Письма в ЖЭТФ, том 52, вып. 10, стр. 1170 - 1172 25 ноября 1990 г.

ДЕФОРМАЦИИ КОСЕТ-МОДЕЛЕЙ ОБЩЕГО ВИДА И ГРАССМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

А.А.Белов, Ю.Е.Лозовик

Для класса конформных теорий поля в рамках аффинно-вирасоровской конструкции показано, что многообразие деформаций является грассмановым.

Предложенная недавно Морозовым с соавторами [1] и независимо Халпернои и др. [2] общая унитарная аффинно-вирасоровская конструкция , включающая как предельные случаи решения типа Сугавары, парафермионы и косет-модели, позволяет получить серии конформных теорий поля, обладающие нетривиальными деформациями при фиксированном центральном заряде $c \geq 1$.

В данной статье мы построим новые серии конформных теорий и покажем, что "пространство модулей", описывающее деформации этих теорий является грассмановым многообразием.

Известные к настоящему времени деформируемые конформные теории (при постоянном c) сводятся либо к регулярным "квазиабелевым" случаям (картановские деформации, случай $k = 1$ и предел высокого уровня $k \to \infty$ [2]), либо возникают спорадически, например $SU(2)^{\#}_4$ [1] и выглядят несколько мистическим образом. Мы предлагаем регулярный, хотя и не исчерпывающий путь построения деформируемых теорий $F^{\#}_{k_0}$, являющихся обобщением $SU(2)^{\#}_4$.

1. Начнем с иллюстративного примера косет-модели $M_k(n; m, n-m) = SO(n)_k/SO(n-m)_k \times SO(m)_k$. Погрузим модель в диагональный анзац

$$L = \sum_{A<B}^{n} S_{AB} : J_{AB}(z) J_{AB}(z) :, \tag{1}$$

где $J_{AB}(z)$ - токи KM-алгебры $SO(n)_k$, и покажем, что все косет-модели $M_2(n; m, n-m)$ с данным n и $m \in \{2, ..., n-1\}$ связаны друг с другом маргинальными деформациями. Подставив в условия Вирасоро

$$\frac{1}{2} S_{AB} = \sum_{c}^{(AB)} [S_{AB}(S_{AC} + S_{BC}) - S_{AC} S_{BC}] + k S_{AB}^2 \tag{2}$$

"тензор инерции" слегка продеформированного косет-решения:

$$S_{AB} = S_{AB}^{(0)} + X_{AB},$$

где

$$S_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2(n+k-2)} - \frac{1}{2(m+k-2)}, \qquad \alpha, \beta = 1, ..., m;$$

$$S_{ab}^{(0)} = \frac{1}{2(n+k-2)} - \frac{1}{2(n-m+k-2)}, \qquad a, b = m+1, ..., n$$

и

$$S_{\alpha a}^{(0)} = \frac{1}{2(n+k-2)},$$

обнаружим, что при $k = 2$ (и только в этом случае) в линейном по X_{AB} приближении коранг системы равен $n-2$. ("Свободные" параметры имеют вид $X_{\alpha a} - X_{\beta a}$ и $X_{\alpha a} - X_{\alpha b}$). Можно убедиться, что учет высших поправок по

X_{AB} сохраняет указанное "вырождение". Покажем, что существует глобальное решение. Подстановка

$$S_{AB} = -\frac{R^A R^B}{2} \qquad (3)$$

сводит (2) к системе уравнений:

$$\sum_{A=1}^{n} R^A = 0, \qquad \sum_{A=1}^{n} (R^A)^2 = 1, \qquad (4)$$

определяющей многообразие деформаций $\mathbb{R}P^{n-2}$. Косет-модели $M_2(n; m, n-m)$ соответствует точка $R^\alpha = (\frac{n-m}{nm})^{1/2}$, $\alpha = 1, ..., m$, $R^a = -(\frac{m}{n(n-m)})^{1/2}$, $a = m+1, ..., n$. Таким образом, все указанные косет модели "лежат" на $\mathbb{R}P^{n-2}$ и, следовательно, связаны друг с другом маргинальными деформациями.

