

ЕЩЕ ОДИН ВКЛАД ПОРЯДКА $\alpha^2(Z\alpha)E_F$ В СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ В МЮОНИИ И ВОДОРОДЕ

С.Г.Каршенбойм, В.А.Шелюто, М.И.Эйдеc

Вычислен вклад в сверхтонкое расщепление порядка $\alpha^2(Z\alpha)E_F$, индуцированный поляризационной вставкой в радиационный фотон. Он оказался равным $-0,310742\dots \cdot (\alpha^2(Z\alpha)/\pi)E_F$, или, численно, $-0,17$ кГц для мюония и $-0,054$ кГц для водорода.

Недавно мы начали вычисление всех чисто радиационных поправок к сверхтонкому расщеплению в мюонии и водороде порядка $\alpha^2(Z\alpha)E_F$ ¹⁾ $^{1-3}$. Было показано, что все вклады этого порядка генерируются шестью калибровочно инвариантными наборами диаграмм с двумя внешними фотонами. Поправки, индуцированные вставками поляризационного оператора во внешние фотонные линии, были вычислены в $^{1-3}$. Они соответствуют трем калибровочно инвариантным наборам диаграмм. Ниже мы вычислим последний вклад, связанный со вставками вакуумной поляризации. В отличие от $^{1-3}$ поляризационная вставка производится теперь в радиационный фотон (см. рис.).

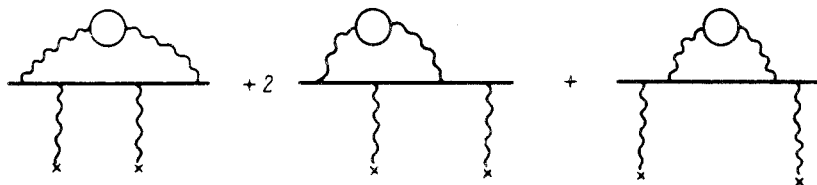


Рис. 1. Калибровочно инвариантный набор диаграмм со вставкой поляризационного оператора в радиационный фотон

Компактное выражение для суммы однопетлевых радиационных поправок к электронной линии с испусканием двух фотонов было получено нами ранее в 4,5 . Вклад в сверхтонкое расщепление в кинематике внешнего поля дает лишь одна из приведенных там матричных структур $\langle \gamma \hat{k} \gamma \rangle$, которая совпадает со скелетной. Коэффициент $(\alpha/2\pi)L(k)$ перед этой структурой использовался в $^{1-3}$, причем общее выражение из 4,5 было несколько упрощено с помощью интегрирования по частям. Вставку поляризационного оператора в радиационный фотон можно учесть, восстанавливая массу радиационного фотона в выражении

¹⁾ E_F - энергия сверхтонкого расщепления Ферми.

для электронного фактора $L(k)$. Новый радиационный фактор принимает тогда вид

$$\frac{\alpha}{2\pi}L(k) = \frac{\alpha^2}{2\pi^2} \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2} L(k, \lambda), \quad (1)$$

где $\lambda^2 = 4/(1-v^2)$ и все массы и импульсы выражены в единицах массы электронов.

Вклад в сверхтонкое расщепление, индуцированный радиационными поправками к электронной линии, выражается, как было показано в ^{1,2}, интегралом

$$\delta E = \frac{4\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} E_F \int_0^\infty dk L(k) = \frac{4\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} E_F \int_0^\infty dk \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2} L(k, \lambda). \quad (2)$$

После громоздких вычислений мы получили представление для величины сверхтонкого расщепления в виде одномерного интеграла

$$\delta E = \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^1 dq G(q) \left[\left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2q}{1-q}} - \frac{\sqrt{2q(1-q)}}{1+q} - \frac{4q\sqrt{2q(1-q)}}{3(1+q)^2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(-\frac{1}{2q^3} + \frac{1}{2q} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2(1+q)} - \frac{4}{(1+q)^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\frac{2q}{1-q}} \left(-\frac{4}{3q} - \frac{8}{3} + \frac{28}{3(1+q)} + \frac{8}{3(1+q)^2} - \frac{16}{(1+q)^3} + \frac{32}{3(1+q)^4} \right) \right] \right\}, \quad (3)$$

