Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 6, стр. 945 - 949 25 сентября 1990 г.

СПОНТАННОЕ ОБРАЗОВАНИЕ АВТОСОЛИТОНОВ В УСТОЙЧИВЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ

Б.С.Кернер, С.Л.Кленов

Определена вероятность (в единицу времени) спонтанного образования в устойчивой слабонеравновесной системе сильнонеравновесной локализованной области - автосолитона. Найдена форма критической флуктуации конечной амплитуды, нарастание которой приводит к возникновению автосолитона.

Во многих устойчивых неравновесных распределенных системах (полупроводниковой или газовой плазме, ионосфере, композитных сверхпроводниках, нелинейных оптических системах и др.) с помощью внешнего локального кратковременного возмущения можно возбудить автосолитон АС [1]. В реальных системах АС может возникать и спонтанно в результате лавинообразного локального нарастания параметров системы вблизи малой неоднородности [1,2], которое происходит при уровнях возбуждения системы A, близких к точке потери устойчивости ее однородного состояния. В настоящем сообщении определена вероятность спонтанного образования АС в неравновесных системах, исходное состояние которых является устойчивым относительно малых возмущений параметров системы.

Свойства многих неравновесных систем, в которых образуются АС, описываются уравнениями типа [1]

$$\frac{\partial Y_j}{\partial t} = \sum_{i=0}^{N} \nabla(D_{ij} \nabla Y_i) - q_j(Y_0, ...Y_i, ...Y_N, A) + \xi_j(\vec{r}, t), \quad j = 0, 1, ...N, \tag{1}$$

где A - уровень возбуждения системы, Y_j - ее параметры $D_{ij}(Y_i)$ - коэффициенты диффузии; q_j - нелинейные функции; $\xi_j(\vec{r}, t)$ - случайные силы, которые для определенности предполагаются дельта-коррелированными: $\overline{\xi_j(\vec{r}_1, t_1)\xi_j(\vec{r}_2, t_2)} = \Phi_j\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\delta(t_1 - t_2)$.

Известно [3], что устойчивость однородного состояния неравновесных систем, описываемых уравнениями (1), может нарушаться относительно неоднородных возмущений вида $\delta Y_j \propto \exp(i\vec{k}_c\vec{r})$ с волновым числом $k_c \equiv |\vec{k}_c| \neq 0$, когда уровень возбуждения системы A превышает некоторое критическое значение $A = A_c$. Рассмотрим для простоты одномерный случай. При уровнях возбуждения A вблизи точки $A = A_c$ $(\beta \equiv \frac{|A_c - A|}{A_c} \ll 1)$ малые отклонения $\Delta Y_j = Y_j(x,t) - Y_j^{(s)}$ параметров системы от их значений $Y_j = Y_j^{(s)}$ для однородного состояния описываются выражениями $\Delta Y_j = a_j W(x,t) e^{ik_c x} + \text{к.с.} + O(\beta)$ [4,5], где a_j - константы. Амплитуда этих отклонений $W(x,t) \propto \beta^{1/2}$ [5,6] и удовлетворяет уравнению типа Гинзбурга - Ландау [4-6]

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\gamma W + D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \alpha |W|^2 W + \eta(x,t). \tag{2}$$

В (2) $\gamma \propto (A_c - A)A_c^{-1}, \alpha \sim 1, D \propto k_c^{-2}$ - вещественные константы; $\eta = \eta_R + i\eta_I$ - случайная сила, функции $\eta_R(x,t)$ и $\eta_I(x,t)$ при выбранных $\xi_j(x,t)$ в (1) являются дельта-коррелированными и имеют одинаковую интенсивность $\Phi_\eta \lesssim \beta^{3/2} \ll 1$ [5].

В реальных физических системах всегда присутствуют малые локальные неоднородности. Их можно учесть, добавив в правую часть (1) слагаемые $\lambda\varphi_j(x)$, где $\lambda \ll 1$. Считая неоднородность локализованной в области $-\Lambda < x < \Lambda$ размером $2\Lambda \lesssim \frac{2\pi}{k_c}$, изучим распределения $\Delta Y_j(x,t)$, возникающие в такой слабонеоднородной системе при уровнях возбуждения $A < A_c$.

Рассмотрим область значений параметра A, в которой $(A_c - A)A_c^{-1} \sim \lambda \ll 1$. Решения ΔY_j будем искать в виде рядов $\Delta Y_j = \nu\Delta Y_j^{(0)} + \nu^2 \Delta Y_j^{(1)} + ...$, где $\nu^2 \equiv \lambda$. Подставляя это разложение в (1) и следуя процедуре вывода уравнения (2) для идеально однородной системы [5], получим, что для рассматриваемой здесь задачи с локальной неоднородностью амплитуда W распределений $\Delta Y_j(x,t)$ вне неоднородности $(|x| > \Lambda)$ также описывается уравнением (2), которое получается из уравнений первого, второго и третьего приближения по параметру ν. Граничные условия к уравнению (2) на границах области неоднородности, т.е. в точках $x = \pm\Lambda$, можно найти, используя уравнения первого и второго приближения по ν

$$D\frac{\partial W}{\partial x}|_{x=-\Lambda} - D\frac{\partial W}{\partial x}|_{x=\Lambda} = h, \quad W|_{x=\Lambda} = W|_{x=-\Lambda} + O(\nu^2), \tag{3}$$

где $h = \lambda \int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} \exp(-ik_c x) \sum\limits_{i=0}^{N} c_i\varphi_i(x)dx$, c_i - константы.