2. Обратимся теперь к более общему случаю косет-моделей вида

$$M_k(n, \{m_i\}_{i=1}^p) = SO(n)_k | \Pi_{i=1}^p SO(m_i)_k, \quad \sum_{i=1}^{p} m_i = n.$$

Центральный заряд для них имеет значение $c = p - 1$. Погрузим эти модели в диагональный анзац. При $k = 2$ обнаруживаем, что в окрестности косет-моделей существуют $(p-1)(n-p)$ - параметрические деформации. Подстановка анзаца

$$S_{AB} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{q} R_i^A R_i^B, \qquad (5)$$

являющегося прямым обобщением (3) в (2) приводит к системе уравнений

$$\sum_{A=1}^{n} R_i^A = 0, \qquad i = 1, ..., q$$

$$\sum_{A=1}^{n} R_i^A R_j^A = \delta_{ij}, \qquad i < j, \qquad (6)$$

которая определяет многообразие Штифеля $V_q(\mathbb{R}^{n-1})$. С учетом того, что q-репер R_i^A определен с точностью до ортогонального преобразования из $\mathbb{O}(q)$, окончательно получаем, что пространство модулей деформируемых конформных теорий совпадает с многообразием Грассмана $G_q(\mathbb{R}^{n-1})$. При этом выявляется новый геометрический смысл центрального заряда c, который оказывается равным размерности репера q. Многообразие деформаций всех $SO(n)_2$ - косет-моделей с данным центральным зарядом c является бесконечномерным многообразием Грассмана $G_c(\mathbb{R}^\infty)$ с естественной топологией индуктивного предела.

3. При построении $SO(n)_2^\#$ - серии деформируемых моделей неявно использовалось вложение $SO(n)_2 \subset SU(n)_1$. Формализация и обобщение этой процедуры позволяют построить новые серии деформируемых теорий. Рассмотрим, например, случай $SO(n)_2 \oplus SO(n)_2 \subset SO(2n)_1$. Соответствующий тензор энергии-импульса имеет вид:

$$L = \sum_{K<L} M_{KL} : (J_{KL} + \tilde{J}_{KL})^2 : + \sum_{K<L} L_{KL} : (J_{KL} - \tilde{J}_{KL})^2 : . \qquad (7)$$

Отметим, что анзац (7) уже не имеет привычного диагонального вида. Для M_{KL}, L_{KL} условия Вирасоро имеют вид:

$$\frac{1}{2} L_{KL} = k L_{KL}^2 - \sum_{m}^{(KL)} \{ L_{KL}(M_{KM} + M_{LM} + L_{KM} + L_{LM}) - L_{KM} L_{LM} - M_{KM} M_{LM} \},$$

$$\frac{1}{2}M_{KL} = kM_{KL}^2 + \sum_{m}^{(KL)} \{M_{KL}(M_{KM}+M_{LM}+L_{KM}+L_{LM}) - L_{KM}M_{LM} - L_{LM}M_{KM}\}. \quad (8)$$

Наряду с решениями $L_{KL} = M_{KL}$, сводящимися к (5), система (8) имеет новые нетривиальные решения, описывающие многопараметрические деформации. Пространства деформаций по-прежнему являются грассмановыми многообразиями.

Было бы интересно взглянуть на полимодальные деформации конформных теорий с точки зрения теории катастроф в свете наметившегося параллелизма в классификации [3].

Литература

1. *Morozov A.Yu. et al.* Int. Journ. Mod. Phys. A., 1990, 5, 803.
2. *Halpern M.B., Kiritsis E.* Mod. Phys. Lett. A., 1989, 4, 1373. *Halpern M.B., et al.* Int Journ. Mod. Phys. A., 1990, 5, 2275.
3. *Vafa C., Warner N.* Phys. Lett. B, 1989, 218, 51.

Институт спектроскопии
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18 октября 1990 г.