Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 7, стр. 1007 - 1009 10 октября 1990 г.

# О РЕЛАКСАЦИИ ЗАРЯДА НА ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ

*В.Е.Архинчеев*

Показано, что релаксация заряда на фракталях описывается обобщенным уравнением в дробных временных производных и носит степенной характер.

Целью настоящего сообщения является изучение релаксации заряда на регулярных фрактальных структурах. Посредством ренорм-групповых преобразований будет выведено уравнение, описывающее релаксацию заряда на фракталях. Оно имеет вид уравнения в дробных временных производных. Показано, что заряд на фракталях релаксирует не экспоненциальным максвелловским, а только степенным образом.

Релаксация заряда в проводящей среде описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0, \quad \mathrm{div}\vec{e} = 4\pi\rho, \quad \vec{j} = \sigma\vec{e}. \tag{1}$$

Здесь $\rho$ - избыточная плотность заряда, $\vec{j}$ и $\vec{e}$, соответственно, электрический ток и поле, $\sigma$ - проводимость среды. (Диэлектрическая проницаемость считается равной единице).

Проведем масштабные преобразования уравнений (1). Для этого перейдем в $\lambda$ - представление по времени и представим пространственные производные в виде конечных разностей. Для определенности рассмотрим паркеты Серпинского, (а также кривые Коха). Эти структуры инвариантны относительно масштабных преобразований $2^n$, где $n=1, 2, 3...$ (Простейший треугольный паркет Серпинского получается следующим образом: равносторонний треугольник делится на четыре равных треугольника; центральный треугольник выбрасывается, с каждой из оставшихся частей проделывается та же самая процедура - и так до бесконечности [1]). Зафиксируем некоторый масштаб $A$. Дальнейший шаг состоит в переходе от масштаба $A$ к большему масштабу $2A$. Непосредственными вычислениями, аналогично [2], легко проверить, что при этом в низкочастотном пределе параметр $\lambda$ возрастает в 5 раз, а плотность частиц в 3 раза. Таким образом, приходим к перенормированному уравнению, описывающему релаксацию заряда на фракталях:

$$5\lambda\rho(\lambda, x) = -3(4\pi\sigma)\rho(\lambda, x). \tag{2}$$

Из инвариантности уравнения относительно масштабных преобразований следует степенная зависимость от частоты:

$$\lambda^S\rho(\lambda, x) = -a\rho(\lambda, x), \tag{3}$$

где индекс $S = \ln 5/\ln 3$, а $a - \text{const}$. (Аналогичные вычисления для кривой Коха дают значение индекса $S = 1/2$). Воспользовавшись определением дробной производной по времени $(\partial^S f/\partial t^S) = \lambda^S f_\lambda$, получим в $t$ - представлении искомое уравнение релаксации заряда на фракталях:

$$\frac{\partial^S \rho}{\partial t^S} + a\rho = 0 \tag{4}$$

Функция Грина уравнения (4) равна:

$$G_\lambda = \frac{1}{\lambda^S + a}. \tag{5}$$

В общем случае ее вид устанавливается методом перевала. Для индекса $S = 1/2$ функцию Грина можно вычислить в явном виде. Используя тождество

$$\int_0^\infty \exp(-a\tau)d\tau = 1/a,$$

получим функцию Грина в $t$-представлении:

$$G(t) = \int_0^\infty \int \exp(-\sqrt{\lambda}\tau - a\tau + \lambda t)\frac{d\lambda}{2\pi}d\tau = \int_0^\infty \exp(-\frac{\tau^2}{4t} - a\tau)\frac{\tau}{2t}\frac{d\tau}{\sqrt{\pi t}} \tag{6}$$

Таким образом, релаксация заряда на фракталях на больших временах носит степенной характер. Степенное поведение релаксации заряда обусловлено отсутствием характерных размеров у фрактальных структур; иначе говоря, возможны металлические включения всех размеров, по которым и идет релаксация заряда.

В заключение отметим, что релаксация заряда в перколяционных системах на пороге протекания также описывается уравнением вида (4). Для трехмерного случая в этом легко убедиться, используя гипотезу подобия для эффективной проводимости на частоте [3]. (Возможное значение индекса для трехмерного случая $S = 1/3$ указано в [4]). В двумерном случае оно следует из результатов [5].

## Литература


1. *Mandelbrot B.* Fractal Geometry of Nature, San-Francisco, 1982.
2. *Rammal R., Toulouse G.* J. Phys. Lett., (Paris), 1983, 44, L13.
3. *Шкловский Б.И., Эфрос А.Л.* Phys. St. Sol. 1976, 76, 475.
4. *Архинчеев В.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1989, 50, 293.
5. *Архинчеев В.Е.* ЖЭТФ, 1990, 97, 1379.



Бурятский научный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР



Поступила в редакцию
6 августа 1990 г.