Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 10, стр. 1164 - 1167 25 ноября 1990 г.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕРШИННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ СИНУС АЛГЕБРЫ ВЕЙЛЯ - МОЙАЛА - ФЭРЛИ

М.И.Голенищева-Кутузова, Д.Р.Лебедев

Строится неприводимое представление синус алгебры Вейля - Мойала - Фэрли в терминах вершинных операторов. Описывается вложение синус алгебры в $\hat{\mathfrak{gl}}(\infty)$.

1. Синус алгебра g Вейля - Мойала - Фэрли является известной квантовой деформафией алгебры Ли Гамильтоновых векторных полей на торе с центральным расширением. В реализации Фэрли она задается образующими $T_{\vec{n}}$, c и коммутационными соотношениями

$$[T_{\vec{n}}, T_{\vec{m}}] = 2i \sin \hbar(\vec{n} \times \vec{m}) T_{\vec{n}+\vec{m}} + n_1 \delta_{\vec{n}+\vec{m}} c, \tag{1}$$

где $\vec{n}, \vec{m}$ - целочисленные векторы двумерной плоскости. Алгебра (1) является примером широкого класса континуальных контраградиентных алгебр Ли, введенных в [2]. Там же описаны применения такого типа алгебр в теории интегрируемых уравнений (нелокальных аналогов двумеризованных цепочек Тода). Алгебры типа (1) также возникают в качестве промежуточного шага в теории деформации интегрируемых уравнений типа KdV в интегрируемые интегро-дифференциальные уравнения типа TLW [3]. Существуют указания на важность алгебры (1) для формулировки теории струн вне теории возмущений [4].

В этой статье мы описываем конструкцию неприводимого представления старшего веса алгебры (1) в терминах вершинных операторов.Нам бы хотелось обратить особое внимание на то, что при вычислении правил слияния вершинных операторов и коммутационных соотношений возникают эффекты раздвижки полюсов, аналогичные тем, что появлялись в [6], а также в [7] при построении базисного

представления квантованных по Дринфельду и Джимбо алгебр Каца - Муди. Нам представляется это не случайным совпадением. Намеком на это может служить то, что при $c = 0$ соотношения (1) следуют из уравнений $T_{\vec{n}}T_{\vec{m}} = e^{i\hbar(\vec{n}\times\vec{m})}T_{\vec{n}+\vec{m}}$ или $T_{\vec{n}}T_{\vec{m}} = e^{2i\hbar(\vec{n}\times\vec{m})}T_{\vec{m}}T_{\vec{n}}$. При $\vec{n} = (1,0)$, $\vec{m} = (0,1)$ - это соотношения, определяющие квантовую плоскость. Квантовая группа $GL_q(2)$ это автоморфизмы квантовой плоскости [8]. Следовательно, резонно ожидать наличия некоторой связи между построенным нами представлением квантовой двухпетлевой алгебры (1) и представлениями квантовых групп.

2. Алгебра Ли g содержит бесконечное число бесконечномерных подалгебр Гейзенберга $s^{(l)} = \{T_{n,ln} | n \in \mathbb{Z}\setminus 0\}$, где l пробегает все целые числа $\mathbb{Z}$. Максимальной коммутативной подалгеброй является алгебра $H = \{T_{0,n} | n \in \mathbb{Z}\}$. Фиксируем некоторое l и обозначим через $X_k(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{n,nl+k}z^{-n}$, где $k \in \mathbb{Z}\setminus 0$ и z - комплексная переменная. В $s^{(l)}$ и полях $X_k(z)$ содержатся все образующие алгебры g. Легко проверить, что выполняются следующие соотношения:

$$[T_{n,nl},\ X_k(z)] = 2i\sin(\hbar nk)z^n X_k(z),$$

$$[T_{-n,-nl},\ X_k(z)] = -2i\sin(\hbar nk)z^{-n} X_k(z). \tag{2}$$

Алгебра $s^{(l)}$ имеет стандартное неприводимое представление в пространстве многочленов от бесконечного числа пременных $V = \mathbb{C}[x_1, x_2, ...]$

$$\pi_0(T_{n,nl}) = \partial/\partial x_n,\ \ \pi_0(T_{-n,-nl}) = nx_n,\ \ \pi_0(c) = 1.$$

