Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 5, стр. 888 - 889 10 сентября 1990 г.

# НОВЫЕ КОНФОРМНЫЕ ТЕОРИИ, МАГИЧЕСКИЙ УРОВЕНЬ $k = 4$ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ

*А.А.Белов, Ю.Е.Лозовик*

В рамках обобщенной ГКО-конструкции Морозова и др. для алгебры $SO(d)_4$ получено $D = d - 2$ - параметрическое семейство конформных теорий, задаваемое $D$ алгебраическими уравнениями степени $3D-$ в $2D-$мерном пространстве интегрируемых моделей.

Задача классификации конформных теорий, в частности, поиск многопараметрических семейств КТП, является в настоящее время одной из фундаментальных нерешенных проблем, возникающих в связи с теорией струн.

В недавней работе Морозова и др. [1] была подчеркнута глубокая и до конца не выясненная связь между РКТП и квазиточнорешаемыми моделями Турбинера [2] в квантовой механике. Кроме того, в [1] были получены уравнения на коэффициенты $C^{ab}$ обобщенной конструкции Сугавары

$$T(z) = C^{ab} J_a(z) J_b(z) \ , \tag{1}$$

следующие из условий Вирасоро на $T(z)$.

Нашей целью является демонстрация того факта, что многопараметрические решения условий Вирасоро действительно существуют. В случае алгебры $SO(d)_k$ при $k$ =4 конформные теории образуют $D$-мерную поверхность ($D = d - 2$) в $R^{2D}$-пространстве параметров интегрируемых моделей. Таким образом, мы с несколько новой стороны взглянули на связь между КТП и точнорешаемыми моделями.

Подстановка диагонального анзаца [1] для $SO(d)_k$ :

$$C_{\alpha\beta,\gamma\delta} = C_0 S_{\alpha\beta} \ \delta^{\alpha\beta,\gamma\delta} \ . \tag{2}$$

в систему условий Вирасоро приводит к однородной системе кубических уравнений для $S_{\alpha\beta}$ вида

$$\sum_{\alpha\neq 1,2,3} \{S_{12}S_{13}(S_{2\alpha} - S_{3\alpha}) + S_{1\alpha}(S_{12}S_{3\alpha} - S_{13}S_{2\alpha})\} = \\ = (k/2 - 1)S_{12}S_{13}(S_{13} - S_{12}) + S_{23}(S_{13}^2 - S_{12}^2), \tag{3}$$

где вместо индексов 1,2,3 может стоять любая тройка $\delta, \beta, \gamma \in \{1, ..., d\}$. Поскольку число независимых уравнений системы (3), равное $[d(d-1)/2]-1$, совпадает с числом коэффициентов $S_{\alpha\beta}$, определенных с точностью до масштабного множителя, система (3) имеет в общем случае только дискретное множество решений, а именно сугаваровские и косеты. Однако, существует замечательное значение $k = 4$, при котором возможны многопараметрические семейства решений.

Действительно, при $k = 4$ из (3) следует, что для каждой четверки индексов $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, ..., d\}$ имеется связь:

$$(S_{\alpha\beta} - S_{\alpha\gamma})(S_{\beta\delta}S_{\gamma\delta}S_{\alpha\delta}S_{\beta\gamma}) + (S_{\alpha\gamma} - S_{\beta\gamma})(S_{\alpha\delta}S_{\beta\delta} + \\ + S_{\gamma\delta}S_{\alpha\beta}) + (S_{\beta\gamma} - S_{\alpha\beta})(S_{\alpha\delta}S_{\gamma\delta} + S_{\beta\delta}S_{\alpha\gamma}) = 0. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что решением системы (4) является анзац Манакова [3]:

$$S_{\alpha\beta} = (a_\alpha - a_\beta)/(b_\alpha - b_\beta). \tag{5}$$

Таким образом, после исключения репараметризационных степеней свободы (скажим, положив $a_1 = b_1 = 0, a_2 = b_2 = 1$) остается $2D$ независимых параметров. Как показано в [3], динамические системы на $SO(d)$ с гамильтонианом

$$H = \sum_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta} J^{\alpha\beta}, \tag{6}$$

являются полностью интегрируемыми. Следовательно, КТП описываемые обобщенной ГКО-конструкцией [1], можно охарактеризовать посредством алгебраического многообразия $M_{VIR}$, задаваемого системой (3) mod (4) в пространстве параметров интегрируемых моделей (6).

Покажем теперь, что $\dim M_{VIR} = D$. Рассмотрим тройку уравнений (3), отличающихся перестановкой индексов 1,2, и 3. Вообще говоря, два из этих уравнений являются независимыми, но при "магическом" значении $k$ =4, одно из двух уравнений является следствием другого и связи (4). Таким образом, система (3) выделяет в пространстве $R^{2D}$ параметров, от которых зависят решения (4), подпространство размерности равной максимальному числу таких неупорядоченных пар $(\alpha\beta)$, где $\alpha, \beta, \in \{1, ..., d\}$, из которых нельзя образовать ни одну тройку вида $(\alpha\beta), (\beta\gamma), (\gamma\alpha)$. Учитывая репараметризационную степень свободы, получаем , что $\dim M_{VIR} = (d-1) - 1$. Итак, многообразие теорий, удовлетворяющих условию Вирасоро определяется системой $D$ алгебраических уравнений степени $3D-$ от $2D-$переменных.

Отметим, что косеты соответствуют бесконечно удаленным точкам в пространстве параметров $\{\alpha_i, \beta_i\}$ интегрируемых моделей. Остается открытым вопрос (см. [1]): какому "внутреннему" свойству интегрируемых моделей отвечает возможность "поднять" их до конформных теорий.

К настоящему времени задача классификации интегрируемых моделей на полупростых алгебрах Ли с квадратичными гамильтонианами в основном завершена [4]. Возможно, эта классификация дает ключ к перечислению многопараметрических семейств конформных теорий. Отметим, что многообразие теорий, по-видимому, стратифицировано и распадается в несвязную сумму из $d-1$-компонент размерности $m = 0, 1, ..., D$, являющихся деформациями косет-моделей $SO(d)_4/SO(m+1)_4$ с центральным зарядом $C = d - m - 1$.

Один из авторов (А.Б.) выражает благодарность А.В.Турбинеру за полезное обсуждение.

## Литература


1. *Morozov A.Yu., Perelomov A.M., Rosly A.A.* Int. J. Mod. Phys.A, 1990,5, 803.
2. *Turbiner A.V.* Comm., Math.Phys., 1988, 118, 467.
3. *Манаков С.В.* Функциональный анализ, 1976, 10, 93.
4. *Фоменко А.Г.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: изд. МГУ, 1988.


Институт спектроскопии
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
31 июля 1990 г.