Письма в ЖЭТФ, том 56, вып.2, стр. 87–92 25 июля 1992 г.

К ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ, ОСНОВАННОЙ НА ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕТВИ УРАВНЕНИЯ РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ

А.Э.Филиппов, А.В.Радиевский

Физико-технический институт АН Украины

340114, Донецк, Украина

Поступила в редакцию 30 марта 1992 г.

После переработки 10 июня 1992 г.

Недавно найденная физическая ветвь точного (локального) уравнения РГ использована в качестве нулевого приближения для верифицируемого градиентного разложения.

Предложенное еще в ранних работах по флуктуационной теории фазовых переходов [1,2] точное уравнение ренормализационной группы (РГ) в вариационных производных позволяет в принципе формально точно найти неподвижную точку и вычислить критические индексы. Однако на практике приходится прибегать к тому или иному варианту теории возмущений, которые базируются либо на не малых в действительности параметрах [3,4], либо предлагают неконтролируемые критерии обрыва систем зацепляющихся уравнений для вершин функционала свободной энергии [5]. Главная трудность состоит в том, что строгая вычислительная процедура должна использовать существенно нелокальную форму такого функционала [6,7]. Вместе с тем, ожидаемая генерация нелокальностей мала в меру малости индекса Фишера $\eta \approx 0,03$. Последнее обстоятельство позволяет на начальном этапе рассмотреть локальную версию точного уравнения РГ [8–12] с последующим разложением по нелокальным поправкам.

Однако локальное уравнение РГ существенно нелинейно и для его решения приходилось также использовать теорию возмущений (различные варианты того же ϵ-разложения). Так использование в качестве нулевого приближения локальной формы φ^4 [12] требовало разложения разности $(4-d)$ по степеням $\eta^{1/2}$, что равносильно модификации ϵ-разложения [13]. Тем не менее, идея теории возмущений, использующей малость генерации нелокальности по-прежнему привлекательна.

Обнаруженная недавно (единственная) физическая ветвь решения локального уравнения РГ [14,15] позволяет сформулировать искомую теорию возмущений в форме градиентного разложения [16]. Точное уравнение РГ в вариационных производных имеет вид [17]:

$$H[\varphi] = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{q}} \eta(\mathbf{q})[V - G_0^{-1}(\mathbf{q})|\vec{\varphi}(\mathbf{q})|^2] + dV\frac{\partial H}{\partial V} -$$
$$- \int d^{\mathrm{d}}\mathbf{r}[(d-2)\vec{\varphi}(\mathbf{r})/2 + \mathbf{r}\nabla_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r})]\delta H/\delta\vec{\varphi}(\mathbf{r}) + \tag{1}$$
$$+ \int\limits_{\mathbf{rr}'} \{h(\mathbf{r}-\mathbf{r}')[\delta^2 H/\delta\vec{\varphi}(\mathbf{r})\delta\vec{\varphi}(\mathbf{r}') - \delta H/\delta\vec{\varphi}(\mathbf{r})\delta H/\delta\vec{\varphi}(\mathbf{r}')] -$$
$$-\frac{1}{2}\eta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\vec{\varphi}(\mathbf{r})\delta H/\delta\vec{\varphi}(\mathbf{r}')\},$$

где $H = H_{total} - H_0$ и в качестве H_0 использован функционал:

$$H_0 = \int\limits_{\mathbf{q}} G_0^{-1}(\mathbf{q})|\vec{\varphi}(\mathbf{q})|^2; \qquad \int\limits_{\mathbf{q}} \equiv \int d^{\mathrm{d}}\mathbf{q}/(2\pi)^{\mathrm{d}};$$

$$H = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} 2^{1-2k} \int\limits_{\{q_i, q_{i'}\}} (2\pi)^{\mathrm{d}} \delta\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{k}} (\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_{i'})\right) \times g_{\mathrm{k}}\{\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i'}\} \prod_{i=1}^{\mathrm{k}} \vec{\varphi}_{\mathbf{q}_i} \vec{\varphi}_{\mathbf{q}_{i'}} \qquad (2)$$

d – размерность пространства, $\vec{\varphi}$ – n-компонентный вектор, $h(\mathbf{q}) = \exp(-\mathbf{q}^2/2\Lambda^2)$, а функция аномальной размерности $\eta(\mathbf{q})$ определена соотношениями:

$$\eta(\mathbf{q}) = \eta(0) + [(D(\mathbf{q}) - D(0)) - \eta(0)G_0^{-1}(\mathbf{q})]/(G_0^{-1}(\mathbf{q}) + g_1);$$

$$D(\mathbf{q}) = -g_1^2 h(\mathbf{q}) + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{p}} h(\mathbf{p})\{n g_2(\mathbf{p}, -\mathbf{p}; \mathbf{q}, -\mathbf{q}) + g_2(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; \mathbf{q}, -\mathbf{p})\}. \qquad (3)$$

