных поверхностей ориентированными многоугольниками. Для ее решения воспользуемся методом контурных уравнений, который был применен к модели эрмитовых матриц в работах [6-9]. Контурные уравнения для модели комплексных матриц при $N = \infty$ решались в работе [10]. При конечном N удобно написать контурное уравнение на лапласовский образ вильсоновской петли:

$$G(p) =< \frac{1}{N} \mathrm{tr} \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}^2 - \varphi^+ \varphi} >, \tag{2}$$

где среднее определено согласно (1). Контурное уравнение следует из инвариантности меры и может быть записано в виде

$$\int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{g(\omega)}{p-\omega} G(\omega) = (G(p))^2 + \frac{1}{2N^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\delta}{\delta g(p)} G(p), \tag{3}$$

где контур интегрирования C охватывает особенности $G(\omega)$, а

$$g(p) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j p^{2j-1} \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\delta g(p)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2j}} \frac{\partial}{\partial g_j}. \tag{4}$$

Смысл этой формулы таков, что $-g_j/j$ играют роль источников [7] для полей $\mathrm{tr}(\varphi^+\varphi)^j$. Построенный из них функционал $-2\int_0^p dpg(p)$ является источником для вильсоновской петли. Связанные корреляторы M петель получаются из $G(p)$ $M-1$-кратным применением $1/2\partial/\partial p_i \delta/\delta g(p_i)$. После чего "лишние" g_j следует занулить. Цепочка уравнений на M-петлевые средние получается из уравнения (3) варьированием. Уравнение (3) нужно дополнить граничным условием

$$pG(p) \to \lambda \quad \text{при} \quad p \to \infty, \tag{5}$$

где удобно считать $\lambda \neq 1$. Выполнив в уравнении (3) предельный переход $p \to \infty$ приведем условие (5) к виду

$$2\lambda = \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} g(\omega)\omega \dot{G}(\omega), \tag{6}$$

где $\dot{G} \equiv \partial G/\partial\lambda$.

Уравнение (3) можно решать итерациями по $1/N^2$. В главном порядке ответ совпадает со случаем модели эрмитовых матриц с четным потенциалом:

$$G_0(p) = \frac{1}{2}\int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{g(\omega)}{p-\omega} \frac{\sqrt{p^2-z}}{\sqrt{\omega^2-z}}, \tag{7}$$

где z определяется из граничного условия (6). Для доказательства формулы (7) и нахождения z заметим, явно дифференцируя (7), что

$$\dot{G}_0(p) = 1/\sqrt{p^2-z}. \tag{8}$$

Выражения для связанного коррелятора M-петель в главном порядке по $1/N^2$ можно получить варьированием формулы (7). Для $M=2$

$$\chi_0^{(2)}(p,q) = \frac{\partial}{2\partial q}\frac{\delta}{\delta g(q)} G_0(p) = \frac{1}{4(p^2-q^2)^2}\left[\frac{2p^2q^2 - zp^2 - zq^2}{\sqrt{p^2-z}\sqrt{q^2-z}} - 2pq\right], \tag{9}$$

что согласуется с работой [7].

Структура решения в главном порядке и первой поправки по $1/N^2$ позволяет предположить, что точный ответ для $\dot{G}(p)$ дается диагональной резольвентой оператора Штурма-Лиувилля:

$$\dot{G}(p) = 2R[p,u] \equiv 2 < \lambda \mid (p^2 - \frac{1}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + u(\lambda))^{-1} \mid \lambda >, \tag{10}$$

где $u(\lambda)$ находится подстановкой в уравнение (6), которое принимает вид

$$\lambda = \sum_{j\geq 1} g_j R_j[u], \tag{11}$$

Здесь $R_j[u]$ суть обобщенные КдФ потенциалы, возникающие в разложении Гельфанда-Дикого [11]

$$R[p,u] = \sum_{j=0}^{\infty} R_j[u]/p^{2j+1}. \tag{12}$$

Поскольку $R_1[u] = -u/4$, величина $-u/2$ имеет смысл теплоемкости матричной модели. В старшем порядке по $1/N^2$ имеем $u = -z$.

Уравнение (11) совпадает с обобщенным струнным уравнением работы [3], полученным в непрерывном пределе модели эрмитовых матриц. Чтобы перейти в уравнении (11) к непрерывному пределу, нужно положить [1] $\lambda \to \lambda_c - a^m \Lambda$ в окрестности мультикритической точки порядка m, для которой $z_c - z \sim (\lambda_c - \lambda)^{1/m}$. Получающееся в двойном скейлинговом пределе ($a \to 0, N \to \infty$ при фиксированном $N^2 a^{2m+1}$) уравнения совпадают с соответствующими уравнениями работ [1–4], так что модели эрмитовых и комплексных матриц принадлежат к одному классу универсальности. Преимущество модели комплексных матриц проявляется, однако, в том, что она допускает точное решение при конечном N, а не только в скейлинговом пределе.

Мы не смогли доказать строго, что анзац (10), (11) решает уравнение (3) при конечных N. Кроме приведенных выше, имеются многочисленные другие аргументы в пользу этого. Во всяком случае, наше предположение, по-видимому, эквивалентно предположению работы [8] относительно структуры решения непрерывных уравнений для модели эрмитовых матриц.

На основании вычисленной первой поправки по $1/N^2$ можно утверждать, что в $m = 2$ непрерывном пределе, который соответствует двумерной квантовой гравитации без материи, модель комплексных матриц приводит к уравнению Пенлеве I. Мы надеемся, что модель комплексных матриц, допускающая точное решение при конечном N, может оказаться полезной при исследовании поднятой в работе [6] проблемы, касающейся вещественных непертурбативных решений двумерной квантовой гравитации.

Автор благодарен Я.Амбьерну, А.Герасимову, А.Лосеву, А.Морозову и А.Переломову за полезные обсуждения.

Литература

1. *Brezin E., Kazakov V.A.* Phys.Lett. B, 1990, 236, 144; *Douglas M.R., Shenker S.H.* Nucl.Phys. B, 1990, 335, 635; *Gross D.J., Migdal A.A.* Phys.Rev.Lett., 1990,64, 127.
2. *Gross D.J., Migdal A.A.* Princeton preprint PUPT-1159, 1989.
3. *Banks T. et al.* Phys.Lett. B, 1990, 238, 279.
4. *Douglas M.R.* Phys.Lett. B, 1990, 238, 176.
5. *Periwal V., Shevitz D.* Phys.Rev.Lett., 1990, 64, 1326
6. *David F.* Saclay preprint SPhT/90-043, 1990.
7. *Ambjørn J., Makeenko Yu.M.* Copenhagen preprint NBI-HE-90-22, 1990.
8. *Fukuma M., Kawai H., Nakayama R.* Tokyo preprint UT-562, 1990.
9. *Dijkgraaf R., Verlinde H., Verlinde E.* Princeton preprint, PUPT-1184, 1990.
10. *Ilgenfritz E.-M., Makeenko Yu.M., Shahbazyan T.V.* Phys.Lett., 1986, 172, 81.
11. *Гельфанд И.М., Дикий Л.А.* УМН, 1975, 30, 67.

Институт теоретической и экспериментальной физики

Поступила в редакцию 23 июля 1990 г.