В отличие от [4-6] рассмотрим случай, когда в однородной $(\lambda = 0)$ системе при $A = A_c$ происходит докритическая бифуркация (в (2) параметр $\alpha > 0$ и $|\alpha| \sim 1$), т.е. при $A = A_c$ спонтанно образуются структуры большой амплитуды. При наличии в такой системе малой неоднородности задача (2), (3) в отсутствии шума $(\Phi_\eta = 0)$ имеет при $A < A_c$ два стационарных затухающих на бесконечности $(x \to \pm\infty)$ решения

$$W^{\pm}(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha}}\mathrm{ch}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{D}}(|x| - \Lambda) + C^{\pm}\right)\exp(i\chi), |x| \geq \Lambda. \tag{4}$$

В (4) $\chi = \arg(h)$; значения констант $C^{\pm}$ $(C^+ < C^-)$ определяются величиной амплитуды $W_a^{\pm} = |W^{\pm}||_{x=\Lambda}$, которая, согласно (3), (4), находится из уравнения

$$\alpha(W_a^{\pm})^4 - 2\gamma(W_a^{\pm})^2 + \frac{1}{2}D|h|^2 = 0. \tag{5}$$

Из (5) следует, что стационарные распределения $W^{\pm}(x)$ существуют лишь при уровнях возбуждения A, меньших некоторого критического значения $A = A_c^- < A_c$, которое определяется из условия $\gamma^- \equiv \gamma(A_c^-) = \sqrt{\frac{\alpha}{2D}}|h| \sim \lambda$. В точке $A = A_c^-$ решения W^+ и W^- сливаются $(W_0(x) = W^{\pm}(x)|_{A=A_c^-})$ и при $A > A_c^-$ исчезают (рис.

1, а). Анализ устойчивости стационарных распределений $W^{\pm}(x)$ показывает, что при $A < A_c^-$ одно из них (W^-) является устойчивым, другое (W^+) неустойчивым.

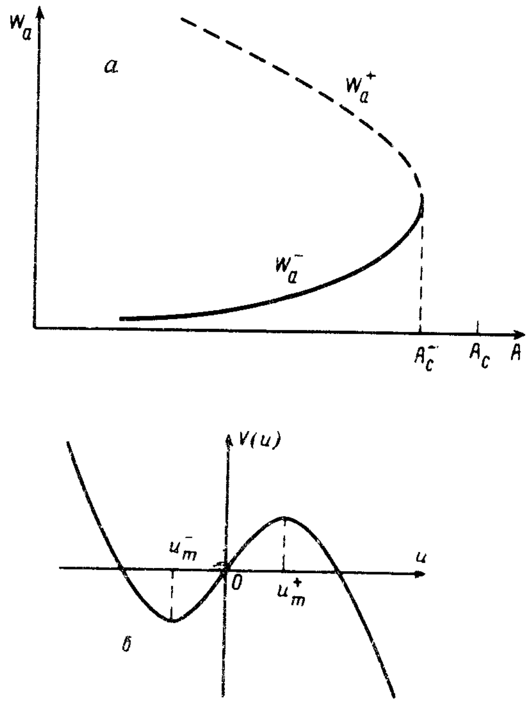

Рис. 1. Зависимость величины амплитуды стационарных распределений параметров системы у неоднородности ($W_a = |W||_{x=\pm\lambda}$) от уровня возбуждения A (а) и вид потенциала $V(u)$ при $A < A_c^-$ (б)

Рассмотрим область значений $A < A_c^-$, где состояние системы является устойчивым. Используя обозначения $\Delta\gamma = \gamma - \gamma^-$, $\Delta W = (W - W_0(x))\exp(-i\chi)$, уравнение (2) запишем в виде

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial t} = -\hat{H}_0\Delta W - \Delta\gamma(|W_0| + \Delta W) + \alpha[|W_0|^2(\Delta W^* - \Delta W) +$$
$$+|W_0|(2|\Delta W|^2 + \Delta W^2) + |\Delta W|^2\Delta W] + \exp(-i\chi)\eta(x,t), \qquad (6)$$

где $\hat{H}_0 = -D\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma^- - 3\alpha|W_0(x)|^2$. Подставляя $W^+(x)$ и $W^-(x)$ в (2) и вычитая полученные выражения друг из друга, найдем, что наименьшее собственное значение оператора $\hat{H}_0$ равно нулю и отвечает собственной функции $\psi_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\lim_{A\to A_c^-}(W^+(x) - W^-(x))\Delta\gamma^{-1/2}$.

