Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 10, стр. 1124 - 1126 25 ноября 1990 г.

ТВИСТОРНЫЙ СДВИГ В УРАВНЕНИЯХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ И СТРУН

Д.В.Волков, В.А.Сорока, Д.П.Сорокин, В.И.Ткач

Рассматривается обобщение уравнений движения релятивистских безмассовых частиц во внешних полях и релятивистских струн. Обобщение основывается на введении операции твисторного сдвига и содержит фундаментальную константу размерности длины.

Начиная с работ Пенроуза [1] твисторы широко используются для описания безмассовых релятивистских частиц и суперчастиц, а также струн и суперструн. Являясь альтернативой обычному координатному описанию, твисторный подход в ряде случаев дает более экономное описание связей и более прозрачное представление свойств симметрии. Тем не менее, насколько нам известно, каких-либо существенных модификаций современных теоретических представлений на основе твисторов предложено не было.

В настоящей статье мы хотим указать на то, что исходя из твисторной формулировки динамики безмассовых частиц и струн можно обобщить соответствующие лагранжианы таким образом, что в теории появляется некоторая фундаментальная длина. Наиболее интересным с физической точки зрения является несомненно применение предлагаемого обобщения для случая (супер)струн, однако основная идея может быть проиллюстрирована посредством простого примера релятивистской безмассовой частицы в пространстве-времени $D = 1 + 2$.

Как известно [2], динамика такой частицы может быть описана лагранжианом вида

$$L_0 = \lambda_\alpha \lambda_\beta \dot{x}^{\alpha\beta}, \tag{1}$$

играющим роль моста между пространственно-временной и твисторной формулировками [3,4], (λ_α - коммутирующий майорановский спинор, $\alpha, \beta = 1,\ 2$, $x^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^{m\alpha\beta} x_m(\tau)$ - координата частицы ($m = 0,\ 1,\ 2$), $\dot{x}^{\alpha\beta} = \frac{d}{d\tau} x^{\alpha\beta}(\tau)$ - ее скорость).

Условие массовой поверхности $p_m p^m = 0$ для частицы с $m = 0$ возникает из (1) как следствие связи

$$p_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \tag{2}$$

и тождества $\lambda_\alpha \lambda_\beta \epsilon^{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda^\alpha = 0$ $(\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1)$.

Предположим, что частица взаимодействует с какими-то квантовыми полями, вакуумные флуктуации которых могут, вообще говоря, привести к дополнительным, содержащим $\dot{\lambda}_\alpha$, членам в лагранжиане (1), тогда минимальное обобщение (1) имеет вид

$$L = L_0 + L_1 = L_0 + l\lambda_\alpha \dot{\lambda}_\beta \epsilon^{\alpha\beta}, \tag{3}$$

где l - произвольный параметр размерности длины. Динамика частицы, описываемая лагранжианом (3), ограничена связями (2) и

$$\varphi_\alpha = \pi_\alpha + l\lambda_\alpha = 0 \tag{4}$$

(π_α - импульс, канонически сопряженный λ^α), одна из которых: $p_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 0$ первого рода соответствует локальной репараметризационной инвариантности теории, а четыре остальных - второго рода. Как следствие, лагранжианы (1) и (3) имеют одинаковое число независимых канонических переменных, а λ_α являются

вспомогательными переменными. Спинорные связи (4) удовлетворяют скобкам Пуассона $[\varphi_\alpha \varphi_\beta] = -2l\epsilon_{\alpha\beta}$.

Для того, чтобы выделить из (2) остальные две связи второго рода, введем в рассмотрение спинор $\mu^\alpha = x^{\alpha\beta}\lambda_\beta$ (который вместе с λ^β образует твистор) [3,4] и спроектируем (2) и (4) на $\lambda_\alpha, \mu^\beta$

$$\Phi^1 = p_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta - (\lambda\mu)^2 - \frac{1}{l}(\mu_\alpha\varphi^\alpha)(\lambda\mu) = 0, \quad \lambda\mu \equiv \lambda_\alpha\mu^\alpha$$

$$\Phi^2 = p_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta - \frac{1}{2l}(\lambda_\alpha\varphi^\alpha)(\lambda\mu) = 0. \tag{5}$$

Скобки Пуассона связей (5) имеют вид

$$[\Phi^i, \Phi^k] = \frac{1}{l}(\lambda\mu)^3\epsilon^{ik} \quad (i, k = 1, 2). \tag{6}$$

Переход к скобкам Дирака

$$[f, g]^* = [f, g] - \frac{1}{2l}[f, \varphi^\alpha]\epsilon_{\alpha\beta}[\varphi^\beta, g] - \frac{l}{(\lambda\mu)^3}[f, \Phi^i]\epsilon_{ik}[\Phi^k, g] \tag{7}$$

приводит к тому, что $x^{\alpha\beta}$ перестают коммутировать[1)]

$$[x^{\alpha\beta}, x^{\gamma\delta}]^* = \frac{l}{2(\lambda\mu)^2}(\epsilon^{\alpha\delta}\mu^\gamma\mu^\beta + \epsilon^{\beta\gamma}\mu^\alpha\mu^\delta), \tag{8}$$