где

$$G(q) = q \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\sin^2 \varphi (1 - \frac{\sin^2 \varphi}{3})}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (4)$$

Функция $G(q)$ легко выражается через стандартные полные эллиптические интегралы $D(q)$ и $C(q)$ ⁶ в виде

$$G(q) = \frac{q}{9} (7D(q) - C(q)), \quad (5)$$

но интегральное представление (4) удобнее для вычислений.

Выражение (3) можно записать в более компактной форме, избавившись от полного эллиптического интеграла $C(q)$. Мы использовали с этой целью представление $C(q)$ в терминах $D(q)$ и его производных. Проведя затем ряд интегрирований по частям с помощью известного гипергеометрического уравнения для полного эллиптического интеграла $D(q)$ ⁶, мы пришли к выражению

$$\delta E = \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F \left\{ -\frac{149}{270} + \frac{2}{9\pi} \int_0^1 dq D(q) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{3}{1+q} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2q}{1-q}} + \sqrt{\frac{2q}{1-q}} \left(-\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1+q} - \frac{2927}{2400} + \frac{10169}{3600} q \right) \right] \right\}. \quad (6)$$

Несмотря на все усилия мы не смогли получить ответ для интеграла (4) (или (6)) в замкнутой форме и ограничились численным интегрированием, которое можно выполнить с произвольной точностью.

Таким образом вклад в сверхтонкое расщепление диаграмм рис. оказывается равным

$$\delta E_{\text{Mu}} = -0,310742\dots \cdot \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F^{\text{Mu}} \cong -0,17\text{кГц},$$

$$\delta E_{\text{H}} = -0,310742\dots \cdot \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F^{\text{H}} \cong -0,054\text{кГц}, \quad (7)$$

для мюония и водорода, соответственно. Знак вклада (7) можно было, конечно, предвидеть заранее. Действительно, диаграммы рис. лишь вставкой поляризации вакуума отличаются от диаграмм для классической поправки порядка $\alpha(Z\alpha)E_F$ ^{7,8}. Хорошо известно, что поляризационная вставка не меняет знака фотонного пропагатора и поэтому знак вклада (7) совпадает со знаком поправки ^{7,8}.

В настоящее время мы проводим вычисление вклада порядка $\alpha^2(Z\alpha)E_F$, индуцированного двумя оставшимися калибровочно инвариантными наборами диаграмм ¹⁻³. Вычисление этих поправок позволит снизить погрешность теоретической формулы для сверхтонкого расщепления в мюонии до уровня экспериментальной ошибки измерения этой величины.

Литература

1. Каршенбойм С.Г., Шелюто В.А., Эйдез М.И. Письма в ЖЭТФ, 1989, 50, 3.
2. Eides M.I., Karshenboim S.G., Shelyuto V.A. Phys. Lett. B, 1989, 229, 285.
3. Каршенбойм С.Г., Шелюто В.А., Эйдез М.И. ЯФ, 1989, 50, 1636.
4. Eides M.I., Karshenboim S.G., Shelyuto V.A. Phys. Lett. B, 1988, 202, 572.
5. Каршенбойм С.Г., Шелюто В.А., Эйдез М.И. ЖЭТФ, 1988, 94, 42.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции, М.: Наука, 1968.
7. Kroll N., Pollock F. Phys. Rev., 1951, 84, 594; *ibid.* 1952, 86, 876
8. Karplus R., Klein A., Schwinger J. Phys. Rev., 1951, 84, 597; Karplus R., Klein A. Phys. Rev., 1952, 85, 972.