Уравнения (2), в которых $T_{\pm n,\pm nl}$ представлены генераторами $\partial/\partial x_n$ и nx_n, имеют единственное решение (с точностью до умножения на константы c_k) в классе дифференциальных операторов на пространстве $\mathbb{C}[x_1, x_2, ...]$ [5]:

$$\hat{X}_k(z) = c_k e^{2i\sum_{m\geq 1} z^m \sin(\hbar km)x_m}\, e^{2i\sum_{m\geq 1}\frac{z^{-m}}{m}\sin(\hbar km)\ \partial/\partial x_m}. \tag{3}$$

Введем образующие $\hat{X}_{k,n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_c dz z^{n-1}\hat{X}_k(z)$, где интегрирование проводится по контуру c, охватывающему точку 0. Нашим результатом является доказательство того, что соответствие

$$\pi(T_{n,nl+k}) = \hat{X}_{k,n},\ \ k \neq 0$$

$$\pi(T_{n,nl}) = \partial/\partial x_n;\ \ \pi(T_{-n,-nl}) = nx_n;\ \ \pi(c) = 1 \tag{4}$$

задает неприводимое представление старшего веса $\Lambda \in H^*$, где $\Lambda(T_{0,k}) = c_k$, в пространстве V с вакуумным вектором $|0>= 1$.

3. Доказательство состоит в прямой проверке коммутационных соотношений между образующими $\hat{X}_{k,n}$. Напишем правило слияния вершинных операторов

$$\hat{X}_k(z)\hat{X}_{k'}(\varsigma) = \frac{(z - q^{k-k'}\varsigma)(z - q^{-(k-k')}\varsigma)}{(z - q^{k+k'}\varsigma)(z - q^{-(k+k')}\varsigma)} :X_k(z)X_{k'}(\varsigma):, \tag{5}$$

где $|z| > |\varsigma|$ и $q = e^{i\hbar}$. Нормальное упорядочение понимается в стандартном смысле. Так как дробь в правой части (5) не меняется при перестановке $z \longleftrightarrow \varsigma$, $k \longleftrightarrow k'$, то вычисление коммутаторов $[\hat{X}_{k,n}, \hat{X}_{k',m}]$ при $k + k' \neq 0$ сводится к вычислению контурных интегралов

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_c d\varsigma\varsigma^{n-1}\oint_{\Gamma_i} dz z^{n-1}$$

от правой части (5). Здесь Γ_i - инфинитезимальные окружности, охватывающие полюса (5) $z = q^{k+k'}\varsigma$ и $z = q^{-(k+k')}\varsigma$ соответственно. В случае, когда $k + k' = 0$, два полюса первого порядка сливаются в один полюс второго порядка и мы попадаем в стандартную ситуацию. Результат вычислений таков. При условии, что константы c_k удовлетворяют функциональному уравнению

$$c_k c_{k'} = \frac{q^{k+k'} - q^{-(k+k')}}{(q^k - q^{-k})(q^{k'} - q^{-k'})} c_{k+k'}, \quad q = e^{i\hbar}, \tag{6}$$

решение которого $c_k = q^k/(q^k - q^{-k})$ единственно с точностью до умножения на фазовый множитель $e^{ik\lambda}$, коммутационные соотношения таковы:

$$[\hat{X}_{k,n}, \hat{X}_{k',m}] = 2i \sin \hbar(nk' - mk)\hat{X}_{k+k',n+m}, \text{при } k + k' \neq 0$$

$$[\hat{X}_{k,n}, \hat{X}_{-k,n}] = \begin{cases} -2i \sin(\hbar kp)\partial/\partial x_p, & p = n + m > 0 \\ 2i \sin(\hbar kp) p x_p, & p = -(n + m) > 0 \\ n \cdot 1, & n + m = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Сравнение (7), (4) и (1) показывает, что алгебра дифференциальных операторов $\hat{X}_{k,n}$, $\partial/\partial x_m$, x_m, 1, $k \in \mathbb{Z}\setminus 0$, $m > 0$ замыкается (что априори не очевидно) и задает представление алгебры Ли (1) в пространстве V. Так как ограничение представления π на подалгебру Гейзенберга $s^{(l)}$ неприводимо, то и π неприводимо. Из явного вида $\hat{X}_k(z)$ легко вывести, что $\hat{X}_{k,0}|0>= c_k$ и $X_{k,n}|0>= 0$ при $n > 0$. Это означает, что построенное представление является представлением старшего веса Λ относительно разложения $g = N_+ + H + N_-$, где $N_+(N_-)$ порождается образующими $T_{n,k}$, $n > 0$ $(n < 0)$, а H порождается образующими $T_{0,k}$ и является максимальной коммутативной подалгеброй в g. Вес $\Lambda \in H^*$ задается своими значениями на базисе H условиями $\Lambda(T_{0,k}) = c_k$.

