Письма в ЖЭТФ, том 57, вып.2, стр.95 - 98 25 января 1993 г.

РЕЛАКСАЦИЯ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДАЛЬНЫХ ПИНЧАХ И ТОКАМАКЕ

В.И.Петвиашвили

Российский научный центр "Курчатовский институт"

123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 ноября 1992 г.

После переработки 24 декабря 1992.

Найдено множество равновесных состояний плазмы, которые могут установиться в результате турбулентной релаксации. Они соответствуют решениям уравнения экстремума функционала Ляпунова и характеризуются обращением направления тока на периферии.

В работах [1,2] был сделан вывод, что в результате мелкомасштабной турбулентности плазма релаксирует к равновесию в котором реализуется условный минимум интеграла энергии E, после чего турбулентность спадает. В качестве условия на минимум было предложено сохранение интеграла магнитной спиральности $\int hd^3x$, где $h = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$. Здесь A - вектор-потенциал магнитного поля $\mathbf{B}$. Минимизация происходит из-за более быстрой диссипации энергии по сравнению со спиральностью при коротковолновой турбулентности. В результате условный минимум энергии становится аттрактором. Однако, при такой релаксации давление плазмы p обращается в нуль из-за отсутствия ограничений на минимум по p.

В работах [3,4] в качестве условия на минимум E и p был предложен новый первый интеграл $I_f = \int hf(p^{1/k}/h)d^3x$, содержащий давление. Здесь k - показатель адиабаты плазмы, f - произвольная функция. При таком, более жестком, ограничении плазма может срелаксировать к состоянию, в котором p имеет значительный максимум в середине плазмы. Другими словами, турбулентная релаксация реализует минимум функционала Ляпунова $L = E + I_f$, где $E = \int[\rho v^2/2 + p/(k-1) + B^2/8\pi]d^3x$; ρ - плотность, $\mathbf{v}$ - скорость плазмы.

Такой выбор интегралов обусловлен их гладкостью по отношению к аргументам $\mathbf{A}$, p, $\mathbf{v}$, ρ, так, что первая и вторая вариации L тоже гладкие функционалы. При коротковолновой турбулентности, в отсутствие внешних источников, быстрее всех релаксируют v^2 и p из-за их чувствительности к турбулентной вязкости и теплопроводности. А величина $B^2 = (\mathrm{rot}\mathbf{A})^2$ релаксирует быстрее чем $h = \mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A}$, которая удовлетворяет уравнению неразрывности [4] и содержит меньше производных. Поэтому отношение амплитуд относительных флуктуации этих величин больше, чем a/λ, где a - характерный размер плазмы, λ - характерная длина турбулентных флуктуаций. В результате, если плазма находилась в квазистационарном состоянии вблизи минимума L, то сравнительно быстрое уменьшение v^2, p, B^2 переведут плазму в состояние с минимумом L при почти неизменном h. В минимуме L плазма становится более устойчивой [4,5] и уровень турбулентности должен уменьшиться. Экстремаль $\delta L = 0$ приводит к уравнению релаксированного равновесия [4]:

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = -2G\mathbf{B} - \nabla G \times \mathbf{A}; \quad G = G(h); \quad \mathbf{B} = rot\mathbf{A}. \tag{1}$$

Здесь G - определяется посредством f и дает установившееся давление как функцию от спиральности:

$$p(h) = \int h(\partial G/\partial h)dh/4\pi + \text{const}. \qquad (2)$$

Система (1,2) выделяет сильно ограниченное подмножество из множества равновесий плазмы. Устойчивость таких равновесных состояний можно исследовать так же, как устойчивость обычных равновесий, то есть в линейном приближении [5]. В случае $G = \text{const}$ ток, согласно (1), параллелен B и получается бессиловое состояние, уравнение которого решалось в [2] аналитически. Другие решения (1) находим численно в цилиндрической геометрии. Для этого предположим, что все величины зависят только от цилиндрического радиуса r. При $r = 0$ положим:

$$A_z = \psi, \quad A_\phi = 0, \quad B_z = 1, \quad B_\phi = 0, \quad \text{rot}_z\mathbf{B} = 1, \quad G = -1/2. \qquad (3)$$