а коммутационные соотношения между λ^α и μ^β принимают вид

$$[\lambda^\alpha, \lambda^\beta]^* = 0, \quad [\mu^\alpha, \lambda^\beta]^* = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}, \tag{9а}$$

$$[\mu^\alpha, \mu^\beta]^* = \frac{l}{2}\epsilon^{\alpha\beta}. \tag{9б}$$

Чтобы восстановить канонический характер скобок Дирака для твисторных переменных λ, μ, сделаем твисторный сдвиг μ^d в направлении λ^α

$$\hat{\mu}^\alpha = \mu^\alpha + \frac{l}{2}\lambda^\alpha \tag{10}$$

тогда скобки (9б) для $\hat{\mu}$ обращаются в нуль. Считая $\hat{\mu}^\alpha$ функцией λ_α и новой переменной $\hat{x}^{\alpha\beta}(\hat{\mu}^\alpha = \hat{x}^{\alpha\beta}\lambda_\beta)$, найдем связь $\hat{x}^{\alpha\beta}$ со старыми координатами $x^{\alpha\beta}$:

$$\hat{x}^{\alpha\beta} = x^{\alpha\beta} + \frac{l}{2(\lambda\mu)}(\lambda^\alpha\mu^\beta + \lambda^\beta\mu^\alpha). \tag{11}$$

Отметим, что в силу связей (2) и определения μ^α, твисторный сдвиг $x^{\alpha\beta}$ (11) пропорционален орбитальному моменту. Нетрудно проверить, что $\hat{x}$ коммутируют относительно скобок (7), а лагранжиан (3) после переопределения (11) превращается в лагранжиан (1), что свидетельствует об эквивалентности соответствующих теорий свободных частиц. Таким образом, при отсутствии взаимодействия нельзя определить, какие из координат $x^{\alpha\beta}$ или $\hat{x}^{\alpha\beta}$ являются физическими координатами частицы. Ответ на этот вопрос может быть получен лишь при учете взаимодействия частиц с внешними полями.

Рассмотрим, например, динамику частицы, минимальным образом взаимодействующей с электромагнитным полем $A_{\alpha\beta}(x)$

$$L_B = -\dot{x}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}(x). \tag{12}$$

[1)] При выборе калибровки $x^0 = \tau$ скобка Дирака для координат имеет следующий простой вид $[x_1, x_2]^* = -l/\sqrt{2}E$, где E - энергия частицы.

Структура связей теории остается прежней с тем лишь отличием, что в (2) и (5) $p_{\alpha\beta}$ заменяются на ковариантные импульсы $D_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}$, а в правую часть (6) входит тензор напряженности электромагнитного поля $F_{mn} = \partial_{[m}A_{n]}$, что приводит к модификации скобок Дирака.

Также как и в свободном случае, можно использовать твисторный сдвиг (10), (11) для перехода к представлению, в котором $\hat{x}$ коммутируют. При этом в лагранжиане возникает бесконечный ряд по l^n неминимальных членов взаимодействия, содержащих F_{mn} и его производные. В первом порядке по l такой лагранжиан может быть представлен в виде

$$L = \lambda_\alpha \lambda_\beta \dot{\hat{x}}^{\alpha\beta} - \dot{\hat{x}}^{\alpha\beta}(A_{\alpha\beta} + \frac{l}{2}F_{\alpha\beta}), \tag{13}$$

где

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^l_{\alpha\beta}\epsilon_{lmn}F^{mn}.$$

Проведенное выше рассмотрение допускает обобщение на случай высших размерностей $D = 1 + 3$, $1 + 5$, $1 + 9$.

Заметим, что наличие дополнительного члена L_1 должно сказаться, вообще говоря, и на уравнениях движения внешних полей, что должно проявиться как в условиях самосогласованности при рассмотрении взаимодействующих с внешними полями суперчастиц, так и в теориях струн и суперструн.

В заключение приведем обобщение действия для классических струн в размерности $D = 1 + 3$:

$$S = \int d\tau d\sigma \sqrt{-g}\{\bar{\lambda}^{\dot{A}}\rho^\mu\lambda^A(\partial_\mu x_{A\dot{A}} - \frac{L^2}{2}\bar{\lambda}_{\dot{A}}\rho_\mu\lambda_A) + \frac{l}{2}(\lambda^A\rho^\mu\partial_\mu\lambda^B\epsilon_{AB} + \text{к.с.})\} \tag{14}$$

где ρ^μ - матрицы Дирака на мировом листе, $\lambda_A, \bar{\lambda}_{\dot{A}}$ - спиноры как в $D = 1 + 3$, так и в $d = 1 + 1$, L - параметр длины струны. Первое слагаемое в (14) эквивалентно действию классической бозонной струны, а второе является обобщением L_1 в (3), причем оба слагаемых обладают репараметризационной и масштабной инвариантностью.

Подробное рассмотрение действия (14) будет проведено в отдельной работе.

Авторы благодарят В.Д.Гершуна, А.А.Желтухина и А.И.Пашнева за полезные обсуждения.

Литература

1. *Penrose R., MacCallum M.A.H.* Phys. Repts., 1972, 6, 241.
2. *Shirafuji T* Progr. Theor. Phys., 1983, 70, 18.
3. *Sorokin D.P., Tkach V.I., Volkov D.V.* Mod. Phys. Lett. A, 1989, 4, 901.
4. *Гуменчук А.И., Сорокин Д.П.* ЯФ, 1990, 51, 549.

Харьковский физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
24 октября 1990 г.