Величина $\eta(0) = dD/d(q^2)|_{\mathrm{q}=0}$ совпадает с индексом Фишера η. Формально при импульсе обрезания $\Lambda \to \infty$ функция $h(q) \to \mathrm{const} = h(0) = 1$ и соответственно $h(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (\Lambda/(2\pi)^{1/2})^{\mathrm{d}} \exp(-(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2\Lambda^2/2) \to \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, так что решение уравнения (1) можно искать в виде локального функционала $H = \Phi_0 = \int\limits_{\mathbf{r}} f(\varphi)(\mathbf{r}))$, ограничиваясь "обыкновенным" уравнением в частных производных и $\eta = 0$:

$$\dot{f} = df - \frac{d-2}{2}\varphi\nabla_\varphi f + \nabla_\varphi^2 f - (\nabla_\varphi f)^2. \qquad (4)$$

Именно такое локальное уравнение было исследовано в [14,15] и было установлено, что оно имеет единственную физическую ветвь решения при $2 < d < 4$, соответствующую критическому поведению.

При $d \le 3$, ϵ-разложение в модели φ^4 лишь качественно моделирует это решение. Асимптотически $f(\varphi) \sim \varphi^2/2$ при $\varphi \to \infty$, поэтому ряд по степеням $(\varphi^2)^k$ для него сходится условно и не может быть оборван. В то же время расчеты спектра, выполненные для этого решения при различных $n = 1, 2, 3, \ldots$ дают хорошие критические индексы, что говорит о том, что $H = \Phi_0$ есть удачное нулевое приближение. Основным пунктом дальнейшего изложения будет отказ от обрыва рядов по степеням φ во всех порядках теории возмущений, позволяющий избежать разложения по ϵ при $d \le 3$, но вынуждающий использовать в качестве нулевого приближения массив $f(\varphi)$, известный лишь численно.

В действительности уравнение (1) получено при нормировке $\Lambda \equiv 1$, так что подстановка $H = \Phi_0$ приводит к генерации нелокальных поправок за счет слагаемого

$$-\int \bar{h}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta H/\delta\vec{\varphi}(\mathbf{r})\delta H/\delta\vec{\varphi}(\mathbf{r}'), \quad \text{где } \bar{h}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = h(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Оставляя нижайшие неисчезающие градиенты $(\nabla\varphi)^2$ и ограничиваясь в данной краткой заметке случаем $n = 1$, имеем генерационный вклад вида $\int\limits_{\mathbf{r}} f_{\varphi\varphi}^2 (\nabla\varphi)^2/2$. Функционал H в этом случае следует дополнить $H = \Phi_0 + \Phi_1$, где $\Phi_1 = \int_{\mathbf{r}} \chi(\varphi(\mathbf{r}))(\nabla\varphi)^2$. Нетрудно проверить, что функцию $\eta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \neq 0$ следует удержать в этом порядке в виде $\eta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \approx \eta = \mathrm{const}$. В результате приходим к следующей паре уравнений для функций f и χ:

$$\dot{f} = df - \frac{d-2}{2}\varphi f_\varphi + f_{\varphi\varphi} - f_\varphi^2 + B\chi; \tag{5}$$

$$\dot{\chi} = -[\eta + 4f_{\varphi\varphi}]\chi - \left[\frac{d-2+\eta}{2}\varphi + 2f_\varphi\right]\chi_\varphi + \chi_{\varphi\varphi} + \frac{1}{2}[f_{\varphi\varphi}^2 - \eta],$$

где $B = \int_{\mathbf{p}} p^2 h(p) = d/(2\pi)^{d/2} \ll 1$. Система (5), также как и уравнение (4), может быть проинтегрировано численно. Заметим, что принимая во внимание численную малость B и ожидаемую (верифицируемую) малость функции χ по сравнению с f, последнее слагаемое в уравнении для $\dot{f}$ в нижайшем порядке по χ можно опустить. Этого нельзя сказать о подлежащем вычислению параметре $\eta \neq 0$ в форме $(d-2+\eta)/2$, поскольку при $d \to 2$ он дает основной вклад в физически важное слагаемое $\propto f_\varphi\varphi$ [14]. Условия (3), однако, не полностью определяют η, т.к. в данном порядке сводятся к граничным условиям $\chi(0) = \chi_\varphi(0) = 0$. При этих ограничениях и фиксированной ветви решения $\dot{f} = 0$ уравнение для неподвижной точки $\dot{\chi}(\varphi) = 0$ имеет однопараметрическое семейство решений $\chi(\varphi;\eta)$. Последнее обстоятельство снова, как и в случае с $f(\varphi)$, порождает проблему выбора физической ветви $\chi(\varphi;\eta)$. Этот выбор собственно и фиксирует величину $\eta \neq 0$.