Здесь ψ - постоянная, которая вместе с G определяет структуру равновесия. Условия (3) вводят единицы магнитного поля и длины равные B_z и $B_z/\text{rot}_z B$ на магнитной оси. Вместо $G(h)$ удобно ввести функцию от r : $G = g(r)/2$. Тогда (2) принимает вид:

$$p = \int_a^r h(\partial g/\partial r)dr/8\pi, \qquad \partial p/\partial r|_{r=a} = 0. \qquad (4)$$

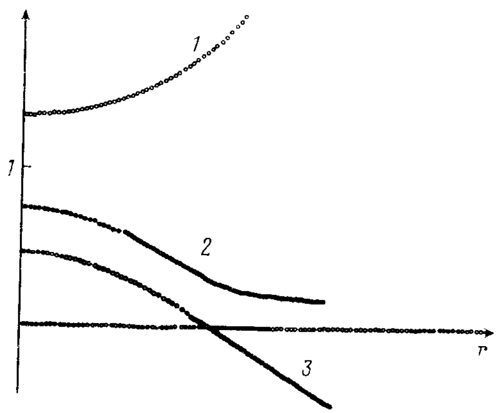

Рис.1

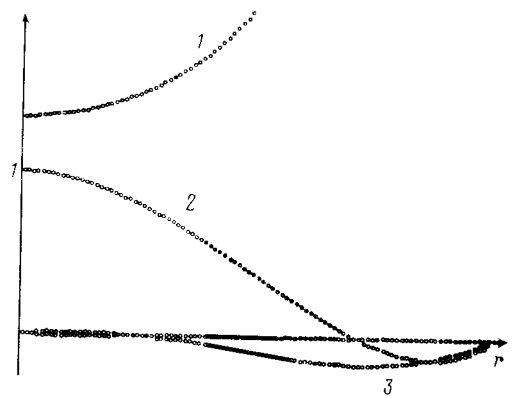

Рис.2

Рис.1. Типичные профили q в осесимметричных плазменных ловушках: 1 – в токамаках, 2 – в стабилизированных пинчах, 3 – в пинчах с обращенным магнитным полем.

Рис.2. Профили: 1 - q, 2 - $\text{rot}_z\mathbf{B}$, 3 – $\text{rot}_\phi\mathbf{B}$ релаксированных равновесий в токамаке, с выпуклым профилем давления в центре, в безразмерных единицах (3). На границе $q = 8,6$

Здесь мы дополнительно требуем, чтобы плазма была холодной и бессиловой у границы. Этим условиям можно удовлетворить полагая $\partial g/\partial r|_{r=a} = 0$ в системах, в которых h^2 растет в сторону границы (в решениях (1) типа токамак) или $h|_{r=a} = 0$ (в пинчах). Чтобы ток был равен нулю на границе токамакоподобного решения (1), следует дополнительно потребовать: $g|_{r=a} = 0$. Тогда, при приближении к границе, g стремится к нулю быстрее, чем $\partial g/\partial r$.

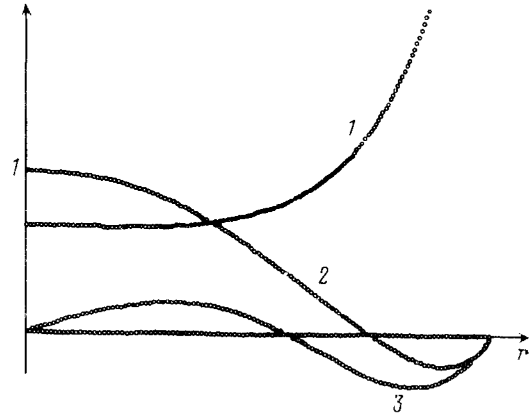

Рис.3. Профили: *1* - q, *2* - $\mathrm{rot}_z\mathbf{B}$, *3* - $\mathrm{rot}\,_\phi\mathbf{B}$ релаксированных равновесий в токамаке, с плоским профилем давления в центре. На границе $q = 3,5$ и имеет минимум при $r = 0,4$

Как увидим из (1), это приводит к обращению знака тороидального тока в подобных решениях.