Несложно доказать, что представления отвечающие различным выборам подалгебры Гейзенберга эквивалентны.

4. Нетрудно убедиться, что вершинные операторы $\hat{X}_k(z)$ (3) получаются из стандартного вершинного оператора $Z(p,q)$ [9], реализующего базисное представление $\hat{gl}(\infty)$, с помощью редукции $p = ze^{ik\hbar}$, $q = ze^{-ik\hbar}$. Отсюда выводится формула задающая вложение синус алгебры в $\hat{gl}(\infty)$:

$$T_{n,nl+k} = e^{i\hbar kn} \sum_{m\in\mathbb{Z}} : \psi_m \psi^*_{m+n} : e^{2i\hbar km} + \delta_{n,0} \frac{e^{i\hbar k}}{e^{i\hbar k} - e^{-i\hbar k}}, \tag{8}$$

где ψ_m, ψ^*_m, $m \in \mathbb{Z}$ образующие Клиффордовой алгебры (свободные фермионы) с определяющими соотношениями $\{\psi_i, \psi_j\} = \{\psi^*_i, \psi^*_j\} = 0$, $\{\psi_i, \psi^*_j\} = \delta_{ij}$. Нормальное упорядочение фермионом определяется обычным образом: $: \psi_i \psi^*_j := \psi_i \psi^*_j - < \psi_i, \psi^*_j >$, где $< \psi_i, \psi^*_j >= Y_-(i)\delta_{i,j}; Y_-(i) = 1$, если $i \leq 0$, $Y_-(i) = 0$, если $i > 0$.

5. Поучительно проследить за применимостью описанной конструкции в предельном случае $\hbar \to 0$, который после перенормировки образующих соответствует центральному расширению алгебры Гамильтоновых векторных полей на торе с коммутационными соотношениями

$$[T_{\vec{n}}, T_{\vec{m}}] = [\vec{n} \times \vec{m}]T_{\vec{n}+\vec{m}} + n_1 \delta_{\vec{n}+\vec{m}} c.$$

Формулы (2), (3) сохраняются, однако вместо $\sin \hbar mk$ появляется множитель mk, вследствии чего в (5) возникает существенная особенность, приводящая к тому, что соответствующая алгебра операторов $\hat{X}_{k,n}$, $\partial/\partial x_m$, x_m, 1 не замыкается. Поэтому описанная конструкция не применима в этом предельном случае.

Так как используемая нами конструкция дает, по построению, специальные значения центрального заряда, было бы интересно применить конструкцию [10] к построению представления алгебры (1) с произвольным центральным зарядом.

Мы благодарим А.Герасимова, А.Рослого и К.Селиванова за конструктивные замечания способствовавшие улучшению текста. Мы благодарим также А.Вершика, М.Ольшанецкого, С.Пакуляка и А.Реймана за полезные обсуждения.

Литература

1. *Weyl H.* The Theory of Groups and Quantum Mechanics, Dover, 1931; *Moyal J.* Proc. Camb. Phil. Soc., 1949, 45, 99; *Fairlie D.B., Fletcher P., Zachos C.K.* Phys. Lett. B, 1989, 218, 203.
2. *Saveliev M.V., Vershik A.M.* Phys. Lett. A, 1990, 143, 121; Comm. Math Phys., 1989, 126, 367.
3. *Degasperis A. et al.* Preprint Rome Univ.-I, 1990.
4. *Gerasimov A., Lebedev D., Morozov A.* Preprint ITEP 4-90, 1990;Int. J. Mod. Phys., 1990, A 5, in press.
5. *Lepowsky J., Wilson R.L.* Comm. Math. Phys., 1978, 62, 43; *Kac. V. et al.* Adv. Math., 1981, 42, 83.
6. *Lusztig G.* Adv. Math., 1988, 70, 237.
7. *Frenkel I.B., Jing N.* Preprint Yale Univ., New Haven, CT 06520.
8. *Manin Yu.I.* Annales de l'Institute Fourier, Grenobl, 1987, 37, 191.
9. *Jimbo M., Miwa T.* Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras, Preprint, RIMS - 439, 1983.
10. *Wakimoto M.* Comm. Math. Phys., 1986, 104, 605; *Gerasimov A. et al.* Int. J. Mod. Phys., 1990, A5, 2495;*Фейгин Б., Френкель Е.* УМН, 1988, 43, 227.

Институт теоретической
и экспериментальной физики
Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
15 октября 1990 г.