Трудность, однако, состоит в том, что физическая ветвь $f(\varphi)$ известна лишь численно и меняется вместе с изменением η. Чтобы обойти ее выполним в уравнениях $\dot{f} = \dot{\chi} = 0$ замены $\varphi = \varphi'/(2\Delta_\varphi)^{1/2}$, $d_{eff} = 2d/(2-\eta)$, где $\Delta_\varphi = (d-2+\eta)/2$ – масштабная размерность поля φ. Имеем

$$d_{eff} f/(d_{eff}-2) - \frac{1}{2}\varphi' f_{\varphi'} + f_{\varphi'\varphi'} - f_{\varphi'}^2 = 0; \tag{6а}$$

$$-[\eta/2\Delta_\varphi + 4f_{\varphi'\varphi'}]\chi - \left[\frac{1}{2}\varphi' + 2f_{\varphi'}\right]\chi_{\varphi'} + \chi_{\varphi'\varphi'} + \frac{1}{2}[f_{\varphi'\varphi'}^2 - \eta] = 0. \tag{6б}$$

Уравнение (6а) универсально и физическая ветвь $f(\varphi')$ однозначно зависит от d_{eff}. Проанализируем теперь уравнение (6б). Учитывая, что при $\varphi \geq 1$ функция $f(\varphi)$ переходит на асимптотику $f(\varphi) \approx \varphi^2/2 + \ldots$ [14], получаем

$$\chi_{\varphi\varphi} - (4+\eta)\chi - (4+2\Delta_\varphi)\varphi\chi_\varphi/2 + (1-\eta)/2 = 0,$$

или при $\varphi \gg 1$ (и χ, χ_φ, $\chi_{\varphi\varphi} \to \pm\infty$)

$$\chi_{zz} + \left(\frac{1}{2} - z\right)\chi_z - \frac{(4+\eta)}{(4+2\Delta_\varphi)}\chi = 0, \tag{7}$$

где $z = (4+2\Delta_\varphi)\varphi^2/4$. Уравнение (7) является известным уравнением Куммера [17] и определяет асимптотику $\chi(\varphi) = c(\eta)\varphi^{2\gamma}\exp[(4+2\Delta_\varphi)\varphi^2/4]$, где $\gamma = (4-d-\eta)/[2(2+d+\eta)] > 0$; постоянная c при заданных условиях $\chi(0) = \chi_\varphi(0) = 0$ определяется параметром η. Заметим, однако, что при любом знаке $c \neq 0$ и достаточно большом $|\varphi|$ имеет место неравенство $\chi \gg f$. То есть полученные решения противоречат способу вывода уравнения (6б) (то есть условию $f \gg \chi$ для всех φ) и, следовательно, являются "лишними" его ветвями. Единственная

2. F.J.Wegner, In: Phase transitions and critical phenomena. New York: Acad. Press., 1976, **6**.
3. K.G.Wilson, and M.E.Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972).
4. S.-k.Ma, In: Phase transitions and critical phenomena. New York: Acad. Press., 1976, **6**.
5. E.K.Riedel, G.R.Golner, and K.E.Newman, Ann. Phys. **161**, 178 (1985).
6. P.Shukla, and M.S.Green, Phys. Rev. Lett. **34**, 436 (1975).
7. G.R.Golner, and E.K.Riedel, Phys. Rev. Lett. **34**, 171 (1975).
8. V.I.Tokar, Phys. Lett. A **104**, 135 (1984).
9. A.Hasenfratz, and P.Hasenfratz, Nucl Phys. B **270**, 687 (1986).
10. G.Felder, Comm. Math. Phys. **11**, 101 (1987).
11. Yu.M.Ivanchenko, A.A.Lisyanskii, and A.E.Filippov, J. Stat. Phys., 1992, in press; Phys. Lett. A **150**, 100 (1990).
12. Yu.M.Ivanchenko, A.A.Lisyanskii, and A.E.Filippov, Phys. Lett. A **150**, 100 (1990).
13. А.З.Паташинский, В.Л.Покровский, Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.
14. A.E.Filippov, and S.A.Breus, Phys. Lett. A **158**, 300 (1991).
15. А.Э.Филиппов, ТМФ, 1992, в печати.
16. S.-k.Ma, Modern theory of critical phenomena. New York: Benjamin, 1976.
17. M.Abramowitz, and I.A.Stegun, Handbook of mathematical functions National Bureau of Standards, Washington, 1964.