Задаваясь различными g, ψ, можно получить решение (1) в виде трех основных осесимметричных конфигурации встречающихся на экспериментах: токамак, стабилизированный пинч и пинч с обращенным полем. Основной отличительный признак между ними профиль коэффициента запаса q (рис.1). Решение (1) в виде стабилизированный пинч исследовалось в [4] и других. Решения (1) в виде пинча с обращенным магнитным полем имеют большую плотность тока на границе, что не совсем удобно для целей термоядерного синтеза.

Рассмотрим решения (1) типа токамак в случае, когда профиль давления в центре параболический. В простейшем случае этому соответствует выбор: $g = -[1-(r/a)^2]^2$. Профили магнитного поля и давления при этом на вид мало отличаются от обычных. Профиль $q = rB_z/RB_\phi$ приводится при $\psi = -0,2$, $a = 1$, $R = 1,5$, на рис.2. Он круто растет у границы. Это вызвано обращением знака тороидального тока в этой области, что приводит к частичному экранированию полоидального поля (рис.2). На оси, согласно (3), имеем: $q = 2/R$, $h = \psi$. Отношение давления к магнитному давлению на оси в этом примере равно $\beta = 0,22$. С уменьшением ψ растет β.

Рассмотрим более плоский профиль давления в виде кубической параболы около оси. Это имеет место, например, когда $g = -[1-(r/a)^3]^2$. При этом в приосевой области имеем бессиловую конфигурацию, где q согласно аналитическому решению [2] спадает при удалении от оси. Результаты решения (1) при $\psi = -0,4$, $a = 2$, $R = 3$, даны на рис.3. Здесь q имеет слабый минимум при $r = 0,4$. Имеет место и более выраженное обращение тока. В середине имеем парамагнетизм, на краю плазмы – диамагнетизм. На оси $\beta = 0,47$. Такой профиль на взгляд неустойчив. Однако эксперименты [6] дают профиль q похожий на этот (с учетом ошибок измерений). В режиме описанном в [6] равновесие бессиловое и на краю и в центре плазмы. Поэтому профиль q не монотонен.

Таким образом то, что согласно [5], устойчивость равновесия соответствующего экстремуму функционала Ляпунова, можно исследовать используя метод линеаризации, позволяет применить релаксационную теорию и к токамакам. Это сильно сужает неопределенность в выборе наиболее выгодных параметров равновесия. В таких релаксированных состояниях, описываемых уравнением (1), поле на краю бессиловое, что проявляется в обращении знака тока и в крутом росте q. Заметим, что согласно работе [7], где получались критерии винтовой неустойчивости, наличие области с отрицательным током (точнее – участка с положительным градиентом тока у границы) существенно улучшает устойчивость.

Выражаю благодарность Э.И.Юрченко за ценные обсуждения.

---

1. L.Woltjer, Proc. Nat Acad. Sci. **44**, 489 (1958).
2. J.B.Taylor, Phys. Rev. Lett. **33**, 1139 (1974).
3. В.А.Гордин, В.И.Петвиашвили, Письма в ЖЭТФ **45**, 215 (1987).
4. В.А.Гордин, В.И.Петвиашвили, ЖЭТФ **95**, 1711 (1989).
5. D.D.Holm, J.E.Marsden, T.Ratiu, and A.Weinstein, Phys. Reports 123, 2 (1985).
6. E.A.Lazarus, L.L.Lao, T.H.Osborne, et al., An optimization of beta in the D III-D Tokamak. General Atomic Project 3466. Preprint GA-A20571 (1991).
7. П.М.Блехер, Н.М.Зуева, Э.И.Юрченко, Препринт ИПМ им. Келдыша, N106 (1982).