При анализе уравнения (6) будем считать интенсивность шума малой: $\Phi_\eta \ll \lambda^{3/2}$, а величину $\frac{\Delta\gamma}{\gamma^-} \lesssim \mu^2 \ll 1$, где малый параметр μ удовлетворяет условию $\mu^3 \gtrsim \Phi_\eta\lambda^{-3/2}$. Решение уравнения (6) представим в виде ряда $\Delta W = \mu\Delta W^{(0)} + \mu^2\Delta W^{(1)} + \ldots$ Переходя к новой переменной $\tau = \mu t$ и раскладывая $\Delta W^{(0)}, \Delta W^{(1)}, \ldots$ по собственным функциям оператора $\hat{H}_0$, в первом порядке по μ получим

$\Delta W^{(0)} = u(\tau)\psi_0(x)$. Во втором порядке по μ из (6) следует уравнение для величины $u(\tau)$:

$$\frac{du}{d\tau} = -\delta + bu^2 + \varsigma(\tau), \tag{7}$$

где $\delta = g\Delta\gamma\mu^{-2}$; $g, b > 0$ - константы; $\varsigma(\tau)$ - случайная сила с функцией корреляции $\overline{\varsigma(\tau_1)\varsigma(\tau_2)} = \frac{\Phi}{\mu^3}\delta(\tau_1 - \tau_2), \Phi = \Phi_\eta(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^2(x)dx)^{-1}$.

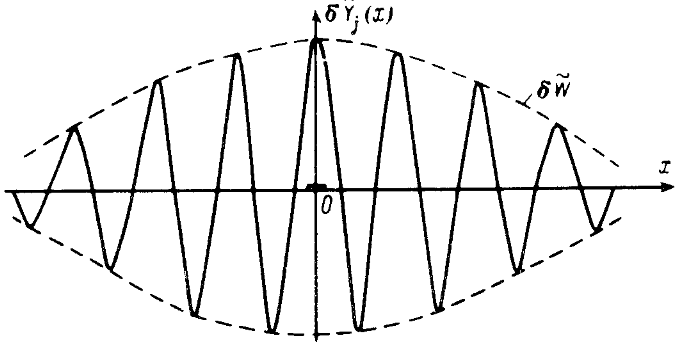

Рис. 2. Форма критической флуктуации конечной амплитуды, нарастание которой приводит к спонтанному возникновению автосолитона

Уравнение (7) описывает случайное движение "частицы" в потенциале $V(u) = u\delta - \frac{b}{3}u^3$ (рис. 1, б). При $A < A_c^-$ потенциал $V(u)$ имеет два экстремума в точках $u_m^\pm = \pm(\frac{\delta}{b})^{1/2}$, отвечающих соответственно неустойчивому W^+ и устойчивому W^- стационарным распределениям. Используя решение задачи о среднем времени выхода (T) классической "частицы" из потенциальной ямы [7], в пределе малого шума $\Phi \ll (\Delta\gamma)^{3/2}$ получим выражение для вероятности $P = T^{-1}$, с которой величина u достигает области значений $u > u_m^+$ и начинает неограниченно возрастать:

$$P = \frac{1}{\pi}(bg\Delta\gamma)^{1/2}\exp(-\frac{4}{3}\frac{(g\Delta\gamma)^{3/2}}{b^{1/2}\Phi}). \tag{8}$$

Выражение (8) определяет вероятность P (в единицу времени), с которой в устойчивой ($A < A_c^-$; рис. 1, а) неравновесной системе происходит лавинообразное локальное нарастание ее параметров в области вблизи неоднородности, приводящее к спонтанному образованию автосолитона. Последнее связано с тем, что критическая флуктуация конечной амплитуды является локализованной в пространственной области размера $L \sim (\frac{D}{\lambda})^{1/2}$ (рис. 2). Действительно, при значении $u = u_m^+$ величина отклонения от устойчивого стационарного состояния $W^-(x)$ согласно (6), (7) определяется соотношением $\delta\tilde{W} \equiv W - W^- = \mu(u_m^+ - u_m^-)\psi_0(x)e^{i\chi}$. Это позволяет найти форму критической флуктуации $\delta Y_j = a_j\delta\tilde{W}\exp(ik_c x)+$ к.с. :

$$\delta\tilde{Y}_j(x) = 4a_j(\frac{g\Delta\gamma}{b})^{1/2}\mathrm{sh}(\tilde{x})\mathrm{ch}^{-2}(\tilde{x})\cos(k_c x + \chi), \quad |x| \geq \Lambda, \tag{9}$$

где $\tilde{x} = \sqrt{\frac{\gamma^-}{D}}(|x| - \Lambda) + 1 + \sqrt{2}$.

Литература

1. *Кернер Б.С., Осипов В.В.* УФН , 1989, **157**, 201.
2. *Кернер Б.С., Осипов В.В.* ДАН СССР, 1982, **264**, 1366; УФН, 1990, **160**, вып.9, 1.
3. *Николис Г.,Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979, 512 с.

4. *Хакен Г.* Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985, 423 с.

5. *Nitzan A., Ortoleva P.* Phys.Rev.A, 1980, 21, 1735.

6. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* Prog. Theor. Phys., 1975, 54, 687.

7. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986, 528 с.

Поступила в редакцию
13 августа 1990 г.